Нижняя оценка, полученная для $\mathbf{M}\ (V \mid J)$ является достаточно точной, так как из результатов работы [5] нетрудно получить, что

$$\mathbf{M}\ (\{x \mid l\ (x) = n,\ \beta_x\ (\alpha) \geqslant \beta\} \mid n,\ \alpha,\ \beta) < \exp_2\ (-\alpha / 2 + c)$$

для некоторой константы c.

Пусть $c_1 = K\ (\mathbf{L})$ (сложность равномерной бернуллиевской меры, c — произвольная положительная константа. Рассмотрим семейство функций $f_x\ (t) = \beta_x\ ((t + c_1)\ c \log_2 n) / n$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, где x — конечная двоичная последовательность длины n. Имеет место

Следствие. *Замыкание* (*в метрике* L_1) *семейства функций* $f_x\ (t)$ *включает в себя все невозрастающие функции, графики которых расположены в единичном квадрате.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шенфилд Дж.* Степени неразрешимости. М.: Наука, 1977, 192 с.
2. *Kolmogorov A. N.* On the logical foundations of probability.— Lect. Notes Math., 1983, B. 1021, S. 1—5. (Русск. перев.: О логических основаниях теории вероятностей.— В кн.: *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986, с. 467—471).
3. *Звонкин А. К., Левин Л. А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов.— Успехи матем. наук, 1970, т. XXV, в. 6, с. 85—127.
4. *Вьюгин В. В.* Алгоритмическая энтропия (сложность) конечных объектов и ее применение к определению случайности и количества информации.— В сб.: Семиотика и информатика. В. 16. М.: ВИНИТИ, 1981, с. 14—43.
5. *Вьюгин В. В.* О нестохастических объектах.— Проблемы передачи информации, 1985, т. XXI, в. 2, с. 3—9.

Поступила в редакцию
17.IV.1987

НИЖНИЕ ПРЕДЕЛЫ ЧАСТОТ В ВЫЧИСЛИМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ И РЕЛЯТИВИЗОВАННАЯ АПРИОРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

МУЧНИК Ан. А.

Для каждой вычислимой последовательности натуральных чисел можно определить меру на $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, считая мерой натурального числа нижний предел его доли в начальных отрезках выбранной последовательности. В настоящей работе устанавливается, что среди построенных таким образом мер существует максимальная (с точностью до мультипликативной константы) и что она совпадает с априорной вероятностью в смысле [1], релятивизованной относительно универсального перечислимого множества $0'$ (о релятивизации см. [2, с. 176]).

Пусть $f\ (0),\ f\ (1), \ldots$ — вычислимая последовательность натуральных чисел. Пусть x — произвольное натуральное число. Рассмотрим последовательность, n-й член которой равен частоте появления x среди первых n членов последовательности f, т. е. количеству тех $k < n$, для которых $f\ (k) = x$, деленному на n. Рассмотрим (для данного x) нижний предел этой последовательности, который будем называть нижней частотой x в последовательности f и обозначать $\mathrm{Freq}_f\ (x)$.

Легко проверить, что сумма всех $\mathrm{Freq}_f\ (x)$ по всем $x \in \mathbf{N}$ не превосходит 1. Сопоставим каждой вычислимой последовательности $f\ (0),\ f\ (1), \ldots$ натуральных чисел меру, определенную на подмножествах натурального ряда, считая мерой одноэлементного множества $\{x\}$ значение $\mathrm{Freq}_f\ (x)$. Приводимая ниже теорема показывает, что среди таких мер существует максимальная (с точностью до мультипликативной константы), и устанавливает ее связь с априорной вероятностью.

