А. Шень

Вероятность: примеры и задачи

Издание четвёртое, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2016

ББК 22.1
Ш47

Шень А.

Ш47 Вероятность: примеры и задачи. — 4-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2016. — 72 с.

ISBN 978-5-4439-0920-2

На примерах излагаются первые понятия теории вероятностей (вероятность события, правила подсчёта вероятностей, условная вероятность, независимость событий, случайная величина, математическое ожидание, дисперсия).

Брошюра рассчитана на читателей, свободно оперирующих с дробями и процентами.

Предыдущее издание книги вышло в 2012 г.

ББК 22.1

Оригинал-макет предоставлен автором.

Автор благодарен Ю. Н. Тюрину, А. А. Макарову, И. Р. Высоцкому и И. В. Ященко, без которых эта брошюра никогда не была бы написана.

Рецензент и редактор Николай Александрович Яковлев

Научно-популярное издание

Александр Шень

Вероятность: примеры и задачи.

Подписано в печать 20.01.2016 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4,5. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в «Академиздатцентр „Наука“ РАН», ОП Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ» — «Наука», 140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403. Тел./факс: (495) 554–21-86, (495) 554–25–97, (495) 974–69–76.

ISBN 978-5-4439-0920-2

1. Вероятность в природе

Никто не умеет предсказывать, какой стороной («орлом» или «решкой») упадёт монета при игре в орлянку. Но опыт показывает, что если бросать монету много раз, то орлов и решек будет примерно поровну. Точно так же никто не может предсказать, сколько очков выпадет при бросании игральной кости. (Игральная кость — кубик; на каждой грани выбито точками число очков, от единицы до шестёрки.) Но опыт показывает, что в длинной серии из N бросаний все цифры встречаются примерно поровну (каждая — примерно $N/6$ раз).

$\boxed{\mathbf{1}}$ В игре бросают кубик; выигрышем считается выпадение пятёрки или шестёрки. Сколько (примерно) выигрышей будет в длинной серии из N игр?

$\triangleright$ На долю каждой цифры приходится примерно одна шестая всех бросаний. Значит, на долю выигрышных цифр (пятёрка и шестёрка) придётся примерно две шестых, то есть $1/3$ всех бросаний. $\triangleleft$

Как говорят, *вероятность* выигрыша в этой игре равна $1/3$ («шанс выиграть — один из трёх», «мы выигрываем примерно каждый третий раз» и т. п.)

$\boxed{\mathbf{2}}$ В мешке лежит десять бумажек с надписями $0, 1, 2, \ldots, 9$. Из мешка наудачу вытаскивают одну из бумажек, смотрят на число и возвращают обратно. (После этого бумажки перемешивают и опыт повторяют.) Считая, что все цифры будут встречаться примерно одинаково часто, определите, в какой доле случаев будет вытащено:

(а) чётное число;

(б) число, делящееся на 3;

(в) число, делящееся и на 2, и на 3;

(г) число, не делящееся ни на 2, ни на 3.

$\triangleright$ На каждую из десяти цифр приходится примерно 10% (одна десятая) всех опытов. Чётные цифры: $0, 2, 4, 6, 8$. Их пять, значит, на их долю придётся примерно $50\% = 5/10 = 1/2$ случаев. На три делятся цифры $0, 3, 6, 9$. На их долю придётся $40\% = 4/10 = 2/5$ случаев. И на два, и на три делятся только две цифры: 0 и 6. На их долю приходится $20\% = 2/10 = 1/5$ случаев. Наконец, не делятся ни на 2, ни на 3 такие цифры: $1, 5, 7$. На их долю приходится $30\% = 3/10$ всех случаев. $\triangleleft$

2. Математическое определение вероятности

Приведённые задачи следовали такой схеме. Рассматривается опыт, который может иметь несколько *исходов*. Например, бросание монеты имеет два исхода (орёл и решка), бросание кубика имеет шесть исходов (цифры от 1 до 6), вытаскивание бумажки с цифрой имеет десять исходов (от 0 до 9).

Некоторые из этих исходов объявлены *благоприятными*. (В примерах: выпала пятёрка или шестёрка; вынута цифра, делящаяся на 3, и т. п.)

Мы предполагаем, что в длинной серии опытов все исходы встречаются примерно поровну. Исходя из этого, мы подсчитываем, в какой доле случаев (примерно) исход будет благоприятным. Пусть всего исходов n, а благоприятных исходов k. Тогда на каждый исход приходится примерно $1/n$ всех случаев, и благоприятный исход будет примерно в k/n всех случаев.

Определение. *Вероятностью* называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

Вероятность любого события заключена между нулём и единицей. Вероятность равна нулю, если благоприятных исходов нет вовсе (*невозможное* событие). Вероятность равна единице, если все исходы благоприятны (*достоверное* событие).

3. Подсчёты

$\boxed{3}$ Бросают два кубика: красный и синий. Считая все комбинации цифр на красном и синем кубиках равновозможными, определите вероятность того, что цифры на красном и синем кубиках будут одинаковы.

▷ Подсчитаем общее количество исходов (комбинаций цифр). На красном кубике может быть любая цифра от одного до шести. Для каждого из этих вариантов есть шесть вариантов цифры на синем кубике. Скажем, если на красном кубике выпала тройка, то возможны варианты

$$(3,1) \quad (3,2) \quad (3,3) \quad (3,4) \quad (3,5) \quad (3,6)$$

(мы записываем сначала цифру на красном кубике, а потом на синем). Всего, таким образом, будет $6\times 6 = 36$ комбинаций (исходов). Их можно изобразить в виде таблицы:

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

По условию благоприятны из них те, где на обоих кубиках выпала одна и та же цифра. Их шесть и стоят они на диагонали таблицы:

$$(1,1) \quad (2,2) \quad (3,3) \quad (4,4) \quad (5,5) \quad (6,6)$$

Таким образом, доля благоприятных исходов (искомая вероятность) составляет 6 из 36, то есть 1/6. ◁

4 В том же опыте (бросание красного и синего кубика) подсчитывают сумму очков, выпавших на обоих кубиках. Какая из сумм будет наиболее вероятной?

▷ Минимальная сумма равна 2 (две единицы), максимальная равна 12 (две шестёрки). Нужно подсчитать, во скольких из 36 случаев (см. решение предыдущей задачи) появляется каждая из сумм от 2 до 12. Это удобно сделать с помощью таблицы. В каждой из клеток запишем сумму очков:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Видно, что суммы идут по диагоналям, и чаще всех (6 раз из 36) встречается сумма 7. Она стоит на самой длинной из диагоналей. Ответ: наибольшую вероятность имеет сумма 7. ◁

5 Какая сумма (в предыдущей задаче) имеет большую вероятность: 3 или 10? во сколько раз?

▷ Сумма 3 встречается в таблице два раза (на красном кубике одно очко, на синем два — или наоборот). Вероятность её будет 2/36. Сумма 10 встречается три раза ($4+6$, $5+5$ и $6+4$), её вероятность будет 3/36. Поэтому вероятность суммы 10 в полтора раза больше, чем вероятность суммы 3. ◁

Ответ к этой задаче не означает, что в конкретной серии опытов сумма 10 обязательно встретится чаще, чем сумма 3. Мы утверждаем лишь, что *если* в серии опытов все 36 вариантов встречаются примерно поровну, то вариантов с суммой 10 будет примерно в полтора раза больше, чем вариантов с суммой 3.

То, что в длинных сериях опытов так обычно и бывает — факт экспериментальный, не относящийся к математике.

6 Наудачу выбирают число от 1 до 20. Считая все двадцать вариантов равновозможными, определите вероятность того, что выбранное число:

(а) чётно;
(б) делится на 3;
(в) делится и на 2, и на 3;
(г) не делится ни на 2, ни на 3;
(д) имеет сумму цифр 9;
(е) имеет сумму цифр, делящуюся на 3.

4. Подсчёты: продолжение

В следующих задачах число исходов довольно велико, и выписать все их в таблицу затруднительно. Но можно их подсчитать, не выписывая.

$\boxed{7}$ Опыт состоит в одновременном бросании четырёх кубиков (красного, синего, зелёного и жёлтого). Найдите вероятность того, что
(а) выпадут четыре шестёрки;
(б) выпадут три шестёрки и одна пятёрка;
(в) выпадут две шестёрки и две пятёрки;
(г) выпадет ровно одна шестёрка;
(д) выпадут четыре разные цифры;
(е) не выпадет ни одной шестёрки;
(ё) выпадет хотя бы одна шестёрка.

▷ Прежде всего нужно понять, какие в этом опыте возможны исходы и сколько их. Для этого надо научиться их записывать. Договоримся о порядке цветов (скажем, красный, жёлтый, зелёный, синий — как в радуге), в котором будем записывать цифры на кубиках. Тогда исход опыта записывается в виде четырёх чисел от одного до шести. Скажем, запись $(5, 1, 6, 5)$ означает, что на красном кубике выпала пятёрка, на жёлтом единица, на зелёном шестёрка и на синем пятёрка. Выпадение четырёх шестёрок записывается как $(6, 6, 6, 6)$ и т. д.

Посчитаем общее число исходов. На первом месте может стоять любая из шести цифр. Каждая из них сочетается с шестью цифрами на втором месте. Получается 6×6 комбинаций, которые могут стоять на первых двух местах. Каждая из комбинаций сочетается с шестью цифрами на третьем месте. Получается $6 \times 6 \times 6$ комбинаций на первых трёх местах. Добавляя к каждой из них одну из шести цифр на четвёртом месте, получим $6\times6\times6\times6 = 6^4$ исходов.

Остаётся подсчитать количество благоприятных исходов для каждого из пунктов.

(а) Благоприятный исход один: $(6, 6, 6, 6)$. Вероятность $1/6^4$.

(б) Благоприятных исходов четыре: пятёрка может стоять на любом из четырёх мест. Вот эти исходы:

$$(5,6,6,6) \quad (6,5,6,6) \quad (6,6,5,6) \quad (6,6,6,5)$$

Вероятность: $4/6^4$.

(в) Здесь нужно выбрать два места из четырёх, на которых должны стоять пятёрки. Это можно сделать шестью способами. В самом деле, если на первое место поставить пятёрку, то для второй пятёрки остаётся три возможности. Получается три варианта:

$$(5,5,6,6) \quad (5,6,5,6) \quad (5,6,6,5)$$

Если на первое место поставить шестёрку, то на три оставшихся места претендуют две пятёрки и одна шестёрка, и возникают ещё три варианта:

$$(6,5,5,6) \quad (6,5,6,5) \quad (6,6,5,5)$$

Итак, всего вариантов 6, и вероятность равна $6/6^4 = 1/6^3$.

(г) Надо подсчитать число вариантов, где ровно одна шестёрка. Эта шестёрка может стоять на любом из четырёх мест, поэтому все варианты делятся на четыре группы. Подсчитаем число вариантов в каждой группе. Пусть, скажем, шестёрка стоит на первом месте. Тогда на три оставшихся места можно поставить любую из пяти цифр (кроме шестёрки), так что есть 5^3 вариантов. Общее число вариантов: $4 \cdot 5^3$. Вероятность: $4 \cdot 5^3/6^4$.

(д) Подсчитаем число вариантов, где все четыре цифры разные. На первом месте может стоять любая из шести цифр. В каждом из шести случаев для второго места есть пять возможностей (кроме той цифры, что на первом месте). Каждая из этих возможностей сочетается с четырьмя цифрами на третьем месте (кроме тех двух, что уже использованы), и затем для последнего места есть три возможности. Число вариантов: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Вероятность: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3/6^4 = 5/18$.

(е) На каждом из четырёх мест может стоять любая из пяти цифр (кроме шестёрки), поэтому число вариантов 5^4. Вероятность: $5^4/6^4 = (5/6)^4$.

(ё) Здесь проще всего заметить, что все исходы делятся на две категории: где есть хоть одна шестёрка и где нет ни одной шестёрки. Исходы второй категории мы уже подсчитали, их 5^4. Поэтому в первой категории $6^4 - 5^4$. Вероятность: $(6^4 - 5^4)/6^4 = 1 - (5/6)^4$. ◁

$\boxed{8}$ В очередь в случайном порядке становятся четыре человека А, Б, В, Г. Считая все варианты их расположения равновозможными, определите вероятность следующих событий:

(а) А будет первым в очереди;

(б) Б не будет последним в очереди;

(в) А будет стоять раньше Б;

(г) А будет стоять рядом с Б (до или после него);

(д) А будет стоять раньше Б и раньше В;

(е) А будет стоять раньше Б, а В будет стоять раньше Г.

▷ Подсчитаем общее число исходов. На первом месте в очереди может стоять любой из четырёх человек. Таким образом, все исходы делятся на четыре группы. Сколько исходов в одной группе? Пусть на первом месте стоит, скажем, А. Тогда на втором месте может стоять любой из трёх человек (Б, В, Г) и эта группа делится на три подгруппы (в соответствии с тем, кто стоит вторым). В каждой из подгрупп уже известно, кто стоит на первом и втором местах. Для третьего места остаются две возможности, а четвёртый определяется однозначно. Таким образом, в каждой подгруппе 2 исхода, в каждой группе 6 исходов, а всего 24 исхода. Несложно составить список всех исходов, но интересующие нас вероятности можно найти и без этого.

(а) Исходы, где на первом месте стоит А, образуют одну из рассмотренных нами групп. Таких исходов 6, и вероятность равна $6/24 = 1/4$. (Четыре равновероятные группы.)

