П Л А Н

1. Объекты рассмотрения. Двоичные последовательности.

1.1. К ним многое сводится с помощью кодирования (например графы).

1.2. Основные идеи естественно обобщаются на то, что не кодируется.

2. Хотя наиболее важны конечные последовательности, мы начнем с рассмотрения бесконечных. Их изучение технически проще, а многие методы переносятся на конечный случай. При этом бесконечность аналогична экспоненциальности, а конечность — полиномиальности.

3. Источники представлений о случайности.

3.1. Случайно — то, что нельзя предугадывать.

3.2. Случайные последовательности получаются при бросании монеты.

4. Последовательности бывают детерминированными (совершенно неслучайными), бывают абсолютно случайными, а бывают промежуточными (например, на четных местах нули, а на нечетных — случайно). Опыт показывает, что при бросании симметричной монеты промежуточных (с интуитивной точки зрения) последовательностей не бывает. Поэтому случайными мы будем называть только абсолютно случайные.

5. Развитие первого источника (невозможно предугадать).

5.1. Определение закономерности.

Бесконечная последовательность закономерна, когда существует алгоритм (не обязательно всюду определенный), который по каждому ее началу выдает нетривиальное конечное множество продолжений, в котором всегда оказывается настоящее продолжение последовательности.

5.2. Равносильное, математически более удобное определение.

Закономерные последовательности — граничные точки эффективно открытых множеств. (Топология каноническая).

5.3. Множество закономерных последовательностей имеет первую категорию.

5.4. Данное определение не годится для монеты.

Монетная последовательность удовлетворяет закону больших чисел. Каждая последовательность, удовлетворяющая этому закону, закономерна.

5.5. Вообще, все известные законы классической теории вероятностей достаточно непосредственно дают закономерности.

5.6. Определение не годится и потому, что не зависит от асимметричности монеты. Невозможность предугадывать должна означать невозможность большей удачи в угадывании, чем та, что предоставляется распределением вероятностей.

5.7. Существуют ли беззаконные последовательности в природе?
Их существование не позволяло бы строить научную картину мира, так как парадоксальным образом беззаконные последовательности сколь угодно подолгу притворяются удовлетворяющими любой заданной закономерности.

5.8. Беззаконные последовательности оказываются очень полезными в математике.
Они соответствуют идеологии метода вынуждения.

5.9. В какую сторону менять определение?
Сравним двух предсказателей:

первый никогда не ошибается, но мало информативен,

второй определенно предсказывает очередную цифру, но изредка ошибается.
В разных ситуациях предпочтительнее разные предсказатели.
Итак, есть два параметра, учет которых меняет определение закономерности:

I степень точности,

II частота ошибок.

6. Развитие второго источника (бросание монеты). Первая попытка.
Когда люди обратили внимание на феномен вероятности (что поразительным образом случилось исторически очень недавно), первое что они заметили был закон больших чисел (збч). Собственно, именно этот закон объективизирует исходно субъективное понятие вероятности (что и делает теорию вероятностей осмысленной). Мизес предложил определять случайность через ее основной закон — збч.

6.1. Ради простоты рассмотрим симметричную монету. Последовательность $010101\ldots$, вполне удовлетворяя збч, очевидно неслучайна. Учитывая это Мизес предложил требовать збч от всех бесконечных подпоследовательностей. Разумеется, последнее нельзя понимать буквально (подпоследовательность мест, где стоят нули). Надо как-то ограничить способы выбора подпоследовательностей. Взятие члена в подпоследовательность не должно зависеть от его значения. Не должно быть и порочных кругов (например, правило “брать член, если его окружают нули” все случайные последовательности преобразует в неслучайные).

