ТЕОРЕМА. Двумерная модель действительных алгебраических чисел со сложением и умножением несамовыразима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать только предикаты $P(x,y)$, являющиеся всюду определенными непрерывними функциями y от x и записывать их как $P(x)$. Пусть все алгебраические числа разбиты на подряд идущие отрезки, и на каждом отрезке функция $P(x)$ задана некоторым многочленом от x с алгебраическими коэффициентами. Будем называть функцию $P(x)$ конечно-многочленной, если количество точек x, справа и слева от которых P задается различными многочленами, конечно, в противном случае назовем P бесконечно-многочленной. Очевидно, что конечно-многочленная P задает выразимый предикат, а бесконечно-многочленная — невыразимый. Поэтому, достаточно показать, что не существует формулы F, в бескванторной части которой стоит полином от $x_1,\ldots,x_n,P(x_1),\ldots,P(x_n)$,и такой, что при подстановке вместо P любой конечно-многочленной функции, F становится истинной, а бесконечно-многочленной — ложной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дан набор функций от переменных $x_1,\ldots,x_n$, каждая из которых задана многочленом от $x_1,\ldots,x_n,P(x_1),\ldots,P(x_n)$, где P — конечно или бесконечно-многочленная функция. Тогда 1-диаграммой данного набора при фиксированных $x_2,\ldots,x_n$ назовем последовательность наборов знаков (плюс, минус или ноль) значений многочленов данного набора в том порядке, в каком эти наборы встречаются при изменении x_1 от $-\infty$ до $+\infty$. Назовем m-диаграммой (при фиксированных $x_n,\ldots,x_{m+1}$) последовательность $(m-1)$ диаграмм в том порядке, в каком они встречаются при изменении x_m от $-\infty$ до $+\infty$. m-диаграммой по линии называется последователтность $(m-1)$ диаграмм, возникающая, когда переменные $x_n,\ldots,x_m$ а также коэффициенты в многочленах функции P, изменяются в соответствующем пространстве по непрерывной линии.

Очевидно, достаточно доказать следующее : для данного набора M многочленов от $x_1,\ldots,x_n,P(x_1),\ldots,P(x_n)$ существуют такие конечно и бесконечно-многочленные функции, при подстановке которых вместо P набор M имеет одинаковую n-диаграмму. ————————————————————————- Будем считать функцию P конечно-многочленной и имеющей степень гладкости $n-1$, а степень определяющих ее многочленов n. Кроме того, считаем, что $P(x)=0$, если $x\leq 0$. Обозначим $P(y)=a_n(y)y^n+a_{n-1}(y)y^{n-1}+\ldots+a_1(y)y+a_0(y)$. Здесь запись $a_i(y)$ показывает, что коэффициент a_i не константа, а ступенчатая функция, зависящая от y. Опишем те значения x_m, в которых происходит смена $(m-1)$-диаграммы в m-диаграмме. Будем вести описание индуктивно в порядке увеличения m. Пусть m=1. Тогда, очевидно, значения $x_n,\ldots,x_1$, в которых меняется 0-диаграмма на любой непрерывной линии в $x_n,\ldots x_1$ есть те значения, в которых какой-либо многочлен из M становится равным нулю или перестает быть равным нулю. Заметим, что все пространство переменных $x_1,\ldots,x_n$ разбито на области, в которых любой многочлен g из M определен многочленом p с постоянными коэффициентами и любая точка $x_1,\ldots,x_n$, в которой g меняет знак, является и точкой, в которой многочлен p, соответствующий области точки $x_1,\ldots,x_n$ тоже меняет знак. Мы описали точки смены диаграммы для $m = 1$. Пусть для некоторого m следующим образом описаны все возможные значения x_{m-1} смены $(m-2)$-диаграммы.