(б) На последнем месте может стоять любой из четырёх человек. Количество вариантов не зависит от того, как именно его зовут. Поэтому все четыре возможности равновероятны и каждая содержит четверть исходов. Благоприятными являются три возможности из четырёх, вероятность $3/4$ (то есть 18 из 24 исходов).

(в) Разделим все исходы на две группы: в первой А стоит раньше Б в очереди, во второй Б стоит раньше А. Ясно, что имена не важны, поэтому в группах одно и то же число исходов (половина). Вероятность равна $1/2$.

(г) Будем рассматривать стоящих рядом А и Б как одну команду. Тогда эта команда может стоять на первом месте (перед В и Г), на втором месте (между В и Г) или на последнем месте (после В и Г). В каждом случае есть два варианта расположения В и Г (кто из них раньше), и для каждого из них есть два варианта расположения А и Б внутри команды. Всего получается $3 \times 2 \times 2 = 12$ исходов, где А и Б стоят рядом. Вероятность $1/2$.

(д) Посмотрим, кто из трёх человек А, Б и В стоит раньше других (временно не обращая внимания на Г). Все исходы разбиваются на три группы, в которых поровну элементов. Благоприятными будут исходы одной группы, поэтому вероятность равна $1/3$.

(е) Как мы уже говорили, все исходы делятся на две группы: (1) А стоит раньше Б и (2) Б стоит раньше А. Каждая из групп делится на две подгруппы: В раньше Г или Г раньше В. Все подгруппы одинаковы (мы можем переименовать В и Г, не затрагивая А и Б). Поэтому благоприятные исходы (А раньше Б и одновременно В раньше Г) составляют одну четверть.◁

Это решение использует соображения симметрии (переименование не меняет числа исходов). Если оно вызывает сомнения, полезно выписать все 24 исхода и посмотреть, как выглядит описанное деление на группы.

9 Буквы в слове МИША смешали и затем выложили в случайном порядке (все перестановки равновероятны). Какова вероятность, что получится то же самое слово? Тот же вопрос для слов МАША и МАМА.

10 В задаче про четыре кубика найдите вероятность того, что цифры будут идти в убывающем порядке (на жёлтом меньше, чем на красном, на зелёном ещё меньше, чем на жёлтом, на синем ещё меньше, чем на зелёном. [Указание. Из каждой такой комбинации перестановками можно получить 24 варианта, где все цифры различны.]

11 В мешке лежат карточки с буквами А, Б, В, а также с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 (всего 8 карточек). Их по очереди вынимают из мешка, пока не вынут все. Какова вероятность того, что буквы будут появляться в порядке алфавита, а цифры — в порядке возрастания? (Расположение букв относительно цифр может быть любым.)

12 Расписание турнира 8 команд в 3 тура по олимпийской системе (команды делятся на пары, ничьих нет, проигравший выбывает) заполняется жеребьёвкой (команды случайным образом помещаются в нижнюю строку турнирной таблицы). Будем считать, что каждая команда имеет определённую «силу», что силы всех команд различны и в любой встрече побеждает сильнейшая команда. (Это гарантирует, что победителем турнира окажется сильнейшая команда.) Какова вероятность, что в финале встретятся две сильнейшие команды? Какова вероятность, что к тому же и третье и четвёртое места (определяемые встречей проигравших в полуфиналах) будут определены правильно?

13 Маша идёт на день рождения, где будут десять ребят и десять девочек (включая Машу). Они садятся за круглый стол в случайном порядке. Какова вероятность, что справа от Маши будет сидеть мальчик? что оба её соседа будут мальчики?

14 Автомобильный номер содержит три цифры (и буквы, на которые мы сейчас не обращаем внимания). Считая все варианты от 000 до 999 равновозможными, найдите вероятность того, что выбранный наудачу номер

(а) состоит только из единиц (равен 111);
(б) состоит только из единиц и двоек;
(в) начинается с пятёрки;
(г) кончается на девятку;
(д) начинается с пятёрки и кончается на девятку;
(е) состоит из трёх одинаковых цифр;

(ё) не содержит единиц;
(ж) содержит хотя бы одну единицу;
(з) состоит из трёх различных цифр;
(и) включает в себя хотя бы две одинаковые цифры;
(й) состоит из трёх различных цифр, идущих в порядке возрастания;
(к) имеет сумму цифр 2;
(л) имеет сумму цифр 25;
(м) имеет сумму цифр 9;
(н) содержит ровно две девятки;
(о) содержит цифру, меньшую 4;
(п) не содержит цифр, меньших 4;
(р) имеет первую цифру, большую третьей.

15 Какова вероятность того, что при сдаче 36 карт (по 9 каждой масти) четырём игрокам (каждый получает по 9 карт, все возможные расположения карт в колоде равновероятны) каждый игрок получит все карты какой-то одной масти?

[Указание. Всего порядков карт $36! = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$; вариантов, когда у каждого игрока своя масть, имеется $4!9!9!9!9!$ (первый сомножитель соответствует распределению мастей по игрокам, остальные — порядку получения карт каждым игроком).]

5. Математика и жизнь

Математика ничего не говорит о том, действительно ли данный игральный кубик является «честным» (все грани выпадают примерно поровну) и не жульничают ли организаторы конкретной лотереи. Мы *предполагаем* исходы равновозможными — и подсчитываем долю благоприятных. Этот подсчёт не будет иметь никакого практического смысла, если предположение о равновозможности неверно.

Как выбрать в реальной ситуации множество равновозможных исходов, вопрос непростой. В качестве примера рассмотрим такую задачу. Одновременно бросают две одинаковые монеты. Найдём вероятность того, что они выпадут по-разному (одна орлом, другая — решкой).

Предложим два решения для этой задачи.

1. В этой задаче возможны три исхода: (1) два орла; (2) две решки; (3) орёл и решка. Благоприятный из них один, вероятность $1/3$.

2. Назовём одну из монет первой, а другую второй, и будем записывать результат бросания сначала первой, а затем второй монеты. Тогда есть четыре варианта: орёл – орёл, орёл – решка, решка – орёл, решка – решка. Из них благоприятны два (второй и третий). Вероятность $2/4 = 1/2$.

Какое из этих решений правильно?

Этот вопрос, строго говоря, не математический, а экспериментальный. Оказывается, что ближе к реальности второй ответ, если речь идёт о монетах. Но это не математическая теорема, а свойство окружающей действительности. (И если речь идёт не о монетах, а об элементарных частицах, то ответ может быть и другим.)

Аналогичным образом в одной из предыдущих задач мы предполагали все наборы цифр от 000 до 999 в автомобильном номере равновозможными. Насколько это предположение соответствует действительности, зависит от принятой системы выдачи номеров. Этот вопрос не к математикам, а к госавтоинспекции (или как она сейчас называется).

Про то, что не следует по умолчанию считать исходы равновероятными, есть даже анекдот: почему вероятность встретить динозавра равна $1/2$ (либо встретишь, либо нет).

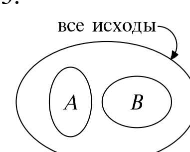
6. Формула суммы вероятностей

16 В мешке с кубиками есть белые, жёлтые и чёрные кубики. При этом белых 10% (от общего числа кубиков), а жёлтых 15%. Какова доля кубиков светлых тонов (белых или жёлтых)? доля чёрных кубиков?

▷ Доля светлых кубиков составляет $10\% + 15\% = 25\%$. Остальные 75% кубиков чёрные.

Формально: если всего в мешке N кубиков, то белых из них $0{,}1N$, а жёлтых $0{,}15N$. Всего светлых $0{,}1N + 0{,}15N = 0{,}25N$, то есть 25% общего числа. Остальные кубики чёрные, их $N - 0{,}25N = 0{,}75N$, то есть 75% от общего числа. ◁

В терминах вероятностей ту же задачу можно изложить так. В мешке есть белые, жёлтые и чёрные кубики. Мы вытаскиваем из мешка один кубик наудачу (считая все кубики в мешке равновозможными). Вероятность вытащить белый кубик равна $0{,}1$; вероятность вытащить жёлтый кубик равна $0{,}15$. Зная это, мы заключаем, что вероятность вытащить светлый (белый или жёлтый) кубик равна $0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25$. Поскольку все остальные кубики чёрные, то вероятность вытащить чёрный кубик равна $1 - 0{,}25 = 0{,}75$.



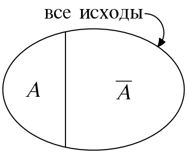
Вообще, *если два события несовместны, то вероятность того, что произойдёт хотя бы одно из них, равна сумме их вероятностей* (формула суммы вероятностей).

Здесь под *несовместными* событиями понимаются события, которые не могут произойти одновременно (исключают друг друга). *Суммой* несовместных событий A

и B называют событие, состоящее в том, что наступит хотя бы одно из событий A и B. В нашем примере:

- событие A — вытаскивание белого кубика;
- событие B — вытаскивание жёлтого кубика;
- сумма $A+B$ — вытаскивание светлого (белого или жёлтого) кубика.

Если изобразить все исходы какого-то опыта символически в виде области на плоскости, то несовместные события — это непересекающиеся куски этой области. Для двух несовместных событий благоприятные исходы складываются, откуда и следует формула для суммы вероятностей.



Два события называются *противоположными*, если всегда происходит ровно одно из двух. Например, вытаскивание светлого кубика и вытаскивание чёрного кубика в описанном опыте были противоположными событиями. Одно из двух противоположных событий называется *отрицанием* другого. Событие, противоположное к A, обозначают $\overline{A}$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

(Все исходы делятся на две группы — благоприятные для события и для противоположного к нему; в сумме получаются все исходы, поэтому сумма вероятностей равна единице.)

Противоположные события несовместны друг с другом. Не всякие несовместные события противоположны. Например, в нашем примере события «кубик белый» и «кубик жёлтый» несовместны (кубик не может быть одновременно белым и жёлтым), но не противоположны (кубик может быть чёрным, и тогда не происходит ни одно из событий).

Мы видели на примерах, что иногда проще найти вероятность противоположного события. Например, мы сначала нашли вероятность того, что при бросании четырёх кубиков не выпадет ни одной шестёрки. Она оказалось равной $(5/6)^4$. Отсюда можно найти вероятность отрицания этого события (выпадет хотя бы одна шестёрка). Эта вероятность равна $1-(5/6)^4$.

17 Наудачу выбирается число n от 1 до 100. Рассмотрим такие события:
(а) число n чётно;
(б) число n нечётно;
(в) число n делится на 4;
(г) число n даёт остаток 2 при делении на 4;
(д) число n даёт остаток 1 при делении на 4.

Какие из этих событий несовместны? (Укажите все пары несовместных событий.)

7. Логические задачи

Чтобы не путаться, рассуждая о различных событиях и их комбинациях (сумме, отрицании и т. п.), нужна некоторая тренировка. Вот несколько задач для такой тренировки.

Верные и неверные утверждения

18 Задумано некоторое число x. Оказалось, что среди пяти утверждений $x > 10$, $x > 20$, $x > 30$, $x > 40$ и $x > 50$ есть три верных и два неверных. Какие из утверждений верны?

19 Учитель сказал об оценках за контрольную: Сергеев получил не 5, Васильев получил не 4, Алексеев получил 4. При этом учитель ошибся два раза. Какую оценку получил каждый из учеников, если известно, что один из них получил 3, другой — 4, а третий — 5?

20 На столе лежат 4 карточки, на верхней стороне которых написано **А**, **Б**, **4**, **5**. Какое наименьшее число карточек нужно перевернуть, чтобы убедиться в истинности утверждения «Если на одной стороне — гласная буква, то на другой — чётное число»? Какие именно?

Отрицания

Поучительно сыграть в такую игру: один из игроков формулирует какое-то утверждение, а другой должен сформулировать его отрицание (противоположное утверждение).

Например, если один говорит «число x больше или равно числа y», то второй может сказать «число x меньше числа y». В самом деле, есть три возможности: (а) $x > y$, (б) $x = y$ и (в) $x < y$. Первый игрок говорит, что случилось (а) или (б). То, что он неправ, означает, что случилось (в).

Если первый игрок говорит, что «все ученики 8а класса знают английский язык», то второй может сказать «не все ученики 8а класса знают английский язык», или «в 8а классе есть ученик, не знающий английский язык».

Конечно, второй игрок всегда может сказать: «неверно, что. . . » (и дальше буквально повторить утверждение первого), но постарайтесь по возможности формулировать отрицание конкретно, не прибегая к этому приёму.

21 Сформулируйте отрицания следующих утверждений:

(а) число x больше числа y;

(б) среди чисел x, y, z есть хотя бы два одинаковых;

(в) все дома на правой стороне улицы имеют чётные номера;

(г) все ученики класса, знающие английский язык, умеют складывать дроби;

(д) Коля получил пятёрки за все контрольные;

(е) любой ученик 10а класса выше по росту, чем любой ученик 8б класса.

(ё) некоторый ученик 10а выше всех учеников 8б;

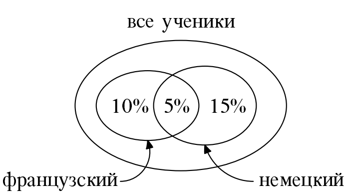
(ж) некоторый ученик 10а выше некоторого ученика 8б;
(з) все вороны чёрные;
(и) на каждой странице этой книги есть хотя бы одна опечатка;
(й) на каждой странице любой книги есть хотя бы одна опечатка;
(к) числа a, b и c различны и идут в возрастающем порядке ($a < b < c$).

8. Формула включений и исключений

Предположим, что среди учеников класса 15% знают французский язык и 20% знают немецкий язык. Какова доля учеников, знающих хотя бы один из этих двух языков?