Напомним, что априорной вероятностью называется наибольшая с точностью до мультипликативной константы неотрицательная функция p: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}^1$, для которой множество $\{\langle r, x\rangle \mid r \in \mathbf{Q},\ x \in \mathbf{N},\ r < p(x)\}$ перечислимо ($\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел). Существование такой функции доказано в [1]. Это доказательство сохраняет силу, если заменить в определении априорной вероятности «перечислимо» на «перечислимо относительно $0'$». (Перечислимыми относительно $0'$ называются [2, с. 176] множества, являющиеся областью значений функции, вычислимой алгоритмом с оракулом для некоторого перечислимого множества. Здесь «алгоритм с оракулом для множества X» — алгоритм, которому разрешается обращаться к процедуре, дающей ответы на вопрос «$a \in X$?» для любого a.) Заменив в определении априорной вероятности перечислимость на перечислимость относительно $0'$, приходим к понятию релятивизованной относительно $0'$ априорной вероятности, которое и будет использовано.

Теорема. А) *Найдется такая вычислимая последовательность f, что для любой вычислимой последовательности g при некотором $C > 0$ для всех $x \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство*:

$$\mathrm{Freq}_f(x) \geqslant C\,\mathrm{Freq}_g(x)$$

Б) *Для этой последовательности f найдутся такие константы $C_1, C_2 > 0$*, что

$$C_1 p(x) \geqslant \mathrm{Freq}_f(x) \geqslant C_2 p(x),$$

где p — априорная вероятность, релятивизованная относительно $0'$.

Доказательство. Достаточно установить два факта:

1) для всякой вычислимой последовательности f функция $x \mapsto \mathrm{Freq}_f(x)$ перечислима снизу относительно $0'$ (это значит, что множество $\{\langle r, x\rangle \mid r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{N}, r < f(x)\}$ перечислимо относительно $0'$);

2) для всякой перечислимой снизу относительно $0'$ функции $p \geqslant 0$, для которой $\sum_x p(x) \leqslant 1$, существует такая вычислимая последовательность f, что $p(x) \leqslant \mathrm{Freq}_f(x)$ для любого $x \in \mathbf{N}$.

Первый факт устанавливается легко. Достаточно заметить, что свойство $r < \mathrm{Freq}_f(x)$ эквивалентно такому утверждению: «существует такое N, что для всех $k > N$ доля x в начальном отрезке $f(0), \ldots, f(k-1)$ превосходит r», а это утверждение имеет вид $\exists N \forall k R(r, x, N, k)$, где R — разрешимый предикат, и, следовательно, задает множество, перечислимое относительно $0'$.

Для доказательства второго факта нам понадобится вспомогательный результат. Будем называть простым полураспределением на $\mathbf{N}$ функцию $r\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, принимающую неотрицательные значения, отличную от нуля лишь в конечном числе точек, для которой $\sum_x r(x) \leqslant 1$.

Лемма. *Пусть r_k — вычислимая последовательность полураспределений. Тогда существует вычислимая последовательность натуральных чисел $f(0), f(1), \ldots,$ для которой*

$$\mathrm{Freq}_f(x) \geqslant \liminf_k r_k(x).$$

Доказательство. Для каждого k построим конечную последовательность α_k натуральных чисел, для которой частота появления числа x (обозначим ее $r'_k(x)$) больше или равна $r_k(x)$ для всякого $x \in \mathbf{N}$. Последовательность f будет иметь вид

$$\alpha_0 \ldots \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_2 \ldots,$$

где α_k повторяется n_k раз, $k = 0, 1, \ldots$; при этом n_k выбирается настолько большим, чтобы добавление к $\alpha_k \ldots \alpha_k$ любой последовательности натуральных чисел длиной не более $|\alpha_{k+1}| + n_0|\alpha_0| + \ldots + n_{k-1}|\alpha_{k-1}|$ ($|\alpha|$ — длина последовательности α) меняло частоты мало (не более чем на $1/k$).