6.2. Самую общую формализацию частотного подхода дал Колмогоров (будем называть ее стохастичностью).
В его определении подпоследовательность выбирается алгоритмом (как и в определении закономерности, не обязательно всюду определенным). Последовательность удобно представлять себе как бесконечную колоду карт, на нижней стороне которых нарисована двоичная цифра, а на верхней — порядковый номер. Алгоритм указывает, какую карту пе-

ревернуть, и (еще перед переворачиванием) брать ли ее в подпоследовательность. Поведение алгоритма зависит от уже известных ему цифр на перевернутых картах.

6.3. Принцип типичности: не может состояться событие вероятности 0.

Буквальное понимание сформулированного принципа приводит к противоречию, так как всякое одноэлементное событие имеет вероятность 0. Уточнение принципа: не может состояться предсказанное событие вероятности 0. Предсказания выражаются на каким-либо образом фиксированном языке. Выразимых (на одном языке) событий счетное множество. Следовательно, объединение выразимых событий меры 0 имеет меру 0. Окончательный принцип типичности: случайная последовательность не принадлежит выразимым событиям вероятности 0. (Вальд).

6.4. Принцип типичности универсален: всякое разумное определение случайности может быть переформулировано в его терминах.

Поэтому мера множества случайных последовательностей равна 1.

Частотное определение можно переформулировать в терминах типичности.

6.5. Принцип различения.

Перейдем к рассмотрению разных распределений вероятностей. Одна из целей определения случайности — идентификация неизвестного распределения вероятностей по результатам испытаний. Распределение может быть только таким, чтобы результаты были случайны относительно него.

Две меры называются взаимно сингулярными, если существует множество меры 0 в смысле первой меры и меры 1 в смысле второй.

Естественно надеяться, что если языки для определения мер и множеств выбраны разумно, то для взаимно сингулярных определимых мер найдется определимое же множество меры 0 в смысле первой меры и меры 1 в смысле второй.

Принцип различения: одна последовательность не может быть случайна одновременно по двум взаимно сингулярным определимым мерам.

6.6. Частотное определение не удовлетворяет принципу различения.

Рассмотрим простой (и потому определимый в разумном языке) вероятностный процесс предложенный Ламбальгеном. Он состоит в последовательном бросании монет разной асимметричности. Бросания независимы.

Если вероятность герба стремится к $1/2$, то почти все в смысле меры, соответствующей описанному процессу, последовательности стохастичны (в смысле равномерной меры). (Шень).

В то же время, если $p(n)$ — вероятность выпадения герба при n-ом бросании, и ряд $\sum(p(n)-1/2)^2$ расходится, то асимметричный процесс взаимно сингулярен с симметричным. (Какутани).

6.7. Рассматривать суперпозиции колмогоровских правил выбора математически можно, но философски бессмысленно, так как создается порочный круг.

7. Принципы дальнейших определений случайности.

I Случайных последовательностей не слишком мало — их мера равна 1.

II Случайных последовательностей не слишком много — случайность влечет стохастичность.

8. Игровой подход (Мучник, Семенов, Успенский).

8.1. Теория вероятностей родилась из игр.

8.2. Игра учитывает оба параметра — и частоту ошибок и точность прогноза (за осуществление более точного прогноза Казино платит больше).

8.3. Правила игры.

8.3.1. Начальный капитал Человека и Казино ограничен. Человек делает ставки только наличными. Если Казино нечем оплатить выигрыш Человека, говорим, что Казино разорилось.

8.3.2. Предполагаем, что на пространстве всех двоичных последовательностей дана мера, не равная 0 на непустых открытых множествах.

8.3.3. Мы рассматриваем честные игры, в которых математическое ожидание (относительно данной меры) выигрыша равно 0.

8.3.4. Вслед за Колмогоровым мы глядим на последовательность как на колоду карт, лежащих номером вверх, цифрой вниз. Человек может указывать еще не перевернутую карту, называть предполагаемую цифру и ставить на нее какую хочет ставку (в пределах его текущего капитала).

8.3.5. Предсказуемые последовательности.

Пусть мера на последовательностях вычислима. Последовательность относительно нее предсказуема, если у Человека есть вычислимая стратегия (с рациональными ставками), разоряющая Казино при всяком его начальном капитале.