Есть конечное число систем из конечного числа многочленов, приравненных к нулю. Каждый многочлен может содержать переменные $x_n, \dots, x_{m+1}, x_m, y$, где y есть либо x_{m-1}, либо одна из некоторого конечного множества переменных $y_1, \dots, y_i$. В записи многочлена также могут пртсутствовать коэффициенты $a_j(x_{m-1})$ и $a_j(y_i)$ и функции $P(x_n), \dots, P(x_m)$. Если для переменной y_i нет многочлена, в котором она нетривиально присутствует (присутствие y в $a_j(y)$ не учитывается), то значения $a_j(y_i)$ считаем постоянными и равными $a_j(y_i)$ для y_i из самого правого полуотрезка (компоненту y_i в решении системы можно считать равной бесконечности). Выполняются следующие условия :

1) Для любой системы S ее решение в пространстве всех переменных, которые нетривиально присутствуют в многочленах системы S, есть объединение конечного числа поверхностей без края гладкости $n - m$.

2) Вдоль любой непрерывной линии в пространстве переменных $x_n, \dots, x_m, x_{m-1}, A$ $(m-2)$-диаграмма может меняться только в точках появления или исчезновения на этой линии проекции решения какой-либо из имеющихся систем. (Здесь A означает непрерывное изменение коэффициентов a_j на одном отрезке с сохранением гладкости функции P).

Очевидно, для случая $m = 1$ эти условия выполняются. Очевидным следствием этих условий является то, что, как и в случае $m = 1$, появление (исчезновение) проекции решения некоторой системы совпадает с появлением (исчезновением) решения системы многочленов с постоянными коэффициентами, соответствующей той области, в которой находится точка появления (исчезновения) решения (будем называть такую систему фрагментом системы S).

Составим теперь соответствующие системы, описывающие значения x_m смены $(m-1)$-диаграммы. Пусть есть непрерывная линия в пространстве $x_n, \dots, x_m, A$. Из условий 1),2) и того что корни многочленов непрерывно изменяются, с изменением коэффициентов легко следдует, что $(m-1)$-диаграмма может меняться только в следующих чтырех случаях :

1. Исчезновение или появление решения фрагмента некоторой системы, произошедшее в области, соответствующей этому фрагменту.

2. Уход решения фрагмента некоторой системы на бесконечность, или появление его из бесконечности по соответствующей области.

3. Начало или конец совпадения координаты x_{m-1} двух решений двух фрагментов одной или разных систем, где каждое решение находится в области, соответствующей своему фрагменту.

4. Некоторый многочлен некоторого фрагмента становится или перестает быть нулевым.

Опишем новые системы, охватывающие эти случаи.

1.Случай 1 характеризуется тем, что при некотором значении x_m в некотором корне многочлена из какого-либо фрагмента производная этого многочлена тоже равна нулю. Для каждой системы и каждого многочлена этой системы делаем следующее. Систему $p(x_n, \dots, x_m, y) = 0, p'_y(x_n, \dots, x_m, y) =$

0 решаем относительно x_m и y, чтобы получить системы, в которых каждое уравнение не содержит либо x_m либо y. Исключение переменных производим стандартным способом эквивалентных преобразований с рассмотрением случаев равенства нулю коэффициентов, причем нулевые коэффициенты не будут присутствовать в многочленах. После разделения x_m и y используем уравнения с x_m для отделения x_m от y_iв других уравнениях системы. В процессе разделения может возникнуть ситуация, когда одно или оба уравнения преобразуемой системы не содержат ни x_m ни y. Если при этом одно уравнение содержит и x_m и y, то легко видеть, что это уравнение вместе с другими уравнениями данной системы определяет подповерхность (возможно, с краем) исходной поверхности, имеющую ту же степень гладкости во внутренних точках, что и исходная поверхность. Понятно, что для выявления оставшихся невыявленными точек смены диаграммы мы можем повторить всю описанную процедуру со взятием производной, беря в качестве исходной получившуюся поверхность. Так мы продолжаем до тех пор, пока все варианты не дадут нам уравнения без одной из переменных. В случае, когда в некоторой новой системе любая из переменных $x_{m-1}, y_1, \dots, y_i$, входившая в старую систему, входит и в некоторое уравнение новой системы, нетрудно понять, что поверхность, задаваемая новой системой, является подповерхностью без края старой поверхности и имеет степенть гладкости не более чем на 1 меньше степени гладкости старой поверхности. Если же некоторая переменная y исчезает, то это означает, что соответствующий многочлен становится тождественно равным нулю (случай 4). Из геометрических соображений и условия 1) легко видеть, что в этом случае возможны лишь два варианта : либо при данном x_m обнуляются все фрагменты соответвущей системы и тогда мы считаем y бесконечным, а коэффициенты $a_j(Y)$ равными коэффициентам самого правого фрагмента , либо данная точка смены диаграммы описывается соседним фрагментом, причем там y не исчезает.В последнем случае новую систему отбрасываем.