В этой задаче ответ 35% (сумма 15% и 20%) не всегда верен. Дело в том, что некоторые ученики класса могут знать и тот, и другой язык, поэтому при сложении 15% и 20% мы учтём их дважды. Так что ответ зависит от того, какова доля полиглотов, знающих оба языка, и эта доля должна быть указана в условии задачи.

22 Среди учеников школы 15% знают французский язык и 20% знают немецкий язык. Доля учеников, знающих оба этих языка, составляет 5%. Какова доля учеников, знающих хотя бы один из этих двух языков?



▷ В число 15% знающих французский язык входят 5% знающих оба языка. Поэтому остаётся 10% учеников, знающих французский, но не знающих немецкий. Аналогичным образом 20% знающих немецкий делятся на 5% знающих оба языка и 15% знающих немецкий, но не французский. Остаётся сложить 10% (только французский), 5% (оба) и 15% (только немецкий), получится 30% учеников, знающих хотя бы один из двух языков. ◁

Можно объяснить решение и так: надо сложить 15% и 20%, а затем вычесть посчитанные дважды 5%. Получается

$$15\% + 20\% - 5\% = 30\%.$$

23 Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 2? делятся на 3? делятся хотя бы на одно из этих двух чисел?

▷ На 2 делится каждое второе число (1 не делится, 2 делится, 3 не делится, 4 делится и так далее), поэтому останется половина чисел (по одному в каждой паре), то есть 50 чисел.

На 3 делится по одному из трёх (в тройке $1, 2, 3$ делится 3, в тройке $4, 5, 6$ делится 6 и так далее). Всего есть 33 тройки (99 чисел от 1 до 99) и число 100, которое не делится. Получатся 33 числа, делящихся на 3.

Чтобы найти количество чисел, делящихся на 2 или 3, недостаточно сложить 50 и 33, поскольку мы тогда подсчитаем дважды числа, делящиеся и на 2, и на 3. Чтобы получить правильный ответ, надо вычесть количество таких «дважды делящихся» чисел.

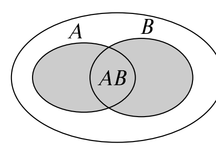
Это будут числа, делящиеся на 6. В каждой шестёрке последовательно идущих чисел (от 1 до 6, от 7 до 12, от 13 до 18 и т. д.) такое число одно. Оно идёт последним в шестёрке. Поскольку $100 = 16 \times 6 + 4$, имеется 16 полных шестёрок и одна неполная (в которой нет двух последних чисел), поэтому есть ровно 16 чисел, делящихся и на 2, и на 3.

Ответ: $50 + 33 - 16 = 67$ чисел. ◁

$\boxed{\textbf{24}}$ Известно, что ученики класса, имеющие двойки по алгебре, составляют 25%, а ученики, имеющие двойки по геометрии, составляют 15%. Сколько учеников имеют двойки и по алгебре, и по геометрии, если ученики, не имеющие двоек ни по одному из предметов, составляют 70%?

$\boxed{\textbf{25}}$ В классе 80% не пьют, 70% не курят и 60% учатся без троек. Докажите, что в нём есть хотя бы один образцовый ученик (не пьёт, не курит и учится без троек). Какова минимальная возможная доля образцовых учеников? Какова максимально возможная их доля?

Те же подсчёты можно перевести на язык теории вероятностей. (Ничего по существу нового при этом не появляется, мы просто привыкаем к этому языку.)



Пусть имеются два события A и B. Рассмотрим *сумму* этих событий: её наступление означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B. Если события A и B несовместны, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей. Но если они совместны (могут произойти одновременно), то это уже не так. Надо внести поправку и вычесть вероятность того, что произойдут оба события сразу:

$$\Pr[A + B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[AB].$$

Здесь буквы «Pr» обозначают вероятность (от латинского слова probabilitas), $A + B$ обозначает сумму событий A и B, а AB обозначает *произведение* этих событий, состоящее в том, что произошли оба события A и B.

$\boxed{\textbf{26}}$ Напишите формулу для вероятности суммы трёх событий $A + B + C$ (произошло хотя бы одно из трёх), если известны вероятности каждого из событий A, B, C, вероятности их попарных произведений AB, BC и AC, а также вероятность их тройного произведения ABC (произошли все три события).

27 Бросают четыре игральные кости (красную, жёлтую, зелёную и синюю). Пусть A — событие «на красной кости выпала шестёрка», а B — событие «на синей кости выпало чётное число очков». Найдите вероятность событий A, B, $A+B$ и AB.

9. Условная вероятность

28 Среди учеников школы 15% знают французский язык и 20% знают немецкий язык. Доля учеников, знающих оба этих языка, составляет 5%. Какова доля учеников, знающих французский язык, среди учеников, знающих немецкий язык?

▷ Обратите внимание на постановку вопроса. Сейчас нас интересуют лишь ученики, знающие немецкий язык, и доля знающих французский *среди них*. Таким образом, нам надо узнать, какую часть составляют 5% знающих оба языка среди 20% знающих немецкий язык. Ясно, что это одна четверть, или 25%. ◁

Эти подсчёты можно пересказать на языке вероятностей. Вероятность того, что случайно выбранный ученик класса знает французский язык, составляет 0,15. Вероятность знания немецкого составляет 0,2, а вероятность знания обоих языков составляет 0,05. Искомая доля есть отношение вероятностей $0{,}05/0{,}2 = 0{,}25$.

29 Какова (в той же ситуации) доля учеников, знающих немецкий язык, среди учеников, знающих французский язык?

30 Какова (в той же ситуации) доля учеников, знающих французский язык, среди учеников, *не* знающих немецкого?

Мы подсчитали, что доля знающих французский среди знающих немецкий составляет одну четверть. На языке теории вероятностей эта доля называется *условной вероятностью события* «знать французский» *при условии события* «знать немецкий». Чтобы найти эту условную вероятность, мы делили долю знающих оба языка на долю знающих немецкий язык.

Общее определение: *условной вероятностью события A при условии события B* называется отношение вероятностей

$$\frac{\Pr[AB]}{\Pr[B]}.$$

Это отношение обозначается $\Pr[A|B]$ (слева от черты ставится интересующее нас событие, а справа — условие).

Пусть всего есть n равновозможных исходов, из них k исходов благоприятны для события B, а m исходов благоприятны и для A, и для B. Тогда вероятность события B равна k/n, а вероятность события AB равна m/n. При этом отношение из определения условной вероятности равно

$$\frac{m/n}{k/n} = \frac{m}{k},$$

то есть доле AB-благоприятных исходов среди B-благоприятных. Можно сказать и так: мы забываем об исходах, неблагоприятных для B, а среди оставшихся считаем долю исходов, благоприятных для A.

Условная вероятность $\Pr[A|B]$ имеет смысл, если $\Pr[B] > 0$ (иначе знаменатель обращается в нуль, числитель тоже обращается в нуль и нельзя сказать, какую долю составляют нуль исходов из нуля).

Определение условной вероятности можно переписать так:

$$\Pr[AB] = \Pr[B] \cdot \Pr[A|B].$$

Словами: *чтобы найти вероятность того, что произойдут оба события A и B, надо умножить вероятность события B на условную вероятность события A при известном B.*

31 В классе 50% мальчиков; среди мальчиков 60% любят мороженое. Какова доля мальчиков, любящих мороженое, среди учеников класса? Как переформулировать этот вопрос в терминах вероятностей?

32 Бросают кубик; все шесть исходов (от одного до шести очков) равновозможны. Какова условная вероятность события «выпадет чётное число очков» при условии события «выпало не менее четырёх очков»? при условии события «выпало не менее трёх очков»? при условии события «не выпала шестёрка»?

▷ Из шести исходов $1, 2, 3, 4, 5, 6$ есть три, где выпало не менее четырёх очков $(4, 5, 6)$. В двух их них число очков чётно (4 и 6). Поэтому условная вероятность

$$\Pr[\text{число очков чётно}|\text{выпало не менее четырёх очков}]$$

равна $2/3$ (два случая из трёх). Формально говоря, надо поделить вероятность произведения событий, то есть события «число очков чётно и не меньше четырёх» (два исхода из шести, вероятность $2/6$) на вероятность события «число очков не меньше трёх» (три исхода из шести, вероятность $3/6$) и получить $\frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$.

Аналогичным образом отвечаем и на другие вопросы: вероятность чётного числа очков при условии, что их не меньше трёх, составляет $1/2$ (два случая 4, 6 из четырёх 3, 4, 5, 6). Вероятность того, что выпало чётное число очков при условии, что не выпало шестёрки, составляет 2/5 (два исхода 2, 4 среди пяти исходов 1, 2, 3, 4, 5). ◁

33 Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите

(а) условную вероятность того, что А первый, если Б последний;

(б) условную вероятность того, что А первый, если А не последний;

(в) условную вероятность того, что А первый, если Б не последний;

(г) условную вероятность того, что А первый, если Б стоит в очереди позже А;

(д) условную вероятность того, что А стоит в очереди раньше Б, если известно, что А раньше В.

34 Какова вероятность того, что случайно взятое число от 1 до 100 делится на 2, при условии, что оно делится на 3?

35 «Двое играют в „бой яиц“. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Спрашивается: какова вероятность победы в $(n+1)$-м раунде после победы в предыдущих? [Ответ: $1 - 1/(n+2)$]» (А. Д. Сахаров, *Воспоминания.*[1] Часть 2, глава 29.)

36 Двое игроков играют матч из 20 партий; выигрывает тот, кто первым наберёт 10 очков (за победу даётся одно очко, за проигрыш ноль, ничьих не бывает). Считая все варианты (любые комбинации из двадцати выигрышей и проигрышей) равновероятными, найдите вероятность того, что первый игрок выиграет матч, если после 17 игр счёт был 9 : 8 в его пользу. Тот же вопрос, если после 15 игр счёт был 8 : 7 в его пользу.

37 Сформулируйте и докажите правило сложения *условных* вероятностей для несовместных событий A и B при условии C.

38 Приведите примеры, в которых условная вероятность $\Pr[A|B]$ больше вероятности $\Pr[A]$, меньше её, а также равна ей.

39 Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в

[1] Андрей Дмитриевич Сахаров (1921 – 1989) — выдающийся физик, один из разработчиков советской водородной бомбы, академик АН СССР, лауреат *Сталинской* и *Ленинской* премий, трижды *Герой Социалистического Труда* и др.; впоследствии советская власть лишила его всех государственных наград и сослала в г. Горький (Нижний Новгород) за правозащитную деятельность. Там он и написал цитируемые воспоминания.

каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого король выбирает случайный шар из случайной коробки; если шар чёрный, то узника казнят, если белый — то отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

Условие этой задачи предполагает, что каждая из коробок может быть выбрана с вероятностью $1/2$, а условная вероятность выбрать белый шар *при условии, что выбрана данная коробка*, равна доле белых шаров в этой коробке.

Понятие условной вероятности может показаться трудным, но по существу всё сводится к сравнению долей. Поэтому полезно потренироваться на аналогичных задачах, в которых нет речи о вероятностях. Вот несколько таких задач:

40 Среди шахматистов каждый седьмой — музыкант, а среди музыкантов каждый девятый — шахматист. Кого больше — шахматистов или музыкантов? Во сколько раз?

(Вероятностный аналог: есть два события A и B, при этом $\Pr[A|B] = 1/7$ и $\Pr[B|A] = 1/9$. Что больше: $\Pr[B]$ и $\Pr[A]$? Во сколько раз?)

41 Уксусную эссенцию, содержащую 70% уксусной кислоты, разбавили водой в пропорции 20% эссенции на 80% воды. Какова концентрация (доля уксусной кислоты) полученного раствора?

(Вероятностный аналог: известно, что $\Pr[A|B] = 0{,}7$ и $\Pr[B] = 0{,}2$. Найти вероятность события AB.)

42 В какой пропорции нужно смешать 10% и 15% растворы, чтобы получить 12% раствор?

(Вероятностный аналог: известно, что $\Pr[A|B] = 0{,}1$, $\Pr[A|\text{не } B] = 0{,}15$ и $\Pr[A] = 0{,}12$. Найти $\Pr[B]$.)

43 Во сколько раз доля блондинов среди голубоглазых в тьмутараканском царстве больше доли голубоглазых среди блондинов, если всего голубоглазых там вдвое больше, чем блондинов?

Соответствующее утверждение в терминах вероятностей называют *формулой Байеса*:

44 Докажите, что если A и B — события положительной вероятности, то

$$\Pr[A|B] = \Pr[A] \cdot \frac{\Pr[B|A]}{\Pr[B]}.$$

Пусть, скажем, A означает «быть больным некоторой болезнью», а B означает положительный результат лабораторных анализов. Тогда $\Pr[A]$ соответствует доле больных («априорной вероятностью оказаться больным»), $\Pr[B]$ — вероятность положительного анализа (для всех) и $\Pr[B|A]$ — вероятность положительного анализа (для больных). По формуле Байеса можно найти «апостериорную вероятность быть больным» после того, как анализ дал положительный результат.

45 Король издал указ: в целях дальнейшего укрепления развитого феодализма и предотвращения распыления наследства (передаваемого по мужской линии) семьям, уже имеющим мальчика, запретить заводить новых детей. Как повлияет этот указ на долю мужчин в королевстве (при условии его исполнения)?

Вот довольно неожиданная (хотя и не очень сложная) задача про условную вероятность, которая упоминалась на конференции “Computability in Europe” в 2010 году):

46 Имеются три события A, B, C. Докажите, что если вероятности события «A и B» и события «A и C» не меньше 0,9, то и условная вероятность события A при условии «B и C» не меньше 0,9.