8.4. Почти все последовательности непредсказуемы.

8.5. Непредсказуемые последовательности стохастичны.

8.6. Условие непредсказуемости сильнее стохастичности.

Почти все в смысле процесса Ламбальгена последовательности предсказуемы относительно равномерной меры и стохастичны.

Итак, игровое определение с первого взгляда удачно.

9. Первое обращение к конечности.

В конечном случае бессмысленно говорить случайно или неслучайно, а осмысленно говорить о степени случайности (неслучайности).

9.1. Перенос игрового определения.

Поскольку определение игры инвариантно относительно умножения всех чисел на положительную константу, будем считать начальный капитал Человека равным 1.

Конечная последовательность α-β-предсказуема, если существует достаточно простая (сложность меньше α) стратегия Человека, разоряющая Казино с капиталом 2^{β}.

Сначала рассмотрим равномерную меру, соответствующую бросанию симметричной монеты.

9.2. Смысл β.

Если бы Человек знал цифры первых β карт колоды, то он, очевидно выиграл бы 2^{β}.

9.3. Смысл α.

Как определять сложность? По тем же причинам, по которым мы начали с исследования бесконечных последовательностей, разумно начать с наиболее качественного (а не количественного) определения, данного независимо Соломоновым и Колмогоровым. Точнее это система определений, эквивалентных с точностью до аддитивной константы.

9.4. В разных случаях адекватней разные определения сложности.

9.5. Сложность стратегии естественнее мерить с помощью
$K(\cdot \mid \text{длина последовательности})$, где K — простая энтропия.

9.6. Сложность стратегии из 9.2 равна β. Поэтому то, насколько стратегия демонстрирует предсказуемость разумно оценивать через $\beta - \alpha$.

9.7. Так как в конечном случае необходимо пользоваться понятием сложности, то посмотрим нельзя ли случайность конечных последовательностей определить только через сложность.

Конечная последовательность α-хаотична, если ее априорная энтропия больше ее длины минус α. (Априорная энтропия всегда не превосходит длину).

9.8. Большинство последовательностей хаотично.

Доля α-нехаотичных последовательностей не превосходит $2^{-\alpha}$.

9.9. Связь между хаотичностью и непредсказуемостью.

Если последовательность длины n α-β-предсказуема, то она $(\beta - \alpha - c \cdot \mathrm{lb}\, n)$-нехаотична. Здесь lb — двоичный логарифм, c — константа.

Величина $c \cdot \mathrm{lb}\, n$ часто возникает в утверждениях об энтропиях (например, все энтропии различаются не больше чем на эту величину).

9.10. В бесконечном определении предсказуемости стратегия вычислима, следовательно имеет конечную сложность. По сравнению с бесконечной длиной последовательности сложность стратегии ничтожно мала. Поэтому разумно в конечном случае предполагать, что α существенно меньше n (например, $< c \cdot \mathrm{lb}(n)$). Так что сведение к одному параметру $(\beta - \alpha)$ теряет важную составляющую характеристики случайности. Например, можно рассматривать удельную предсказуемость β/α.

10. Хаотичность бесконечных последовательностей (равномерная мера).

10.1. Последовательность хаотична если априорная энтропия каждого ее начала больше длины начала минус константа.

10.2. Если воспользоваться простой энтропией, то получится, что хаотичных последовательностей не существует.

10.3. Почти все последовательности хаотичны.

10.4. Характеризация стохастичности через хаотичность.

10.4.1. Хаотичность влечет стохастичность.

10.4.2. Пусть $d(n)$ — вычислимая всюду определенная функция. Стохастичная последовательность, априорная энтропия n-ого начала которой меньше $n-d(n)$ при всех достаточно больших n, существует тогда и только тогда, когда $d(n)$ меньше каждой линейной функции начиная с некоторого n. (Мучник).

10.5. Характеризация непредсказуемости через хаотичность.

10.5.1. Хаотичность влечет непредсказуемость.