Рассмотрим произвольный начальный отрезок построенной последовательности. Он имеет вид

$$\alpha_0 \ldots \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \ldots \alpha_{k-1} \beta,$$

где β — некоторое начало последовательности α_k. Образуем из входящих в этот начальный отрезок натуральных чисел две группы: в одной будут числа, входящие в $\alpha_0 \ldots \alpha_0 \ldots \alpha_{k-1} \ldots \alpha_{k-1}\beta$, а во второй — входящие в $\alpha_k \ldots \alpha_k$. В первой группе частоты близки (с точностью до $1/(k-1)$) к r'_{k-1}, во второй равны r'_k. Поэтому частоты во всем начальном отрезке (с точностью до $1/(k-1)$) занимают какое-то среднее положение между r'_{k-1} и r_k. Отсюда легко следует утверждение леммы.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть p — перечислимая снизу относительно $\mathbf{0}'$ неотрицательная функция из $\mathbf{N}$ в $\mathbf{R}^1$. Такая функция может быть представлена в виде предела возрастающей $\mathbf{0}'$-вычислимой последовательности простых полураспределений u_k (например, определим $u_k(x)$ равным 0 при $x \geqslant k$ и $u_k(x)$ = наибольшему из рациональных чисел r, для которых пара $\langle r, x\rangle$ появляется за k шагов $\mathbf{0}'$-перечисления множества $\{\langle r, x\rangle \mid r < p(x)\}$, если $x < k$). Всякая $\mathbf{0}'$-вычислимая функция является пределом стабилизирующейся вычислимой последовательности: $u_k = \lim\limits_s u_{ks}$, где u_{ks} — простое полураспределение, вычислимо зависящее от k и s, причем среди всех u_{ks} при данном k лишь конечное число различных (см. [3, с. 31]). Построим теперь последовательность простых полураспределений, к которой будет применяться лемма. Для каждого s рассмотрим простые полураспределения $u_{1s}, u_{2s}, \ldots, u_{ss}$ и выберем среди них возрастающий начальный отрезок максимальной длины (для которого $u_{1s}(x) \leqslant \ldots \leqslant u_{ts}(x)$ при любом x). В качестве r_s возьмем его последний член u_{ts}.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что если $r < p(x)$, то $r < r_s(x)$ для всех s, кроме конечного числа. В самом деле, если $r < p(x)$, то для некоторого k выполняется неравенство $r < u_k(x)$. Будем следить за $u_{1s}, \ldots, u_{ks}$ при растущем s. Для достаточно больших s они будут равны $u_1, \ldots, u_s$. При этих s (можно считать еще $s > k$) максимальный возрастающий отрезок будет содержать $u_{1s}, \ldots, u_{ks}$ (поскольку последовательность u_i возрастает), и, следовательно, $r_s(x) \geqslant u_{ks}(x) > r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вьюгин В. В.* Алгоритмическая энтропия (сложность) конечных объектов и ее применение к определению случайности и количества информации.— В сб.: Семиотика и информатика. В. 16. М.: ВИНИТИ, 1981, с. 14—43.
2. *Роджерс X.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир. 1972, 624 с.
3. *Шенфилд Дж.* Степени неразрешимости. М.: Наука. 1977, 192 с.

Поступила в редакцию
17.IV.1987

О ВРЕМЕНИ РАБОТЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА, НЕ ДОПУСКАЮЩИХ ОШИБКИ

ФРЕЙВАЛД Р. В.

Вероятностные машины Тьюринга отличаются от детерминированных машин Тьюринга (определение см. [1]) лишь тем, что вероятностные машины могут на каждом шаге работы использовать выходное значение датчика случайных чисел, выдающего значения $\{0, 1\}$ равновероятно и независимо от значений, выданных в другие моменты.

Используется следующее определение распознавания языка на вероятностной машине за время $t(x)$ с вероятностью p. Требуется, чтобы для любого входного слова x с вероятностью, не меньшей, чем p (где p — фиксированное число строго большее $^1/_2$), произошло следующее событие: машина останавливается за время, не превышающее $t(x)$, и выдает правильный результат. В частности, если x принадлежит данному языку, то с вероятностью $\geqslant p > {}^1/_2$ выдается результат «принадлежит» (притом выдается не более чем за $t(x)$ шагов), а результат «не принадлежит», различные нестандартные виды результата, а также безрезультатная работа машины в течение конечного или бесконечного времени имеют суммарную вероятность $\leqslant 1 - p < {}^1/_2$.