(Здесь 0,9 можно заменить на любую границу, большую 1/2.)

10. Независимые события

Вспомним опыт, в котором мы бросали два кубика: красный и синий. В нём имеется 36 исходов, которые мы считаем равновозможными. Вероятность того, что в первый раз выпадет тройка, равна $1/6$ (6 исходов из 36). Аналогичным образом вероятность того, что во второй раз выпадет тройка, равна $1/6$.

А какова условная вероятность выпадения тройки во второй раз при условии того, что она выпала в первый раз? По определению она равна дроби

$$\frac{\text{оба раза выпала тройка}}{\text{первый раз выпала тройка}}.$$

Числитель этой дроби равен $1/36$ («обе тройки» — один исход из 36), знаменатель дроби равен $1/6$ (6 исходов из 36: $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$). Поэтому дробь равна $1/6$.

Заметим, что та же самая вероятность будет и без условия (о том, что в первый раз выпала тройка). Информация о том, что в первый раз выпала тройка, не меняет шансов получить тройку во второй раз. Говорят, что эти события (выпадение тройки в первый и второй раз) *независимы.*

Определение: *событие A не зависит от события B, если*

$$\Pr[A|B] = \Pr[A].$$

(Словами: добавление события B в качестве условия не меняет вероятность события A.)

В этом определении мы предполагаем, что обе вероятности $\Pr[A]$ и $\Pr[B]$ больше нуля.

Вспоминая определение условной вероятности, можем переписать условие независимости так:

$$\frac{\Pr[AB]}{\Pr[B]} = \Pr[A],$$

или, если перенести $\Pr[B]$ в другую часть,

$$\Pr[AB] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Последнее равенство называют правилом произведения: *вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей.*

Хотя оно и называется «правилом», по существу это просто определение независимости событий.

47 Докажите, что если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

▷ В самом деле, в правило произведения оба события входят симметрично. ◁

48 Вернёмся к примеру, где 15% учеников знали французский язык, 20% знали немецкий язык и 5% знали оба языка. Будут ли в этом примере события «знать французский язык» и «знать немецкий язык» независимы?

▷ Нет. Как мы видели, условная вероятность знать французский язык при условии знания немецкого (для случайно взятого ученика) была равна $1/4 = 25\%$, что больше вероятности знать французский язык без условия (15%). ◁

В этом примере доля знающих немецкий язык становится больше, если рассматривать не всех учеников класса, а ограничиться знающими французский язык.

49 Известно, что 15% учеников знают французский язык, 20% учеников знают немецкий язык и события «знать французский» и «знать немецкий» независимы. Какая доля учеников знает оба языка?

▷ По правилу произведения получаем $0{,}2 \times 0{,}15 = 0{,}03$. Таким образом, в случае независимости доля знающих оба языка составит 3% (а не 5%, как в предыдущей задаче). ◁

50 Докажите, что если событие A независимо от события B и $\Pr[A] < 1$, то и противоположное событие $\overline{A}$ независимо от B.

51 Докажите, что если событие A независимо от события B, то событие A независимо и от противоположного события $\overline{B}$. (Предполагается, что вероятность события $\overline{B}$ больше нуля.)

Таким образом, если знание немецкого языка не меняет шансы *знать* французский язык, то оно не меняет и шансы *не знать* французский язык. Кроме того, незнание немецкого языка (в этой ситуации) не меняет шансы знать французский язык.

52 Известно, что знание французского языка увеличивает шансы знать немецкий язык. (Формально говоря, доля знающих немецкий язык среди знающих французский больше, чем среди всех.)

Докажите, что знание немецкого языка увеличивает шансы знать французский язык (и во столько же раз).

Увеличивает или уменьшает незнание французского языка шансы не знать немецкий язык?

53 Бросают два кубика: красный и синий. Будут ли события «на красном кубике выпала чётная цифра» и «на синем кубике выпала пятёрка или шестёрка» независимы?

54 Докажите, что если при бросании двух кубиков событие A определяется только результатом бросания первого кубика, а событие B — только результатом бросания второго, то эти события независимы.

Иногда понятия условной вероятности и независимости помогают находить вероятность событий, исходя из интуитивных соображений (и даже не указывая явно всех возможных исходов).

55 Пусть в мешке имеется 10 шаров, из которых 6 белых и 4 чёрных. Вытаскивая шар наугад, мы получаем чёрный шар с вероятностью 0,4. А какова вероятность того, что мы два раза подряд вытащим из этого мешка чёрный шар?

▷ Задача поставлена некорректно: требуется уточнить, что мы делаем с вытащенным шаром — возвращаем в мешок (так что следующий шар мы снова вытаскиваем из мешка со всеми десятью шарами) или откладываем в сторону (и тогда к следующему вытаскиванию остаются девять шаров).

В первом случае события «первый вытащенный шар чёрный» и «второй вытащенный шар чёрный» независимы: вероятность получить второй раз чёрный шар не зависит от того, что было в первый раз. Поэтому вероятность дважды вытащить чёрный шар равна произведению вероятностей, то есть $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Если же мы не возвращаем чёрный шар обратно, то во второй раз имеем дело с мешком, где осталось три чёрных шара и шесть белых. Поэтому *условная вероятность* вытащить во второй раз чёрный шар при условии того, что в первый раз вытащен чёрный шар, равна $3/9$. Поэтому вероятность вытащить два чёрных шара равна произведению $(4/10) \cdot (3/9) = 2/15$. ◁

56 Найдите (отдельно для двух вариантов: шары возвращаются или нет) вероятность вытащить чёрный шар три раза подряд; четыре раза подряд; пять раз подряд. В каком случае (с возвращениями или без) вероятность больше и почему?

11. Независимость в природе и в теории вероятностей

Слово «независимый» в жизни значит самое разное. Но в рамках теории вероятностей у него очень узкий и чёткий смысл: вероятность одновременного появления двух событий равна произведению вероятностей.

Часто такого рода подсчёты позволяют оценивать связь различных явлений друг с другом. Но это нужно делать очень осторожно, избегая поспешных выводов. Применяемые при этом методы составляют особую науку, называемую *математической статистикой*. Мы ограничимся обсуждением нескольких примеров.

Пример 1. Пусть при испытаниях нового лекарства его получили 10% больных определённой болезнью. При этом оказалось, что из получивших лекарство выздоровела половина (50% от принимавших, или 5% от всех больных), в то время как из всех больных выздоровели 60%.

Что можно сказать об эффективности нового лекарства? Кажется, что его применение наносит лишь вред (выздоровело 50% вместо 60%). Но этот вывод может оказаться и неверным. Скажем, если новое лекарство давали лишь тяжёлым больным, с минимальными шансами на выздоровление, то результат в 50% является очень хорошим. Имея это в виду, часто при испытаниях новых лекарств пациентов случайным образом делят на две группы (чтобы избежать систематических различий между пациентами обеих групп). Затем в одной из групп применяют новое лекарство и смотрят на результаты. Более того, часто для «чистоты эксперимента» всем пациентам дают неотличимые таблетки (одним — с лекарством, другим — без). И ни пациентам, ни их лечащим врачам не говорят, к какой группе они относятся, чтобы избежать побочного эффекта — «самовнушения» и т. п.

Ещё одна проблема — на практике, конечно, точного равенства доли выздоровевших не будет, даже если лекарство абсолютно не действует. Возникает вопрос, какое различие в долях уже можно считать «статистически значимым», а какое скорее следует списать на случайные отклонения. (Этим тоже занимается математическая статистика. Мы вернёмся к этому вопросу в конце брошюры, говоря о «законе бóльших чисел».)

Есть исторический пример похожей ситуации, связанный с голосованием в нижней палате конгресса США в 1964 году (Civil Rights Act). В этой таблице показан процент голосовавших за этот закон (в скобках — количество голосовавших «за»/общее число). «Демократы» и «республиканцы» —

	демократы	республиканцы
северные штаты	94% (145/154)	85% (138/162)
южные штаты	7% (7/94)	0% (0/10)
всего	61% (152/248)	80% (138/172)

члены палаты от соответствующих партий, а «южные штаты» — это штаты, выступавшие на стороне Конфедерации в гражданской войне («северные штаты» — все остальные). Если смотреть на нижнюю строчку таблицы, то видно, что в целом среди республиканцев больше голосовавших «за»; если же смотреть отдельно по северным и южным штатам, то в обоих группах всё наоборот: голосовавших «за» больше среди демократов. (Такую странную ситуацию иногда называют «парадоксом Симпсона».)

Пример 2. В школу приехала комиссия для проверки результатов зачёта по математике и провела повторный зачёт своими силами. Известно, что первоначальный зачёт сдали 70% школьников, а зачёт комиссии сдали 50% школьников. Сколько процентов школьников сдали оба зачёта, если комиссия была действительно независимой и не учитывала результатов предыдущего зачёта?

Формальный подсчёт, если понимать слово «независимый» в математическом смысле, даёт 50% от 70%, то есть 35%. Но ответ этот абсурден: сдача зачёта по математике не есть лотерея, в которой выигрыш вчера не меняет шансов выиграть сегодня. Можно ожидать, что сдавшие первый зачёт в среднем лучше знают математику, чем не сдавшие, поэтому и результаты второго зачёта у них будут лучше.

Пример 3. Метеостанция вела наблюдения в течение года и зафиксировала, в какие дни в данном населённом пункте был гром и в какие молния. Скорее всего события «был гром» и «была молния» (для случайно выбранного дня в году) будут зависимы. Однако на основании этих данных нельзя судить о том, является ли молния причиной грома (как учит физика) или наоборот: если событие A зависит от B, то и событие B зависит от A, и эта зависимость не позволяет судить о том, что здесь причина, а что — следствие.

Другой похожий пример: среди обращающихся к врачу большая доля больных, чем среди не обращающихся — но было бы опрометчиво заключить отсюда, что врачи вредят здоровью.

Пример 4. Мы бросаем монету десять раз подряд. При этом первые девять раз выпал орёл. Увеличивает ли это вероятность выпадения орла в десятый раз?

«По жизни» тут можно говорить многое. Некоторые скажут, что если уж настала полоса везения (или невезения), то так и будет продолжаться.

Другие ответят, что раз уж так долго выпадал орёл, то по справедливости должна же наконец выпасть решка. Третьи скажут, что вообще так долго орёл случайно выпадать не может и бросающий монету жульничает или монета несимметричная.

С точки зрения математики все эти разговоры не имеют смысла. Вычисляя вероятности, мы предполагаем, что все возможные последовательности результатов бросаний монеты равновозможны. Таких последовательностей 2^{10}. Две из них начинаются на девять орлов; в одной за ними идёт ещё один орёл, в другой решка. Поэтому условная вероятность появления решки (как и орла) после девяти орлов равна половине.

Другое дело, что наше предположение о равновозможности всех результатов бросаний может плохо соответствовать действительности, если монета несимметричная или если бросающий жульничает. (На практике, если никаких скрытых подвохов нет, последовательные бросания монеты обычно ведут себя как независимые, так что наше предположение близко к действительности.)

Пример 5. Ихтиологи выловили из пруда 40 рыб и пометили их. На следующий день они снова выловили 50 рыб, из которых оказалось 18 помеченных. Оценить число рыб в пруду.

Эту оценку можно сделать, если считать события «быть выловленной в первый день» и «быть выловленной во второй день» (для случайно взятой рыбины) независимыми.

Доля помеченных рыб среди выловленных (во второй день) составляет $18/50$. Чтобы 40 помеченных в первый день рыб составляли ту же долю среди всех рыб в пруду, общее количество N должно удовлетворять пропорции

$$18 : 50 = 40 : N$$

откуда $N = 50 \cdot 40/18 = 111\frac{1}{9}$.

Как понимать эту девятую часть рыбы? Ничего странного в этом нет. Доля помеченных рыб среди улова второго дня не обязана *в точности* равняться доле помеченных рыб во всём пруду: даже в том случае, если нет каких-то систематических причин для такого отклонения, возможны случайные колебания. (А возможно и другое: скажем, раз пойманная и отпущенная рыбина становится более пугливой, или некоторые умнее других и систематически не ловятся, и т. п.) Так что наша оценка в любом случае только приблизительна, к тому же основана на предположении о независимости, которое весьма спорно.

С другой стороны, математическая независимость вполне может иметь место для событий, которые трудно назвать независимыми в житейском смысле этого слова:

57 Проверьте, что при бросании кубика события «выпало чётное число» и «выпало число, делящееся на 3» независимы.

Наконец, исторический анекдот, который рассказывают про выдающегося советского специалиста по теории вероятностей, А. Я. Хинчина (а иногда про А. Н. Колмогорова, основателя современной теории вероятностей). Демагоги-философы пытались подкопаться под теорию вероятностей и обвинить её в «идеализме» (что означало в то время начало травли и прямую угрозу для жизни учёных): дескать, математики изучают независимые события, в то время как марксизм учит, что всё в мире диалектически связано. По легенде, Хинчин отбился от них их же собственным оружием — демагогической болтовнёй. Он спросил в ответ, считают ли марксисты-ленинцы молебен о дожде и последующий дождь зависимыми событиями, и они убрались не солоно хлебавши.

12. Среднее арифметическое

Средним арифметическим двух чисел a и b называется их полусумма $(a+b)/2$. Название объясняется тем, что точка $(a+b)/2$ на числовой оси лежит посередине отрезка с концами a и b. Среднее арифметическое двух чисел настолько же больше меньшего из них, насколько меньше большего.

