ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

Ан. А. Мучник, С. Е. Посицельский

Начиная с Э. Л. Поста [12], специалистов по теории алгоритмов интересовала возможность построения "естественного" класса перечислимых неразрешимых множеств, который был бы не пуст и целиком состоял бы из неполных по Тьюрингу множеств. Оказалось, однако, что предлагавшиеся в качестве кандидатов классы простых, гиперпростых, гипергиперпростых и даже максимальных множеств содержат полные по Тьюрингу множества.

Естественный класс для проблемы Поста был впервые построен А. Н. Дегтевым и С. С. Марченковым (в 1973 году Дегтев [2] доказал непустоту класса, в 1976 году Марченков [5] доказал, что в этом классе нет полных множеств). В 1985 году М. М. Арсланов [1] построил еще один пример естественного класса. В примерах Дегтева–Марченкова и Арсланова используется введенное К. Джокушем [8] в 1968 году понятие полуразрешимого множества. Для каждого из этих классов доказательства довольно сложны, особенно доказательства непустоты класса.

В настоящей статье вводится свойство перечислимых множеств, называемое упругостью. Это свойство является (слабой) эффективизацией исследованного А. А. Мучником [6] и Г. Н. Кобзевым [3] понятия r-отделимости. Оказывается, что перечислимые *полуразрешимые не упругие* множества неразрешимы и не полны по Тьюрингу. Этот класс целиком содержит классы Дегтева–Марченкова и Арсланова, и, в отличие от них, содержит представителей всех промежуточных перечислимых степеней неразрешимости.

Тот же класс можно описать иначе. Для этого вводится понятие слабо творческого множества. Класс перечислимых полуразрешимых неупругих множеств совпадает с классом перечислимых *полуразрешимых неразрешимых не слабо творческих* множеств.

Не определяемые в дальнейшем изложении понятия можно найти в монографии [13].

Определение (А. А. Мучник, 1956). Перечислимое множество A называется *r-отделимым*, если для любого перечислимого множества B, которое не пересекается с A, существует разрешимое множество C, которое отделяет A от B (т.е. $A \subset C$ и $B \cap C = \varnothing$).

К классу r-отделимых множеств, очевидно, относятся разрешимые множества и простые множества. М. Куммер и Ф. Стефан [10] доказали, что перечислимые частотно разрешимые (и, в частности, перечислимые полуразрешимые) множества являются r-отделимыми. Кобзев [3] доказал, что перечислимое множество, btt-сводящееся к r-отделимому, является r-отделимым. Следовательно, btt-полные множества не являются r-отделимыми. Последнее утверждение можно усилить.

Теорема 1. *Никакое r-отделимое множество не является bT-полным (bT-сводимостью мы называем сводимость с оракулом, который отвечает на ограниченное число вопросов).*

Интересно отметить, что для bT-сводимости не справедлив аналог теоремы Кобзева, то есть из того, что перечислимое множество bT-сводится к r-отделимому, вообще говоря, не следует, что оно является r-отделимым. Теорема 1 является усилением теоремы Поста о том, что простое множество не может быть btt-полным.

Следующее определение строится по традиционной для общей теории алгоритмов схеме эффективизации.

Определение 1. Перечислимое множество A называется *эффективно r-отделимым*, если по каждой программе, перечисляющей какое-нибудь множество B, не пересекающееся с A, можно эффективно построить программу, разрешающую множество C, которое отделяет A от B.

Теорема 2. *Класс эффективно r-отделимых множеств совпадает с классом разрешимых множеств.*

Более продуктивной оказалась ослабленная эффективизация понятия r-отделимости.

Определение 2. Перечислимое множество A называется *упругим*, если по каждой программе, перечисляющей какое-нибудь множество B, не пересекающееся с A, можно эффективно построить программу, перечисляющую разрешимое множество C, которое отделяет A от B.

Про алгоритм, который по программе перечисления B строит программу перечисления C, мы будем говорить, что он обеспечивает упругость A.

Примером упругого неразрешимого множества может служить надграфик функции Колмогоровской энтропии (введенной в работе [4]). В 1996 году Куммер [9] доказал, что надграфик функции энтропии не является частотно разрешимым.

Теорема 3. а) *Класс r-отделимых множеств замкнут относительно объединения, пересечения и прямого произведения.*

б) *Класс упругих множеств эффективно замкнут относительно объединения, пересечения и прямого произведения (т.е. по алгоритмам, обеспечивающим упругость двух множеств, эффективно строятся алгоритмы, обеспечивающие упругость их объединения, пересечения и прямого произведения).*

Определение 3. Перечислимое множество A называется *слабо творческим*, если по каждой программе, перечисляющей какое-нибудь множество B, не пересекающееся с A, можно эффективно построить программу, перечисляющую множество C, которое строго содержит A и не пересекается с B.

Легко заметить, что неразрешимое упругое множество является слабо творческим.

По теореме Майхилла [11], каждое творческое множество является m-полным.

Теорема 4. *Каждое слабо творческое множество является T-полным.*

Следствие. *Каждое упругое множество или разрешимо, или T-полно.*

Определение (К. Джокуш, 1968). Множество называется *полуразрешимым*, если оно вычислимо изоморфно начальному отрезку некоторого разрешимого линейного порядка.

Из конструкции Дж. Деккера [7] 1954 года следует, что во всех перечислимых степенях неразрешимости есть перечислимые полуразрешимые множества.

Теорема 5. *Каждое перечислимое полуразрешимое T-полное множество является упругим (и, тем более, слабо творческим).*

Теоремы 4 и 5 позволяют выделить среди перечислимых полуразрешимых множеств в точности те, которые не являются T-полными.

Авторы признательны участникам Колмогоровского семинара кафедры математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета, с которыми всегда могли обсуждать данную научную тему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Арсланов М. М. // Матем. заметки. 1985. Т. 38. №6. С. 872–874. [**2**] Дегтев А. Н. // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. №2. С. 143–161. [**3**] Кобзев Г. Н. // Исследования по матем. логике и теории алгоритмов. Тбилиси: Тбилисский ун-т, 1975. С. 19–30. [**4**] Колмогоров А. Н. // Пробл. передачи информ. 1965. Т. 1. №1. С. 3–11. [**5**] Марченков С. С. // Матем. заметки. 1976. Т. 20. №4. С. 473–478. [**6**] Мучник А. А. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. С. 29–32. [**7**] Dekker J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. V. 5. P. 791–796. [**8**] Jockush C. G. // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. P. 420–436. [**9**] Kummer M. // 13-th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 1996. Lecture Notes in Computer Science. V. 1046. P. 25–36. [**10**] Kummer M., Stephan F. // Information and Computation. 1995. V. 120. P. 59–77. [**11**] Myhill J. // Z. Math. Logik Grundl. Math.. V. 1. P. 97–108. [**12**] Post E. L. // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 284–316. [**13**] Роджерс Х., мл. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

Институт новых технологий образования, Москва

Принято редколлегией
23.04.1999