2. Случай 2 характеризуется, очевидно, тем, что старший коэффициент при стремящейся к бесконечности координате y во всех многочленах некоторой системы обращается в ноль. Таким образом, мы уравнения $p(x_n, \dots, x_m, y) = 0$ заменяем на уравнения $p_1(x_n, \dots, x_m) = 0$, где p_1 - коэффициент при наибольшей степени y в p, а дальше разделяем переменные так же, как в случае 1. Переменная y исчезает, она считается бесконечной.

3. В случае 3 для двух систем, в одной из которых имеется уравнение $p_1(x_n, \dots, x_m, y) = 0$, а в другом $\mathrm{p}_2(x_n, \dots, x_m, x_{m-1}) = 0$ состовляем систему $p_1 = 0, p_2 = 0$, затем разделяем в ней переменные x_m и x_{m-1} так же, как в случае 1. После этого все переменные y_iв двух системах расщепляем : вместо y_i в одной системе ставим y_i^1, а в другой y_i^2. Затем разделяем по отдельности в каждой системе y_i^j и x_m так же, как в случае 1.

4.Случай 4 уже был учтен в пункте 1.

Итак, мы получили новые системы уравнений, описывающих точки смены $(m-1)$-диаграммы по линии в $x_n, \dots, x_m$. Выполнение условий 1) и

2) очевидно из геометрических соображений.

Для бесконечно-многочленной функции P процедура описания точек смены диаграммы отличается, очевидно, лишь в случае 2. Однако, когда длина соседних отрезков быстро растет, а изменение коэффициентов многочленов, задающих P, быстро уменьшается, то, очевидно, вместо значений $a_j(y)$ на самом правом отрезке нужно взять предельное значение a_j.

Итак, в конце у нас получилось описание значений x_nсмены $(n-1)$-диаграммы в виде систем многочленов. По построению считаем, что коэффициенты при переменных (многочлены только от $a_j(y_i)$) отличны от нуля. При заданной конечно-многочленной функции P каждая система определяет возможные точки смены $(n-1)$-диаграммы набора M как проекции на ось x_n решений этой системы в своем для каждой системы пространстве конечных переменных, то есть тех, которые нетривиально входят в некоторый многочлен. При этом, если переменная y не входит в это пространство, то коэффициенты $a_j(y)$ считаются равными коэффициентам самого правого многочлена в определении функции P.

Будем по шагам строить последовательность конечно-многочленных функций, изменяя ненамного на каждом шаге самый правый многочлен, начиная с некоторого достаточно далекого места. При этом n-диаграмма набора M не будет меняться, а точки x_n смены $(n-1)$-диаграммы будут сдвигаться на малую величину. Тогда, как следует из нашего построения, предельная бесконечно-многочленная функция даст для набора M ту же диаграмму. Опишем один шаг этого процесса. Рассмотрим пространство конечных переменных произвольной системы S. Перед очередным шагом оно разбито на прямоугольные области (ограниченные и неограниченные), где в одной области все $a_j(y_i)$ не меняются. Назовем типом области информацию о том, по каким переменным она ограничена (такие переменные будем называть отрезочными), по каким неограничена (назовем такие переменные лучевыми) и по каким парам переменных ее проекция на соответствующие оси дает одинаковые отрезки. Для каждого многочлена от коэффициентов a_j все типы областей делятся на те, где он становится тождественно равным нулю, если положить $a_j(y_i) = a_j(y_k)$ для пар (y_j, y_k) одного типа, и те, где он после такого преобразования не равен тождественно нулю. С перваго же шага будем выбирать коэффициенты a_j так, чтобы все нужные нам ненулевые выражения от a_j(из построения будет видно какие) были не равны нулю.