58 Среднее арифметическое двух чисел равно 5, а одно из чисел равно 2. Найдите второе число.

59 Как изменится среднее арифметическое двух чисел, если одно из них увеличить на 1? оба числа увеличить на 1? одно из чисел увеличить на 1, а другое уменьшить на 1?

60 В каких пределах может меняться среднее арифметическое чисел a и b, если $1 \leqslant a \leqslant 2$ и $5 \leqslant b \leqslant 7$?

Аналогичным образом определяется среднее арифметическое нескольких чисел: надо сложить их все и поделить сумму на количество чисел. Символически это записывается так. Числа обозначаются $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (всего их n штук, и они нумеруются индексами от 1 до n). Их среднее арифметическое по определению равно

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

61 (а) Чему равно среднее арифметическое n одинаковых чисел?

(б) Среднее арифметическое нескольких чисел находится между наименьшим и наибольшим из них. Приведите пример, когда оно ближе к наименьшему, чем к наибольшему, а также пример, когда наоборот.

$\boxed{62}$ В ящике лежат болты различной длины; 10% болтов имеют длину 30 мм, 20% имеют длину 50 мм, а остальные 70% имеют длину 80 мм. Найдите среднюю длину болта (среднее арифметическое длин всех болтов).

$\boxed{63}$ Чему равно среднее арифметическое ста чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100$? [Указание: удобно сгруппировать их в пары.]

$\boxed{64}$ Одно из десяти чисел увеличили на 1. Как изменилось от этого среднее арифметическое этих чисел?

$\boxed{65}$ (а) Чтобы найти среднее арифметическое трёх чисел a, b, c, Вова нашёл среднее арифметическое чисел a и b, а затем взял среднее арифметическое результата и числа c. Правильно ли это?

(б) Чтобы найти среднее арифметическое четырёх чисел a, b, c, d, Гриша нашёл среднее арифметическое чисел a и b, затем нашёл среднее арифметическое чисел c и d, а затем взял среднее арифметическое двух результатов. Правильно ли это?

$\boxed{66}$ В автобусе собралась футбольная команда из 11 человек и волейбольная команда из 6 человек. Средний возраст футболистов — 28 лет, средний возраст волейболистов 21 год. Каков средний возраст пассажиров автобуса?

$\boxed{67}$ Петя нашёл среднее чисел в каждом столбце прямоугольной таблицы, а потом нашёл среднее полученных средних. Вася делал то же самое, но начал со средних по строкам. Получилось ли у них одно и то же?

$\boxed{68}$ Едет колонна автобусов. Некоторые из них переполнены (переполненным будем считать автобус, в которых больше 50 пассажиров). Что больше: доля переполненных автобусов (среди всех автобусов) или доля пассажиров, едущих в переполненных автобусах (среди всех пассажиров)?

$\boxed{69}$ Какой концентрации получится раствор, если смешать 10% и 15% растворы в пропорции 2 : 1?

$\boxed{70}$ Имеется по литру 5-, 10- и 15-процентных растворов. Какое максимальное количество 8% раствора можно составить, смешивая их?

$\boxed{71}$ В академии наук есть академики и члены-корреспонденты. Одного из членов-корреспондентов избрали (перевели) в академики. Мог ли от этого уменьшиться средний возраст и у академиков, и у членов-корреспондентов?

$\boxed{72}$ Анекдотическая история советского времени гласит, что секретарю обкома объявили выговор за то, что «в некоторых районах области урожайность зерновых ниже средней по области». В каком случае этот упрёк необоснован?

$\boxed{73}$ Докажите, что средний квадрат роста учеников класса больше квадрата среднего роста учеников класса, за исключением того случая, когда все ученики одного и того же роста.

Интересуясь средним значением какого-либо показателя, люди обычно хотят составить себе общее представление о состоянии дел. Но делать это следует с осторожностью и не спрашивать о средней температуре по больнице или, скажем, о среднем доходе на Чукотке в 2005 году — сами по себе эти показатели мало о чём говорят.

13. Математическое ожидание

Представим себе, что мы много раз бросаем игральную кость, записываем результаты бросаний (числа от единицы до шестёрки) и затем вычисляем их среднее арифметическое. Что получится?

В точности этого сказать нельзя, поскольку доля единиц, двоек, троек и т. д. может быть разной. Но если все шесть цифр встречаются одинаково часто, то из n опытов будет примерно $n/6$ единиц, $n/6$ двоек и так далее. Тогда общая сумма всех результатов будет примерно равна

$$\frac{n}{6}\cdot 1+\frac{n}{6}\cdot 2+\frac{n}{6}\cdot 3+\frac{n}{6}\cdot 4+\frac{n}{6}\cdot 5+\frac{n}{6}\cdot 6=\frac{n(1+2+3+4+5+6)}{6}.$$

Чтобы получить среднее арифметическое, надо поделить на общее число опытов n, и получится

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3{,}5$$

(как если бы кубик выпал по одному разу каждой стороной).

Это число 3,5 называют *математическим ожиданием* числа очков, выпавших на кубике. Имеется в виду следующее: мы «ожидаем», что все равновозможные варианты числа очков от 1 до 6 встретятся одинаково часто, и среднее будет равно 3,5 согласно нашему вычислению.

Наглядно можно объяснить так: если платить три с полтиной за участие в игре, где можно бросить кубик и получить столько рублей, сколько на нём выпадет очков, то при очень большом числе игр в среднем играющий будет оставаться «при своих».

74 В лотерее на 1% билетов выпадает выигрыш в 200 рублей, на 0,01% билетов выпадает выигрыш в 1000 рублей, а остальные билеты без выигрыша. Найдите средний выигрыш в этой лотерее (в расчёте на один билет), то есть среднее арифметическое выигрышей всех билетов.

▷ Пусть всего выпущено n билетов лотереи. Тогда $0{,}01n$ билетов имеют выигрыш 200 рублей, и общая сумма выигрыша этих билетов будет равна $200\cdot 0{,}01n=2n$ рублей. Кроме того, $0{,}0001n$ билетов имеют выигрыш 1000 рублей, сумма выигрыша этих билетов будет $1000\cdot 0{,}0001n=0{,}1n$ рублей.

Общая сумма выигрышей будет $2n + 0{,}1n = 2{,}1n$ рублей, то есть по 2 рубля 10 копеек на один билет. ◁

Зная это, можно подсчитать, что если билет стоит, скажем, 5 рублей, то меньше половины собранных денег идёт на выигрыши, а остальное идёт на расходы по проведению лотереи, прибыль устроителей, налоги и др.

75 Опыт состоит в бросании трёх монет и подсчёта числа выпавших орлов; это число считают результатом опыта. Каково будет среднее арифметическое результатов большой серии опытов, если все 8 комбинаций орлов и решек на трёх монетах считать равновероятными?

▷ Запишем эти комбинации и число орлов для каждой из них. Если все восемь вариантов встречаются одинаково часто, то среднее число орлов будет равно среднему арифметическому восьми чисел в правом столбце, то есть

О	О	О	3
О	О	Р	2
О	Р	О	2
О	Р	Р	1
Р	О	О	2
Р	О	Р	1
Р	Р	О	1
Р	Р	Р	0

$$\frac{3+2+2+1+2+1+1+0}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5.$$

Этот ответ можно предугадать: если мы n раз бросаем по три монеты, то всего как бы брошено $3n$ монет, и примерно в половине случаев (то есть в $1{,}5n$ случаев) появляется орёл. ◁

14. Случайные величины

Случайная величина — это величина, значение которой зависит от исхода опыта. Будем считать, что все исходы опыта равновероятны и в длинной серии опытов встречаются примерно поровну. В этом случае среднее значение величины для длинной серии опытов близко к её *математическому ожиданию*, которое определяется как среднее арифметическое значений величины для всех исходов.

Например, в примере с лотереей опытом является покупка одного из выпущенных организаторами билетов (все билеты считаются равновозможными). Случайная величина — выигрыш этого билета, а её математическое ожидание — средний выигрыш (среднее арифметическое выигрышей для всех билетов).

В примере с игральной костью опытом является бросание кости, исходом опыта — выпадение одной из граней, а случайной величиной — число очков на этой грани. Её математическое ожидание — среднее число очков (по всем шести граням кубика).

В примере с монетами опытом является бросание трёх монет, исход опыта — одна из 8 комбинаций букв О и Р, а случайная величина — число букв

О (орлов). Её математическое ожидание — среднее число очков для всех 8 исходов.

Заметим что слова «математическое ожидание» не надо понимать уж слишком буквально: хотя математическое ожидание числа орлов при бросании трёх монет равно 1,5, вряд ли кто-то действительно ожидает появления полутора орлов при бросании трёх монет.

Математическое ожидание случайной величины можно найти, зная все её значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения.

Пусть, например, случайная величина принимает значения a_1, a_2 и a_3 с вероятностями p_1, p_2 и p_3 (а других значений не принимает, так что p_1+p_2+ $+\,p_3=1$). Найдём её математическое ожидание. Пусть всего n исходов. Из них в $p_1 n$ исходах величина принимает значение a_1, в $p_2 n$ исходах величина принимает значение a_2 и в $p_3 n$ исходах — значение a_3.

Чтобы найти математическое ожидание, надо сложить все значения величины (для всех исходов) и поделить на n. В этой сумме

$p_1 n$ слагаемых, равных a_1 (их сумма $np_1 a_1$);
$p_2 n$ слагаемых, равных a_2 (их сумма $np_2 a_2$);
$p_3 n$ слагаемых, равных a_3 (их сумма $np_3 a_3$).

Всего получается

$$n(p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3)$$

и среднее арифметическое (сумма, делённая на n) будет

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3.$$

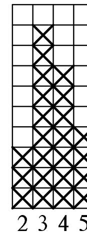
Точно так же получается и общая формула: если величина принимает значения $a_1, \ldots, a_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$ соответственно, то её математическое ожидание равно

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n.$$

Заметим, что для случая равновероятных исходов понятие математического ожидания лишь словесно отличается от среднего арифметического. Можно говорить, скажем, о математическом ожидании веса случайно выбранного ученика класса, но это есть не что иное, как среднее арифметическое весов всех учеников.

15. Гистограммы

Чтобы наглядно изобразить какие-либо данные, можно использовать картинку, называемую *гистограммой.* Поясним это на примере контрольной в школе.

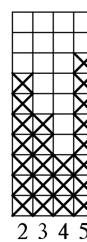


Учитель проверяет работы своих учеников. Каждая работа оценивается от 2 до 5. Чтобы представить себе общую картину, учитель заводит табличку с четырьмя столбцами, помеченными 2, 3, 4 и 5. Проверив очередную работу, он ставит крестик в столбец, соответствующий оценке за проверенную работу. В итоге получается картинка, по которой видно, как распределились оценки.

Например, на нашем рисунке видно, что есть три двойки, девять троек, семь четвёрок и четыре пятёрки. На этой картинке нет фамилий, но общая ситуация видна достаточно отчётливо: в основном тройки и четвёрки (троек немного больше), и немного двоек и пятёрок.

76 Найдите среднюю оценку за контрольную по этой гистограмме (среднее арифметическое всех оценок, математическое ожидание оценки случайно выбранного школьника).

▷ Всего оценок $3+9+7+4 = 23$, общая сумма оценок $3\cdot2+9\cdot3+7\cdot4+4\cdot5 = 81$, среднее $81/23 \approx 3{,}52$. ◁



Видно, что среднее немного больше 3,5, хотя троек и было больше, чем четвёрок (за счёт того, что пятёрок больше, чем двоек).

Такая гистограмма даёт больше информации о положении дел, чем просто средний балл. Скажем, по другой картинке видно, что хотя средний балл тот же, но распределение совсем другое: в этом случае класс явно делится на две группы «отличников» и «двоечников».

Вырежем гистограмму из однородной бумаги. Тогда горизонтальная координата центра тяжести указывает среднее значение. (Что такое центр тяжести, изучают в механике. Наглядный смысл его такой: если поставить опору под гистограмму левее среднего значения, то гистограмма будет клониться вправо, а если правее — то влево.)

77 Докажите это, основываясь на правиле рычага: чтобы скомпенсировать вес, который в k раз дальше от оси, нужен в k раз больший вес.

Решая следующие задачи, полезно представлять себе соответствующие гистограммы.

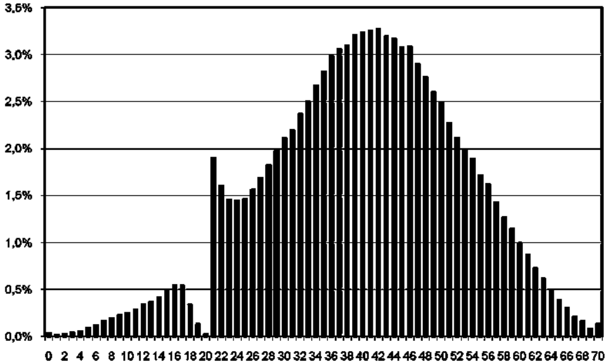
78 Может ли быть так, что в классе более 90% учеников имеют рост выше среднего? (Под средним ростом мы понимаем среднее арифметическое роста всех учеников класса.)

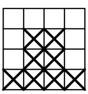
79 Для длинного списка чисел проведём границу так, чтобы примерно половина чисел была меньше этой границы, а половина — больше. (Точное равенство может не достигаться: если есть несколько равных чисел, граница не может пройти между ними.) Такая граница называется *медианой.* Приведите примеры, когда медиана нескольких положительных чисел значительно больше или значительно меньше их среднего арифметического.

