ЛИТЕРАТУРА

1. *Ross G., Fiddy M.A., Nieto-Vesperinas M.* In: Inverse scattering problems in optik. N.Y.: Springer-Verlag, 1980, p. 15–71. 2. *Ферверда Х.А.* В кн.: Обратные задачи в оптике. М. Машиностроение, 1984, с. 21–47. 3. *Аблеков В.К., Авдуевский В.С., Бабаев Ю.Н. и др.* – ДАН, 1983, т. 271, № 6, с. 1377–1386. 4. *Клибанов М.В., Волостников В.Г., Котляр В.В.* – ДАН, 1985, 279, № 6, с. 1348–1351. 5. *Степанов В.Н.* – Сиб. матем. журн., 1984, т. 25, № 1, с. 133–145. 6. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с. 7. *Fright W.R., Bates R.H.T.* – Optik, 1982, vol. 62, № 3, p. 219–227. 8. *Алексеев Г.В.* – ЖВМиМФ, 1982, т. 22, № 3, с. 663–670.

УДК 517.11 МАТЕМАТИКА

Ан.А. МУЧНИК

ОБ ОСНОВНЫХ СТРУКТУРАХ ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

(Представлно академиком А.Н. Колмогоровым 25 IX 1984)

Вопрос о том, что составляет предмет изучения теории алгоритмов, каковы основные методы доказательства в этой теории, ставился давно (см., например, [1, 2]). В связи с этим часто обсуждалось также явление релятивизуемости. В настоящей работе сделана попытка частично ответить на сформулированные вопросы и привести математические утверждения, подтверждающие предлагаемые ответы. При этом мы будем затрагивать только дескриптивную, качественную, теорию алгоритмов, оставляя в стороне метрическую, количественную, теорию алгоритмов (теорию сложности).

Рядом авторов высказывалась точка зрения, согласно которой теория алгоритмов есть теория одного, универсального, алгоритма (см. [2]). Приводимая ниже теорема 1 является точным математическим подтверждением этого тезиса.

В соответствии с тем, что в теории алгоритмов принципиальным является рассмотрение частичных функций, мы также будем рассматривать структуры (алгебраические системы) с частичными операциями, специально этого не оговаривая. Через f_x будем обозначать функцию $\lambda y f(x, y)$, т.е. одноместную функцию, получаемую фиксацией первого аргумента в $f(x, y)$.

Пусть $F(x, y)$ – некоторая главная (гёделева) универсальная функция (см. [3]). Тогда пару $\langle N; F\rangle$ назовем *вычислительной структурой.*

Теорема 1. *Все вычислительные структуры изоморфны.* ■

Заметим, что в теореме 1, конечно, не обязательно требовать, чтобы носителем структуры был натуральный ряд N. В качестве такового можно взять любой ансамбль конструктивных объектов (см. [2]).

Доказательство теоремы 1. Пусть $\langle N; F\rangle$, $\langle N; G\rangle$ – две вычислительные структуры. Утверждение теоремы состоит в существовании такой биекции $h\colon N \to N$, что

$$F(x, y) = z \iff G(h(x),\ h(y)) = h(z).$$

Иначе говоря, при всяком x из N должно быть выполнено

$$F_x = h^{-1} \circ G_{h(x)} \circ h.$$

Пусть имеется произвольная вычислимая биекция. h. Тогда функция H, для которой $H_x = h^{-1} \circ G_x \circ h$, будет главной универсальной функцией. Согласно теореме Роджерса об изоморфизме гёделевых (главных) нумераций (см. [4]), найдется такая вычислимая биекция k, что $F_x = H_{k(x)}$ при всех x. Другими словами, $F_x = h^{-1} \circ G_{k(x)} \circ h$. Мы используем теорему о неподвижной точке для того, чтобы получить k, совпадающее с h.

Чтобы применение теоремы о неподвижной точке стало действительно возможным, мы уточним конструкцию из теоремы Роджерса так, чтобы биекция k строилась по всякой вычислимой функции h (не обязательно биекции). Если при этом h — биекция, то k будет обладать требуемыми свойствами.