Решения систем состоят из решений фрагментов этих систем в областях, соответствующих фрагментам. Возьмем достаточно большое K, в частности такое, чтобы все конечные координаты решений всех систем оказались меньше его. На луче от K до $+\infty$ мы должны изменить многочлен, определяющий P. При этом прежние неограниченные области пространства каждой системы разделятся на несколько областей. Мы стремимся к тому, чтобы имеющиеся решения систем сместилмсь на малую величину, а новых решений не появилось. Очевидно, что в областях, тип которых не изменился по сравнению с типом старой области, в которую входила новая область раньше, все решения систем смещаются мало при малом изменении коэффициентов (мы выбирали a_i так, чтобы коэффициенты и их комбинации, обеспечивающие отсутствие кратных корней, были ненулевыми; смещение происходит только за счет изменения $a_j(y_i)$ для отсутствующих(бесконечных)y_i). Новых решений в таких областях не появится , так как решения всех тех систем, которые потенциально могли бы иметь решения в областях данного типа, останутся (немного сдвинувшись) в тех же областях, в которых и были.

В области, тип которой изменяется, некоторые координаты из лучевых становятся отрезочными, при этом у координат, остающихся лучевыми, изменяются (но одинаково) коэффициенты a_i. ти коэффициенты становятся в общем случае не равными коэффициентам при отрезочных координатах. Пусть y - одна из координат, превращающихся из лучевых в отрезочные. Изменим функцию $P(y)$ на луче $[K, +\infty[$ следующим образом. Прибавим к правому многочлену $p(y)$ многочлен, полученный из многочлена $(y-K)^n$, добавлением при каждом члене вида $c * K^k x^{n^-k}$, где $k > 0$, коэффициента ϵ^{m*k}, где m достаточно велико, ϵ достаточно мало, а при члене x^n - коэффициента ϵ. Чтобы уточнить ϵ и m заметим, что при $\epsilon 0$ коэффициенты $a_k(y_i)$, где y_i остается лучевой, стремятся к коэффициентам $a_k(y)$ и стремятся одинаково. В коэффициентах некоторого многочлена p рассматриваемой системы, нетривиально содержащего y, пробуем положить $a_k(y) = a_k(y_i) = a_k$ для всех остающихся лучевыми y_i. Те коэффициенты многочлена p, которые при этом не обнулились, оставляем без изменений, а в тех, которые обнулились, выносим разность $a_k(y_i) - a_k(y)$ за скобки. Так делаем для всех k(возможно для одного k несколько раз) до тех пор, пока процесс не стабилизируется. После этого, все вынесенные разности $a_k(y_i) - a_k(y)$ заменим на $c * K^{n-k} * \epsilon^{m(n-k)}$(при $k \neq n$) или на ϵ(при $k = n$). В полученном выражении сократим сначала все произведения $K * \epsilon$, а затем сократим ϵ. Так как максимальная степень коэффициентов $a_k(y)$ определяется набором M, то, очевидно, что при достаточно большом m в тех коэффициентах получившагося выражения, где есть множитель K, есть и множитель ϵ. При $\epsilon 0$ эти коэффициенты стремятся к нулю, а корни полученного выражения стремятся к корням многочлена p', получающегося из данного выражения отбрасываноем всех членов с множителем ϵ. Многочлен p' мы с самого начала можем отнести к числу тех, у которых коэффициенты, начиная с некоторого шага, ненулевые и меняются мало. При $\epsilon 0$ координаты y у решений системы будут стремится к корням многочлена p' и, начиная с некоторого шага, будут при малом ϵ выходить за пределы отрезка изменения координаты y в данной области. При этом, очевидно, все решения системы покинут рассматриваемую область, и в ней новых решений не появится. Теорема доказана.