Гистограммы часто бывают полезны при анализе статистических данных: на них можно заметить любопытные статистические аномалии. Например, по итогам голосования 2007 года («выборы в Государственную думу России») была построена гистограмма распределения участков по явке (С. Шпилькин, Статистическое исследование результатов российских выборов 2007–2009 г., *Троицкий вариант*, 2009, вып. 40, с. 2). Явкой называется доля избирателей, пришедших голосовать (по отношению к общему числу избирателей в списке); для каждого процента явки на гистограмме показано, сколько участков заявили о таком проценте явки — полученные точки соединены ломаной линией.

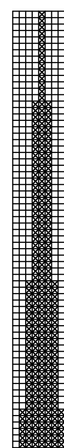
Видно, что удивительным образом на «круглых» значениях явки имеются «пики»; особенно заметны пики на кратных 10, но на кратных 5 тоже видны пики поменьше. Одно из возможных объяснений (впрочем, других я не видел) — подтасовка результатов голосования в соответствии с желаемым процентом явки (который часто бывает «круглым»).

80 Попытайтесь объяснить, с чем связана загогулина на гистограмме распределения результатов экзаменов по польскому языку (2010, Польша[2]).





Можно составить гистограмму, исходя не из наблюдений, а из вероятностей. Рассмотрим опыт, в котором мы бросаем три монеты и считаем количество орлов. Мы видели, что восемь случаев распределятся так: три орла будет в одном случае, два орла — в трёх, один орёл — тоже в трёх, и нуль орлов — в одном случае. Это можно изобразить на гистограмме. По симметрии ясно, что математическое ожидание числа орлов равно 1,5.



Аналогичные рисунки можно построить и для большего числа монет. Скажем, для 8 монет имеется 256 возможных исходов, и для каждого числа орлов (от нуля до восьми) можно подсчитать все комбинации с этим числом орлов. Глядя на эту картинку: мы видим, что наибольшую вероятность имеет выпадение четырёх орлов, а наименьшую — нуля или восьми.

81 Определите по этой картинке (приблизительно, с помощью линейки), во сколько раз событие «орлов и решек поровну» вероятнее события «три орла и пять решек».

Используя математический анализ, можно доказать, что для большого числа монет гистограмма приближается к растянутому графику функции e^{-x^2}. Этот график называется графиком *нормального распределения*. Похожую форму обычно имеют гистограммы величин, определяемых большим числом независимых факторов.

[2] См. smarterpoland.pl/index.php/2013/03/czy-polonisci-sa-mniej-obiektywni-a-matematyki-jest-za-malo-w-liceum/

Обе предыдущие гистограммы были симметричны, поскольку орлы столь же вероятны, как и решки. Рассмотрим теперь пример несимметричной гистограммы. Пусть мы бросаем кубик 4 раза и считаем количество выпавших единиц. Это количество — случайная величина, принимающая значения от 0 до 4. Чтобы подсчитать вероятности появления каждого из этих значений, надо выяснить, сколько всего исходов и в скольких из них будет 0, 1, 2, 3 и 4 единицы. Сделаем это:

• Всего исходов $6^4 = 1296$ (на каждом из 4 мест есть 6 возможностей).

• Четыре единицы появляются в одном-единственном случае.

• Три единицы занимают три места из четырёх; положение этого четвёртого места можно выбрать 4 способами, и на нём может стоять любая из 5 цифр (кроме единицы), всего 20 возможностей.

• Ни одной единицы: на каждом из четырёх мест может стоять одна из пяти цифр, всего $5^4 = 625$ вариантов.

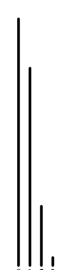
• Одна единица: есть четыре возможных места, для каждого из них есть 5^3 возможностей для остальных цифр, то есть $4 \cdot 5^3 = 500$ вариантов.

• Наконец, две единицы: вариантов их расположения (выбора двух позиций из четырёх) шесть, для каждого такого варианта есть 5^2 вариантов цифр на двух оставшихся местах, получается $6 \cdot 25 = 150$ вариантов. (Вместо этого подсчёта можно вычесть: $1296 - 20 - 625 - 500 - 1 = 150$.)

Получаем такой ответ:

0	1	2	3	4
$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$	$4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$
$\frac{625}{1296}$	$\frac{500}{1296}$	$\frac{150}{1296}$	$\frac{20}{1296}$	$\frac{1}{1296}$

Изобразить 1296 крестиков трудно, поэтому столбцы гистограммы показаны в виде отрезков (длина пропорциональна вероятности).



В заключение ещё раз напомним, что при реальном проведении опытов частоты (скорее всего) будут отличаться от вероятностей, так что гистограмма для результатов будет не совсем такой, как мы вычислили. (Но можно надеяться, что при большом числе опытов длины столбцов будут с хорошей точностью пропорциональны вычисленным вероятностям.)

16. Линейность математического ожидания

Математическое ожидание обладает свойством «линейности»: *математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий.* Например, если в опыте с n исходами одна величина принимает значения $a_1, \ldots, a_n$, а другая принимает значения $b_1, \ldots, b_n$, то средние значения равны

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{и} \quad B = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Если теперь третья величина равна сумме первых двух, то есть $c_i = a_i + b_i$, то её среднее

$$C = \frac{(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \ldots + (a_n + b_n)}{n} = \\ = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

равно сумме средних значений A и B.

Измерим, например, ширину и высоту нескольких прямоугольников. Для каждого прямоугольника сложим их и получим сумму измерений, *полупериметр.* Среднее значение полупериметра, как мы видели, равно сумме средней ширины и средней высоты. (Другими словами, усреднять можно до и после сложения.)

Это свойство математического ожидания позволяет решить следующую задачу почти без вычислений.

82 Найдите математическое ожидание числа единиц при бросании четырёх игральных костей.

▷ Мы уже вычисляли вероятности получить $0, 1, 2, 3, 4$ единицы, так что можно просто воспользоваться формулой и получить

$$0 \cdot \frac{625}{1296} + 1 \cdot \frac{500}{1296} + 2 \cdot \frac{150}{1296} + 3 \cdot \frac{20}{1296} + 4 \cdot \frac{1}{1296} = \\ = \frac{500 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 1}{1296} = \frac{864}{1296} = \frac{2}{3}.$$

Тот же ответ можно получить почти без вычислений, воспользовавшись свойством линейности. Рассмотрим шесть случайных величин: число единиц, число двоек, ..., число шестёрок. По соображениям симметрии (вероятности всех граней кубика одинаковы) все эти шесть случайных величин имеют одинаковое математическое ожидание. Значит, их сумма имеет в шесть раз большее математическое ожидание (линейность). Но сумма всегда равна 4 (поскольку всего костей четыре) и потому её среднее тоже 4. Получаем ответ $4 \cdot (1/6) = 2/3$.

Вот ещё один способ вычисления, также использующий линейность. Рассмотрим такие четыре случайные величины: «число единиц на первой кости», «число единиц на второй кости», ..., «число единиц на четвёртой кости». Каждая из этих величин принимает два значения: 1 (если на соответствующей кости выпала единица) и 0 (если не выпала). Значение 1 имеет вероятность $1/6$, и потому математическое ожидание каждой из четырёх величин равно $1/6$. А интересующая нас величина (общее число единиц) равна сумме этих четырёх величин, то есть $4/6 = 2/3$. ◁

Для шести бросаний математическое ожидание числа единиц (вычисление аналогично) равно единице. (Это, в общем, не удивительно: если вероятность появления единицы равна $1/6$, то «в среднем» на шесть бросаний приходится одна единица.) На всякий случай ещё раз поясним, что это не означает, что каждый раз будет получаться по одной единице: их может быть больше (иногда, хотя и редко, будут все единицы), а может и вовсе не быть.

83 Какое событие более вероятно при бросании шести игральных костей: (а) не выпало ни одной единицы; (б) выпало более одной единицы? [Указание: можно обойтись без подсчётов, использовав тот факт, что математическое ожидание равно 1.]

84 Бросив сто раз монету, подсчитаем число орлов, сразу за которыми выпала решка. (Например, для ста подряд идущих орлов или ста решек это число равно нулю, для РОРОРО...РО (решки и орлы чередуются, начиная с решки) получится 49, а для ОРОРОР...ОР будет 50.) Найдите математическое ожидание этого числа (считая все 2^{100} исходов равновероятными).

▷ Выберем некоторое число N от 1 до 100 и рассмотрим величину α_N, равную 1, если на N-м месте стоит орёл, за которым идёт решка, и 0 в противном случае. Заметим, что при $N = 100$ эта величина нулевая (за последним орлом не может идти решка). При всех остальных $N = 1, 2, \ldots, 99$ эта величина равна единице с вероятностью $1/4$ и нулю с вероятностью $3/4$. В самом деле, чтобы α_N равнялось единице, должны случиться две вещи: на N-м месте последовательности должен быть орёл (вероятность $1/2$) и на $(N + 1)$-м месте должна идти решка (вероятность $1/2$). События эти относятся к разным монетам и независимы, так что получаем вероятность $1/4$. Математическое ожидание для α_N тоже равно $1/4$ (при $N \neq 100$).

Интересующая нас величина равна $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{100}$, и её математическое ожидание равно сумме математических ожиданий α_i, то есть $99/4$. ◁

Вернёмся теперь к ситуации, которую мы уже рассматривали: в мешке 10 шаров, из которых 6 белых и 4 чёрных, и мы дважды вытаскиваем из него шар. Раньше мы искали вероятность того, что оба раза будет вытащен чёрный шар, и вычислили её для двух вариантов задачи (когда вытащенный шар возвращают в мешок и когда его откладывают в сторону). Теперь вопрос другой:

$\boxed{85}$ Найдите математическое ожидание числа чёрных шаров среди двух вынутых шаров (эта случайная величина принимает значения 0, 1 или 2).

▹ **Первый способ**. Рассмотрим случай выборки без возвращения. Вероятность того, что оба шара будут чёрные (p_2), мы уже искали, она равна произведению $(4/10) \cdot (3/9) = 2/15$. Вероятность того, что будет нуль чёрных шаров (p_0), можно найти аналогичным образом: вероятность вытащить белый шар на первом шаге равна $6/10$, а вытащить белый на втором при условии белого на первом равна $5/9$, итого $p_0 = (6/10) \cdot (5/9) = 1/3$. Вероятность значения 1 теперь можно найти вычитанием:

$$p_1 = 1 - p_0 - p_2 = 1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{3} = \frac{15 - 2 - 5}{15} = \frac{8}{15}.$$

Отсюда находим математическое ожидание:

$$0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Для случая выборки с возвращением вероятности другие, но вычислить их столь же просто и — удивительным образом — математическое ожидание оказывается тем же самым.

Второй способ обходится почти без вычислений и заодно объясняет, почему для выборки без возвращений и с возвращениями ответ один и тот же. Интересующая нас случайная величина есть сумма двух, которые можно условно назвать «число чёрных шаров среди первого шара» (0 или 1) и «число чёрных шаров среди второго шара» (тоже 0 или 1). Каждая из величин принимает значения 0 и 1, и её математическое ожидание равно вероятности значения 1. Для первого шара эта вероятность равна $4/10 = 2/5$ (из десяти шаров четыре чёрных). Это, естественно, не зависит от того, возвращаем мы его или нет. Во втором случае вероятность оказывается такой же. Если первый шар возвращать, то это совсем очевидно. Но это верно и если шар не возвращать — в самом деле, второй вынутый шар может с равной вероятностью оказаться любым из десяти изначально лежавших в мешке.

Таким образом, обе случайные величины имеют математическое ожидание $2/5$ и их сумма имеет математическое ожидание $4/5$.

В сущности, это объяснение сводится к одной фразе: если среди всех шаров чёрные составляют определённый процент, то и среди вынутых в среднем процент будет тот же самый. ◃

17. Неравенство Чебышёва

$\boxed{86}$ В газете написали, что 10% граждан имеют доход, который в 15 или более раз превышает средний. Докажите, что автор статьи ошибся.

▷ Возьмём для примера десять человек, из которых один богатый составляет 10%. Пусть их средний доход x. Тогда их общий доход равен $10x$, а у богатого доход $15x$ или больше. Но так быть не может (мы считаем, что доход — величина неотрицательная, и если одно из слагаемых равно $15x$ или больше, то сумма не может быть $10x$).

В общем случае: пусть N человек имеют средний доход x. Их общий доход Nx. Пусть среди них есть 10% (то есть $N/10$) человек с доходом $15x$ или больше. Тогда суммарный доход этой «элиты» равен $15x \cdot (N/10) = 1{,}5Nx$, но он не может быть больше Nx, даже если остальные не получают совсем ничего. ◁

В общей форме это замечание называют иногда *неравенством Чебышёва* или *неравенством Маркова* (Пафнутий Львович Чебышёв (1821 – 1894) и Андрей Андреевич Марков (1856 – 1922) — русские математики, известные, среди прочего, работами по теории вероятностей). Вот его формулировка:

> Пусть α — случайная величина, принимающая неотрицательные значения, а m — её математическое ожидание. Тогда вероятность того, что значение величины α больше некоторой границы c, не превосходит m/c:
> $$\Pr[\alpha \geqslant c] \leqslant m/c.$$

В самом деле, пусть p — доля случаев (исходов), в которых случайная величина α не меньше c. Среднее значение величины может только уменьшиться, если в этих случаях заменить значение величины на c, а в остальных случаях — на нуль. Но после такой замены среднее станет равным pc, поэтому $m \geqslant pc$, откуда $p \leqslant m/c$, что и требовалось доказать.