10.5.2. Пусть $d(n)$ — вычислимая всюду определенная функция. Непредсказуемая последовательность, априорная энтропия n-ого начала которой меньше $n - d(n)$ при всех достаточно больших n, существует тогда и только тогда, когда $d(n)$ ограничено. (Мучник).

10.6. Открытая проблема: равносильны ли хаотичность и непредсказуемость?

Другими словами, можно ли в характеризации непредсказуемости устранить вычислимость d.

Во всяком случае, непредсказуемость очень близка к хаотичности, и причин предпочитать одно другому не видно.

11. Хаотичность бесконечных последовательностей (произвольная вычислимая мера).

11.1. Последовательность хаотична если отношение априорной полумеры всякого ее начала к мере этого начала ограничено.

11.2. Назовем последовательности, хаотичные в смысле какой-нибудь вычислимой меры, естественными.

11.3. Беззаконные последовательности предсказуемы по каждой вычислимой мере и тем более не естественны. (Мучник).

11.4. На естественных последовательностях непредсказуемость совпадает с хаотичностью. (Мучник).

11.5. Стохастичность не совпадает с непредсказуемостью (и тем более с хаотичностью) даже на естественных последовательностях. (Ламбальген-Шень-Мучник).

12. Второе обращение к конечности (произвольная рациональная мера).

12.1. Последовательность β-хаотична если ее мера больше ее априорной полумеры, деленной на 2^{β}.

12.1.1. Если мера известна заранее и мы оцениваем вероятности появления последовательностей, то априорную полумеру разумно релятивизовать мерой (как конечным объектом).

12.1.2. Если наоборот получена последовательность и мы подыскиваем меру попроще, относительно которой последовательность случайна, то релятивизация разумна не мерой, а длиной последовательности.

12.2. Последовательность α-β-естественна если она β-хаотична относительно меры, простая энтропия которой при известной длине меньше α.

12.3. Вопрос Колмогорова: существуют ли (математически) α-β-неестественные последовательности при разумных ограничениях на α, β?
Существуют (Шень).

12.4. Вьюгин оценивал априорную полумеру (при известной длине) множества α-β-неестественных последовательностей. Мучник усовершенствовал оценку. Она примерно равна $2^{-\alpha}$ и снизу и сверху, и в смысле 12.1.1 и в смысле 12.1.2. Замечательно, что оценка не зависит от β.

12.5. Случайность и естественность можно определять не через хаотичность, а через непредсказуемость. При этом появляется новый параметр — сложность стратегии.

13. Требование открывать карты только в порядке их следования в колоде серьезно ослабляет определение непредсказуемости.
Для каждой стремящейся к бесконечности функции ϕ существует монотонно непредсказуемая бесконечная последовательность, априорная энтропия n-ого начала которой меньше $\phi(n) \cdot \mathrm{lb}(n)$ при всяком n.

14. Существует ли универсальная (вычислимая) стратегия обыгрывающая все предсказуемые последовательности?

14.1. Нет. Для каждой вычислимой стратегии существует бесконечная последовательность, априорная энтропия n-ого начала которой меньше $c \cdot \mathrm{lb}(n)$ при всяком n, не обыгрываемая данной стратегией.

14.2. Тем не менее класс всех вычислимых последовательностей имеет универсальную стратегию.

14.3. Проблема: существует ли универсальная стратегия для класса всех естественных последовательностей?

15. Принцип: последовательности, встречающиеся в природе, естественны. Верно ли обратное?

15.1. Напомним (5.7), что скорее всего не все бесконечные последовательности существуют в природе. Однако, каждая бесконечная последовательность вычислима относительно какой-нибудь хаотичной (по равномерной мере). (Гач).

15.2. Вычислимый образ того, что возможно в природе, очевидно, тоже возможен в природе. Поэтому естественность нельзя интерпретировать как то, что возможно в природе.

15.3. Хотелость бы предложить формализацию для того, что возможно в природе.