Построение k по h. Легко видеть, что по h можно эффективно построить некоторую функцию i, которая окажется обратной к h, если h была биекцией. Так как F и G — главные нумерации, можно найти всюду определенные вычислимые функции u и v, для которых

$$F_{u(x)} = i \circ G_x \circ h, \quad G_{v(x)} = h \circ F_x \circ i.$$

Построим вычислимую биекцию k, для которой из $k(m) = n$ следует, что либо $F_n = i \circ G_m \circ h$, либо $G_m = h \circ F_n \circ i$ (если h — биекция, то i и h взаимно обратны и оба равенства эквивалентны). Биекция k, как и в теореме Роджерса, строится по шагам. На четных шагах мы определяем $k(m)$ для некоторого m, еще не попавшего в область определения k. На нечетных шагах мы определяем $k^{-1}(n)$ для некоторого n, еще не попавшего в область значений k. Именно, $k(m)$ мы принимаем равным $u(m)$, если $u(m)$ не встречается среди уже определенных значений функции k; если же это не так, то отыскиваем такое n, которое не встречается среди этих значений и для которого $F_n = F_{u(m)}$. Это можно сделать, так как по любому номеру функции в главной нумерации можно эффективно указать сколько угодно номеров той же функции. Аналогичным образом $k^{-1}(n)$ определяется как $v(n)$ или любое другое m, для которого $G_m = G_{v(n)}$ и на котором k еще не определена. Итак, биекция k построена.

Если исходная функция h была биекцией, то $i = h^{-1}$, $F_{k(m)} = h^{-1} \circ G_m \circ h$, что нам и требовалось. Теперь применение теоремы о неподвижной точке завершает доказательство теоремы 1.

Естественно возникает вопрос: что будет, если в теореме 1 вместо вычислимости рассматривать относительную вычислимость? Оказывается, все структуры, отвечающие одному и тому же оракулу (или эквивалентным оракулам), изоморфны. Иначе говоря, сама теория 1 релятивизуема.

Назовем А-вычислительной структурой структуру, определение которой получается из определения вычислительной структуры заменой вычислимости на вычислимость с оракулом A.

Можно показать, что при невычислимом A A-вычислительная структура не изоморфна и даже не элементарно эквивалентна вычислительной структуре (без оракула).

Пусть Ф — некоторое свойство структур рассмотренной сигнатуры (с единственной двуместной частичной функцией; мы рассматриваем лишь свойства, устойчивые относительно изоморфизма структур). Тогда в силу теоремы 1 для каждого оракула A либо Ф истинно для всех A-вычислительных структур, либо Ф ложно для них всех. Тем самым возникают три возможности:

(1) Ф истинно для A-вычислительных структур при любом A;

(2) Ф ложно для A-вычислительных структур при любом A;

(3) Ф истинно для одних A-вычислительных структур и ложно для других, с другим A.

В случаях (1) и (2) Ф естественно назвать релятивизуемо истинным или релятивизуемо ложным свойством, а в случае (3) — нерелятивизуемым. Оказывается, либо большинство естественных утверждений теории алгоритмов относится к релятивизуемым свойствам. Мы увидим сейчас, что можно без апелляции к понятию вычислимости отделить релятивизуемо истинные утверждения от релятивизуемо ложных. Для этого нам понадобится Игра, которую мы сейчас определим.

Игра. В игре участвуют 2 игрока — Природа (П) и Математик (М). Каждый из игроков постепенно строит свою структуру вида $\langle N; F\rangle$, где F — частичная функция $N \times N$ в N. (При этом вместо N можно взять любое счетное множество. Строение натурального ряда не используется.) В начале игры $F = \phi$ на каждом шаге происходит доопределение функций в конечном числе точек. Изменять определенные раньше значения функций нельзя. Игроки делают ходы по очереди. Таким образом, правила хода всегда одни и те же, возможные ходы не зависят от ходов противника. Различие между конкретными играми определяется функцией выигрыша (эта функция, как мы увидим, соответствует тому свойству, истинность которого хочет установить Математик). Пусть фиксировано свойство Ф структур рассматриваемого класса. Тогда в Ф-игре выигрывает Природа, если она построила такую функцию ν, а Математик — такую функцию μ, что:

(ВП1) Ф ложна в $\langle N; \nu\rangle$;

(ВП2) существует такое число e, что ν_e всюду определена и для любого x выполнено $\mu_x = \nu_{\nu_e(x)}$.

Как мы видим, от свойства Ф зависит только условие (ВП1), но оно не зависит от μ. Условие (ВП2) означает, что нумерация одноместных функций, построенная Математиком, сводится к нумерации одноместных функций, построенной Природой, причем сама сводящая функция также построена Природой.