87 В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

▷ Тот факт, что на выигрыши уходит 40% денег, полученных от продажи билетов, означает, что математическое ожидание выигрыша равно 40% от стоимости билета, то есть 40 рублей.

Выигрыш есть случайная величина, и по неравенству Чебышёва вероятность того, что её значение больше или равно 5000, не превосходит отношения $40/5000 = 0{,}8\% < 1\%$. ◁

Мы решили эту задачу, не зная конкретных правил лотереи. Искомая вероятность может быть разной и зависит от этих правил, но ни в каком случае — согласно неравенству Чебышёва — не превосходит 0,8%.

88 Приведите примеры ситуаций (правил лотереи), в которых искомая вероятность минимальна (равна нулю) и максимальна (достигает 0,8%). [Ответ: (1) на все билеты приходится небольшой выигрыш, скажем, по 40 рублей; (2) пусть 0,8% всех билетов являются выигрышными с выигрышем в 5000 рублей, а остальные — билеты без выигрыша.]

18. Неравновероятные исходы

В нашем определении вероятности всё начиналось с множества «равновозможных» (одинаково часто встречающихся) исходов. В реальности такие ситуации встречаются редко. Но не обязательно требовать равновозможности исходов.

Предположим для примера, что нам дали кособокий кубик и сказали, что вероятности выпадения $1, 2, 3, 4, 5, 6$ равны соответственно

исход	1	2	3	4	5	6
вероятность	0,11	0,24	0,17	0,07	0,28	0,13

Это означает, что при большом числе испытаний примерно в 11% случаев выпадает единица, примерно в 24% случаев — двойка и так далее. (Обратите внимание, что сумма вероятностей всех исходов равна единице.)

Тогда можно вычислить вероятности разных событий, сложив вероятности входящих в них исходов. Скажем, вероятность выпадения чётного числа очков получается как сумма вероятностей 2, 4 и 6 очков и равна $0{,}24+0{,}07+0{,}13 = 0{,}44$. (Если примерно в 24% всех случаев выпадает двойка, примерно в 7% всех случаев выпадает четвёрка и примерно в 13% случаев выпадает шестёрка, то всего на чётные числа приходится $24 + 7 + 13 = 44$ процента всех случаев.)

89 Какова вероятность получить нечётное число очков при бросании этого кубика?

▷ Она равна сумме вероятностей исходов 1, 3, 5, то есть $0{,}11 + 0{,}17 + 0{,}28 = 0{,}56$. Можно получить тот же ответ и сразу: поскольку это событие является дополнительным к выпадению чётного числа очков, получаем $1 - 0{,}44 = 0{,}56$. (Напомним, что сумма вероятностей всех исходов равна единице.) ◁

Пока что ничего интересного в этом нет: мы лишь складываем произвольно выбранные нами числа. Следующая задача немного сложнее:

90 Бросают две монеты — медную и серебряную, причём для каждой из них вероятность выпадения орла равна 0,3. Монеты независимы (точнее, независимы события, с ними связанные). Какова вероятность, что выпадет ровно один орёл?

▷ Имеются четыре возможных исхода. Будем обозначать буквами О и Р выпадение орла и решки, и сначала описывать медную монету, а потом серебряную. Тогда возможны четыре исхода: ОО, ОР, РО, РР. Теперь уже мы не можем считать, что они равновероятны. Вероятности этих исходов можно найти, исходя из условия задачи. Например, вероятность исхода ОО (два орла) равна произведению вероятностей выпадения орла на каждой монете, то есть $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09 = 9\%$. (Мы перемножаем вероятности, поскольку по условию события, связанные с разными монетами, независимы.)

Вероятность выпадения решки на медной (или серебряной) монете равна 0,7. Поэтому вероятность комбинации ОР есть $0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$. Такая же вероятность комбинации РО, а комбинация РР имеет вероятность $0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$.

ОО	$0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$
ОР	$0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$
РО	$0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$
РР	$0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$

Следовательно, событие «выпал один орёл», состоящее из исходов ОР и РО, имеет вероятность $0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42$. ◁

Для проверки вычислите сумму вероятностей найденных нами исходов и убедитесь, что она равна единице. Можно доказать это и без вычислений, раскрыв скобки:

$$1 = 1\times 1 = (0{,}3+0{,}7)\times(0{,}3+0{,}7) = 0{,}3\times 0{,}3+0{,}3\times 0{,}7+0{,}7\times 0{,}3+0{,}7\times 0{,}7.$$

91 Составьте аналогичную таблицу, если вероятность выпадения орла на медной монете равна 0,3, а на серебряной равна 0,4. Найдите математическое ожидание числа орлов при бросании двух таких монет.

19. Независимые испытания

По аналогии с задачей 90 можно рассматривать бросание N монет, у каждой из которой вероятность выпадения орла равна p, а вероятность выпадения решки равна $q = 1 - p$. При этом исход эксперимента записывается последовательностью из N букв О и Р, и вероятность исхода равна произведению вероятностей для каждой монеты.

Например, при $N = 3$ есть 8 исходов, и их вероятности таковы:

ООО	ООР	ОРО	ОРР	РОО	РОР	РРО	РРР
$p{\cdot}p{\cdot}p$	$p{\cdot}p{\cdot}q$	$p{\cdot}q{\cdot}p$	$p{\cdot}q{\cdot}q$	$q{\cdot}p{\cdot}p$	$q{\cdot}p{\cdot}q$	$q{\cdot}q{\cdot}p$	$q{\cdot}q{\cdot}q$

(вероятность каждого исхода равна произведению трёх вероятностей — по одной для каждой монеты).

$\boxed{92}$ Проверьте, что сумма вероятностей всех исходов равна 1.

[Указание: раскройте скобки в $(p+q)^3$.]

$\boxed{93}$ Проверьте, что (для этой таблицы) сумма вероятностей всех исходов, в которых на первой монете выпал орёл, равна p.

$\boxed{94}$ Проверьте, что выпадение орла на первой и второй монетах действительно независимы.

$\boxed{95}$ Найдите вероятности событий «выпало три орла», «выпало ровно два орла», «выпал один орёл» и «не выпало ни одного орла». Убедитесь, что сумма их вероятностей равна единице, вспомнив формулу для куба суммы.

$\boxed{96}$ Используя найденные вероятности, вычислите математическое ожидание числа выпавших орлов. Как получить тот же самый ответ, используя линейность математического ожидания?

$\boxed{97}$ Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для 4 монет, а также для произвольного числа монет.

Такой набор вероятностей (или, как говорят математики, *распределение вероятностей*) называется *распределением Бернулли.*

$\boxed{98}$ Для случая n независимых монет с вероятностями орла и решки p и q (где $p+q=1$, см. предыдущую задачу) рассмотрим события «число орлов чётно» и «число орлов нечётно». Покажите, что разница между вероятностями этих событий равна $|q-p|^n$.

Эта задача имеет такое «практическое» применение: если надо сыграть в орлянку, а монета кривая, то можно договориться бросить её определённое (и достаточно большое) число раз и посмотреть, чётно ли число орлов. Скажем, при $p=2/3$ и $q=1/3$ и десяти бросаниях разница между вероятностями получить чётное и нечётное число орлов равна $1/3^{10}$, что меньше двух тысячных процента.

20. Дисперсия

Поведение случайной величины не определяется её математическим ожиданием. Одно и то же математическое ожидание m может быть у двух совсем разных случайных величин. Представим себе, например, что одна из них лишь немного колеблется в обе стороны от m, а другая почти всегда сильно отличается от m в ту или другую сторону. (Мы уже видели подобные примеры, когда говорили о распределении оценок.)

Чтобы количественно измерять «разброс» значений случайной величины, находят *среднее значение квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.* А именно, если случайная величина принимает значения $a_1, \ldots, a_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$, то сначала надо вычислить математическое ожидание

$$m = p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n,$$

а затем вычислить средний квадрат отклонения от m (математическое ожидание квадрата отклонения от m):

$$D = p_1(a_1 - m)^2 + \ldots + p_n(a_n - m)^2.$$

99 Покажите, что если не возводить в квадрат (убрать показатель степени у скобок), то по этой формуле получится нуль.

Другое название для среднего квадрата отклонения — *дисперсия* случайной величины (по-русски можно было бы сказать «разброс»).

100 Случайная величина — число очков на честном кубике. Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

▷ Среднее равно $(1+2+3+4+5+6)/6 = 3{,}5$. Отклонения от 3,5 и их квадраты соответственно равны

1	2	3	4	5	6
−2,5	−1,5	−0,5	0,5	1,5	2,5
6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25

Среднее значение квадрата отклонения (среднее чисел в нижней строке) равно $17{,}5/6 = 2\frac{11}{12}$.

Ответ: математическое ожидание равно 3,5, дисперсия равна $2\frac{11}{12}$. ◁

101 Случайная величина принимает значения 0 и 1 с равными вероятностями (каждое имеет вероятность $1/2$). Найдите её математическое ожидание и дисперсию.

▷ Математическое ожидание равно $1/2$, отклонение равно $\pm(1/2)$, и его квадрат всегда равен $1/4$. Ответ: математическое ожидание равно $1/2$, дисперсия равна $1/4$. ◁

102 Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, которая принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью q (при этом $p + q = 1$).

▷ Математическое ожидание равно p. Квадрат отклонения от математического ожидания равен $(1-p)^2 = q^2$ с вероятностью p и равен p^2 с вероятностью q. Его математическое ожидание равно

$$pq^2 + qp^2 = pq(p+q) = pq.$$

Ответ: математическое ожидание равно p, дисперсия равна pq. ◁

103 Как изменятся математическое ожидание и дисперсия случайной величины, если все её значения увеличить в два раза? в k раз?

[Ответ: ожидание умножится на k, а дисперсия — на k^2.]

104 Докажите, что дисперсия случайной величины равна разнице между математическим ожиданием её квадрата и квадратом математического ожидания:

$$\mathsf{D}\alpha = \mathsf{E}(\alpha^2) - (\mathsf{E}\alpha)^2.$$

(здесь D обозначает дисперсию, а E — математическое ожидание, от слова "expectation", по-английски «ожидание»).

▷ По определению

$$\mathsf{D}\alpha = \mathsf{E}(\alpha - (\mathsf{E}\alpha))^2.$$

Раскрыв скобки и воспользовавшись линейностью математического ожидания, получаем

$$\mathsf{D}\alpha = \mathsf{E}(\alpha^2) - \mathsf{E}(2\alpha \cdot \mathsf{E}\alpha) + \mathsf{E}((\mathsf{E}\alpha)^2).$$

В последнем слагаемом математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине. В предпоследнем можно вынести константу $2\mathsf{E}\alpha$ и получится

$$\mathsf{D}\alpha = \mathsf{E}(\alpha^2) - 2\mathsf{E}\alpha \cdot \mathsf{E}\alpha + (\mathsf{E}\alpha)^2.$$

Приводя подобные члены, получаем требуемое. ◁

105 Используя предыдущую задачу, решите задачу 73 на с. 27.

21. Закон больши́х чисел: формулировка

Критически настроенный читатель недовольно отметит, что все наши рассуждения о вероятностях сводились в основном к простым подсчётам долей и процентов — это, конечно, дело важное, но заслуживает ли оно гордого наименования «теории»? И будет отчасти прав — но теория вероятностей прежде всего есть некоторый язык, к которому нужно привыкнуть, прежде чем сказать на нём что-нибудь содержательное.

Сейчас мы попробуем привести пример такого содержательного результата и рассмотрим так называемый *закон больших чисел*. Он отвечает на следующий вопрос. Предположим, что мы проводим большую серию испытаний (например, бросаний кубика) и считаем частоту «успехов». Она, как мы говорили, на практике обычно бывает близка к вероятности. Но насколько близка? как оценить типичное отклонение частоты от вероятности?

Пусть, скажем, мы бросаем монету тысячу раз. Трудно ожидать, что будет ровно 500 орлов и 500 решек. Но какое отклонение следует считать «типичным»? плюс-минус две-три единицы или скорее плюс-минус несколько сотен? Мы увидим, что на самом деле речь скорее идёт о нескольких десятках.

Чтобы ответить на этот вопрос математически, прежде всего нужно поставить его математически. Мы уже рассматривали опыт, в котором мы бросаем n монет (или n раз бросаем одну монету), вероятность появления орла в каждом испытании равна p, а решки q. Испытания независимы: вероятность того, что первый раз (скажем) выпадет орёл, второй раз решка, третий раз орёл и т.п. равна произведению n соответствующих множителей (p для орла и q для решки).

Далее мы рассматриваем случайную величину «число орлов». Закон больших чисел утверждает про неё следующее:

(1) *математическое ожидание этой величины равно np*;

(2) *дисперсия этой величины равна npq*;

(3) *вероятность того, что число орлов отличается от математического ожидания np более чем на k в ту или другую сторону, не больше npq/k^2.*

Что даёт это для нашего примера ($n = 1000$, $p = q = 1/2$)? Математическое ожидание числа орлов равно $np = 500$. Дисперсия равна $npq = 250$. (Напомним, что дисперсия есть средний квадрат отклонения, поэтому «типичное отклонение» можно оценить как $\sqrt{250} \approx 16$.)

Третье утверждение проиллюстрируем на таком примере. Какова вероятность того, что частота орлов отклоняется от $1/2$ более чем на $1/10$, то есть больше 0,6 или меньше 0,4? Это значит, что число орлов больше 600 или меньше 400. Положив $k = 100$, получаем, что вероятность этого события не больше $1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5/10\,000 = 250/10\,000 = 2{,}5\%$.