Следующее утверждение позволяет отделить релятивизуемо истинные утверждения от релятивизуемо ложных в терминах описанной игры: *если Ф релятивизуемо истинно, то существует выигрышная стратегия для М; если Ф релятивизуемо ложно, то существует выигрышная стратегия для П.*

Это утверждение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Имеют место следующие эквивалентности (B — произвольное множество натуральных чисел; $B \leqslant_T A$ означает разрешимость B относительно A):*

(а) *(свойство Ф выполнено для всех A-вычислительных структур, для которых $B \leqslant_T A$) $\Leftrightarrow$ (существует выигрышная стратегия для М в Ф-игре, вычислимая относительно B);*

(б) *(свойство Ф ложно для всех A-вычислительных структур, для которых $B \leqslant_T A$) $\Leftrightarrow$ (существует выигрышная стратегия для П в Ф-игре, вычислимая относительно B).*

Доказательство теоремы 2 будет дано для разрешимого B; его релятивизация на случай произвольного B проходит обычным образом. Рассмотрим следующую вычислимую стратегию (которой могут пользоваться и М, и П). "Наблюдайте за игрой противника. Стройте себе главную универсальную функцию для функций, вычислимых относительно игры противника (точнее, относительно функции $n \mapsto n$-й ход противника)."

Руководствуясь этой стратегией, П добьется выполнения условия (ВП2), так как построенная М функция будет, разумеется, вычислимой относительно действий М. Поэтому верно (б, $\Rightarrow$). Если подобную стратегию использует М, то П, не желая нарушить условия (ВП2), обязана строить главную универсальную функцию для X-вычислимых функций, где X — игра П, рассматриваемая как оракул (X—вычислимость этой функции очевидна, а главность обеспечивается условием (ВП2), так как М строит главную X-вычислимую функцию). Поэтому выполнено (а,$\Rightarrow$).

Обратные импликации доказываются так.

(б, $\Leftarrow$). Если Ф не выполнено для главных универсальных A-вычислимых функций, то М может обыграть любую вычислимую стратегию П, строя у себя главную универсальную A-вычислимую функцию: так как стратегия П вычислима, то построенная ею функцию будет A-вычислимой и главной для A-вычислимых функций в силу условия (ВП2) (более точно, М должен действовать так, чтобы его действия также были A-вычислимы; это, очевидно, возможно).

(а, $\Leftarrow$). Аналогичным образом, если при каком-то A свойство Ф выполнено, то П обыгрывает любую вычислимую стратегию М, строя главную универсальную A-вычислимую функцию.

Теорема 2 доказана.

В приведенном ниже следствии слова "... для всех достаточно больших A" означают" существует такое множество $B \subset \mathbf{N}$, что... для всех $A \subset \mathbf{N}$, для которых $B \leqslant_T A$".

С л е д с т в и е. *Имеют место следующие эквивалентности: (свойство Ф выполнено для А-вычислительных структур при достаточно больших А)* $\Leftrightarrow$ *(существует выигрышная стратегия для М в Ф-игре); (свойство Ф ложно для А-вычислительных структур при достаточно больших А)* $\Leftrightarrow$ *(существует выигрышная стратегия для П в Ф-игре).*

Отметим, что отсюда и из теоремы о детерминированности борелевских игр вытекает следующий результат (Мартин): если Ф — борелевское свойство, то либо Ф, либо отрицание Ф выполнено для всех A-вычислительных структур при достаточно больших A.

Теорема 2 дает схему доказательства релятивизуемой истинности некоторого свойства: нужно построить вычислимую выигрышную стратегию для М в Ф-игре. Анализ обычных доказательств теории алгоритмов показывает, что большинство их легко укладывается в эту схему, причем основную часть доказательства составляет описание стратегии и проверка того, что она выигрышная; вычислимость ее устанавливается легко.

Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" Академии наук СССР Москва

Поступило 17 XII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972. 624 с. 2. *Успенский В.А., Семенов А.Л.* В кн.: Алгоритмы в современной математике и ее приложениях. Новосибирск, 1982, п. 1. с. 99–342. 3. *Успенский В.А.* Лекции о вычислимых функциях. М., 1960. 492 с. 4. *Rogers H. jr.* – J. Symbolic Logic, 1958, vol. 23, № 3, p. 331–341.