106 Оцените аналогичным образом вероятность того, что при миллионе бросаний честной монеты частота отличается от 0,5 более чем на 0,01 (то есть меньше 0,49 или больше 0,51).

22. Закон больших чисел и жизнь

Что же из этого следует? Практик сказал бы: видя, что при игре в орлянку число орлов не в точности равно числу решек, не торопитесь обвинять противника в фальсификации и хвататься за канделябр, а сначала сравните отклонение с предсказываемым законом больших чисел. Ещё более циничный практик добавил бы: пытаясь сфальсифицировать «случайные» данные, не старайтесь подогнать их в точности под требуемые вероятности.

Есть очень выразительная иллюстрация к этому, но чтобы её оценить, нужно немного поговорить о биологии и истории.

Сначала о биологии. Одним из первых достижений генетики (раздела биологии, изучающего наследственность) были законы Менделя. В середине XIX века Мендель (G.J. Mendel), монах в Брно (тогда в Австрии), ставил опыты по скрещиванию растений (в частности, гороха) и изучал законы наследования признаков. В начале XX века, вместе с другими биологическими открытиями (наблюдениями Вейсмана (F.L.A. Weismann) хромосом в делящихся клетках, работами Моргана (T.H. Morgan) о связи передачи признаков с полом) это заложило основы генетики. В это время гены были ещё абстрактным понятием, их связь со строением белков и кодирование белков последовательностями символов в ДНК были открыты гораздо позднее, во второй половине XX века. (Всё вместе — от работ Менделя до расшифровки генома человека — одно из величайших открытий в истории человечества, так что стоит порыться в энциклопедиях и в интернете, скажем, в так называемой «википедии» — русской или английской.)

Теперь об истории. В 1940–1950-е годы генетика в СССР была объявлена буржуазной лженаукой, опровергнутой единственно правильным и подлинно научным марксистско-ленинским учением и передовой советской мичуринской биологией. (Мичурин — селекционер, скрещивавший самые разнообразные растения, — был объявлен знаменем советской биологии.) Можно гадать, что послужило причиной такой нелюбви к генетике со стороны власти, марксистско-ленинских «философов» и малограмотных «биологов» типа «народного академика Трофима Лысенко». Наверно, тут сложилось многое: Мендель был монах, работы по генетике начинались за границей (что препятствовало отстаиванию обязательного в те годы «приоритета русской науки»), а главное, наука эта довольно абстрактная и сложная, и её проще охаять, чем изучить — традиция, заложенная ещё классиками марксизма[3] и блестяще продолженная Лениным[4] и Сталиным.[5] (Видимо, по аналогич-

[3]В первую оцередь Энгельсом; см. его книги «Анти-Дюринг» и «Диалектика природы», в которых органически сочетаются апломб и невежество: например, он поучает великого физика Дж. Томсона (лорда Кельвина), что в своём учебнике тот иногда определяет «живую силу» как mv, а иногда как $mv^2/2$ — Энгельс не знал, видимо, что в физике бывают импульс и энергия и что это не одно и то же!

[4]См. его книгу «Материализм и эмпириокритицизм», в которой Ленин «критикует» популярные (но всё равно довольно трудные и явно не понятые Лениным) очерки великого математика А. Пуанкаре. Эта книга и упомянутые выше книги Энгельса были предметом обязательного конспектирования в вузах и издавались миллионными тиражами; видимо, они сохранились во многих библиотеках, так что можете убедиться сами.

[5]А вот его работу «Марксизм и вопросы языкознания» (!) найти труднее — хотя она была

ным причинам не одобрялись квантовая механика, теория относительности, математическая логика и др.) К генетике был приклеен ярлык «менделизма-вейсманизма-морганизма» и обвинение в оном легко могло стать причиной увольнения «с волчьим билетом», плавно переходящего в арест с дальнейшим осуждением и лагерем или расстрелом. Ошалев от безнаказанности и поддержки начальства, «мичуринские биологи» доходили до полного абсурда — например, некоторые из них утверждали, что кукушки не кладут яйца в чужие гнёзда, а перерождаются из других птиц, или что из растёртых клеток гидры образуются новые клетки (эти безграмотные работы О. Б. Лепешинской были удостоены *Сталинской* премии). И т. д. и т. п.

Но в начале, когда «советская биология» не вошла в полную силу, можно было с ней спорить даже в печати. И один из основателей теории вероятностей, великий математик Андрей Николаевич Колмогоров, опубликовал статью «Об одном новом подтверждении законов Менделя» (Доклады АН СССР, 1940, том XVII, № 1). Оказалось, что последователи Лысенко, желая опровергнуть Менделя, повторили его опыты, в которых в популяции растений некоторые признаки распределялись в отношении 3 : 1 (вероятности 3/4 и 1/4). И, как они считали, опровергли Менделя, поскольку распределение признаков отличалось от теоретического. Колмогоров проанализировал их данные, которые они неосторожно опубликовали в статье с характерным названием «Ещё раз о „гороховых законах“» (Н. М. Ермолаева, журнал «Яровизация», 1939, вып. 2(23), с. 79–86; в конце этой статьи, среди прочего, написано, что «сроки, масштабы, а главное, результаты, предусматриваемые теорией менделизма, непригодны для нашей советской действительности»).[6] Оказалось, что отклонения укладываются в границы, предсказываемые законами теории вероятностей, и, как пишет Колмогоров, «материал этот, вопреки мнению самой Н. И. Ермолаевой, оказывается блестящим новым подтверждением законов Менделя». С другой стороны, Колмогоров намекает на то, что некоторые не в меру ретивые последователи Менделя, желая «спасти» его законы и не зная теории вероятностей, опубликовали данные, в которых отношение значительно ближе к теоретическому 3 : 1, чем это можно ожи-

напечатана в газете «Правда» и издана в виде брошюры массовым тиражом, но после того, как в 1953–1956 годах «оказался наш отец не отцом, а с⟨...⟩ю» (А. Галич), эту брошюру отовсюду изымали.

[6] В поддержку Ермолаевой выступил также «доктор философских наук, профессор математики» Э. Кольман. В статье с ещё более характерным названием «Извращения математики на службе менделизма» он написал, среди прочего, что, «как писал Ленин, ⟨...⟩ статистика, приводящая к обезличке, превращается в пустейшую и вреднейшую „игру в цифирь“», и что «до этого требования [судить о существовании элементарных частиц на основе статистических методов] додумались лишь самые яростные идеалисты типа Гейзенберга» [Гейзенберг — великий физик, один из основателей квантовой механики]. По поводу статьи Кольмана Колмогоров ограничивается кратким замечанием: «работа Кольмана, не содержащая нового фактического материала, ⟨...⟩ целиком основана на непонимании изложенных в нашей заметке обстоятельств».

дать согласно законам теории вероятностей (и тем самым есть основания подозревать фальсификацию результатов опыта).

К счастью, публикация Колмогорова последствий не имела — в том смысле, что его не стали преследовать за вейсманизм-морганизм (но, конечно, и расцвету «мичуринской биологии» это помешать не могло).

23. Доказательство закона больших чисел

Это — самый трудный с математической точки зрения раздел книги. Но не потому, что доказательство требует каких-то сложных трюков, а потому, что в нём существенно используются почти все введённые нами понятия и нужно к ним привыкнуть.

Первое утверждение (о математическом ожидании) нам уже встречалось. Величина «число орлов на i-й монете» принимает значения 0 и 1, и вероятность значения 1 равна p. Поэтому её математическое ожидание есть p. Общее число орлов равно сумме n таких величин, поэтому по линейности его математическое ожидание есть np.

Для доказательства второго утверждения нам понадобятся некоторые вспомогательные определения и факты.

Пусть даны две случайные величины α и β. Пусть величина α принимает n значений $a_1, \ldots, a_n$, а величина β принимает m значений $b_1, \ldots, b_m$. Рассмотрим события $\alpha = a_i$ и $\beta = b_j$ для некоторых i и j. Если эти события оказываются независимыми при любых i и j, то величины α и β называются *независимыми случайными величинами*. Вспоминая определение независимых событий, можно сказать так: величины α и β независимы, если вероятность события «$\alpha = a_i$ и $\beta = b_j$» равна произведению вероятности события «$\alpha = a_i$» и вероятности события «$\beta = b_j$».

Например, если мы бросаем два кубика и считаем равновероятными все пары исходов, то событие «на первом кубике выпала тройка и на втором выпала пятёрка» имеет вероятность $1/36$, и это равно произведению вероятностей событий «на первом кубике выпала тройка» ($1/6$) и «на втором кубике выпала пятёрка» (также $1/6$). То же самое верно и для других значений (не только тройки и пятёрки), поэтому случайные величины «число очков на первом кубике» и «число очков на втором кубике» независимы.

107 Докажите, что если величины α и β независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий.

Заметим, что аналогичное утверждение для суммы двух величин было верно без всяких предположений о независимости.

▷ По определению, математическое ожидание величины α есть сумма

$$\sum a_i \Pr[\alpha = a_i]$$

(значение величины a_i умножается на вероятность, с которой она принимает это значение). Для величины β получаем сумму

$$\sum b_j \Pr[\beta = b_j].$$

Если перемножить эти две суммы и раскрыть скобки, то получится двойная сумма (по всем парам индексов i и j):

$$\sum a_i b_j \Pr[\alpha = a_i] \Pr[\beta = b_j].$$

По предположению величины α и β независимы, поэтому эту сумму можно переписать как

$$\sum a_i b_j \Pr[\alpha = a_i, \beta = b_j],$$

и мы получаем сумму значений величины $\alpha \cdot \beta$ с коэффициентами, равными вероятностям этих значений, то есть математическое ожидание величины $\alpha \cdot \beta$. (Тут есть формальная неточность: возможен случай, когда одно и то же произведение $a_i b_j$ получается при разных парах (i, j); тогда соответствующие члены надо сгруппировать и вынести $a_i b_j$ за скобки.) ◁

Важное свойство независимых величин даётся следующей задачей:

108 Докажите, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

▷ Как мы видели в задаче 104 (с. 43), дисперсию суммы величин $\alpha + \beta$ можно записать как

$$\mathsf{E}((\alpha + \beta)^2) - (\mathsf{E}(\alpha + \beta))^2.$$

Раскрыв скобки в первом слагаемом и используя линейность математического ожидания во втором, получаем

$$\mathsf{E}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\mathsf{E}\alpha + \mathsf{E}\beta)^2$$

или (снова применяем линейность)

$$\mathsf{E}(\alpha^2) + 2\mathsf{E}(\alpha\beta) + \mathsf{E}(\beta^2) - (\mathsf{E}\alpha)^2 - 2(\mathsf{E}\alpha)(\mathsf{E}\beta) - (\mathsf{E}\beta)^2.$$

Осталось использовать предположение о независимости (до сих пор не использованное), благодаря которому $\mathsf{E}(\alpha\beta) = (\mathsf{E}\alpha)(\mathsf{E}\beta)$, и снова сослаться на ту же задачу 104. ◁

Эта задача позволяет доказать утверждение (2) закона больших чисел. В самом деле, пусть α_i есть величина «число орлов на i-й монете». Мы уже знаем, что её дисперсия равна pq. А нас интересует дисперсия суммы величин $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Мы хотим сказать, что поскольку эти величины независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Но формально мы не определяли независимости для нескольких величин, поэтому надо прибавлять их по одной: если мы уже знаем, что $\mathsf{D}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1}) = (i-1)pq$ и что величины α_i и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1}$ независимы, то по доказанному получаем

$$\mathsf{D}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + \alpha_i) = (i-1)pq + pq = ipq.$$

Осталось доказать независимость:

109 Величины $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1}$ и α_i независимы.

▷ Нам надо доказать независимость событий $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} = x$ и $\alpha_i = y$. Но первое из них определяется результатами бросания первых $i-1$ монет, и вероятности этих результатов не изменятся, если добавить условие $\alpha_i = y$, так что условные вероятности равны безусловным, что и даёт независимость.◁

Наконец, последнее утверждение закона больших чисел легко следует из неравенства Чебышёва: если среднее значение квадрата отклонения равно npq, то вероятность того, что этот квадрат будет больше или равен k^2 (то есть что отклонение достигнет k в любую сторону) не больше npq/k^2, что и требуется. (Заметим, что квадрат отклонения всегда неотрицателен.)

Доказательство закона больших чисел закончено.

В заключение обсуждения закона больших чисел — замечание для читателей с философским складом мышления (возможно, загадочное, но зато короткое). Иногда говорят, что закон больших чисел «обосновывает» применение теории вероятностей к практике, поскольку «доказывает», что при большом числе испытаний частота должна быть близка к вероятности. На самом деле тут есть определённый порочный круг: закон больших чисел говорит лишь, что большие уклонения частоты от вероятности *маловероятны*, и если мы не принимаем заранее, что вероятность события близка к частоте его появления или хотя бы что события с малой вероятностью практически не происходят, то утверждение закона больших чисел ничего конкретного нам не говорит.

Утверждение о том, что «события с малой вероятностью не происходят», так или иначе уточнённое, часто рассматривают как связующее звено между математической теорией вероятностей и утверждениями о реальном мире. Его иногда называют «принципом Курно» (по имени французского экономиста и математика О. Курно, 1801–1877) или «принципом Бореля» (по имени выдающегося французского математика Э. Бореля, 1871–1956). В своей книжке «Вероятность и достоверность» (русский перевод: М.: Физматгиз, 1961) Борель пишет: «не следует бояться применить слово *достоверность* для обозначения вероятности, которая отличается от единицы на достаточно малую величину». (И действительно, в практической жизни естественно в большей степени принимать во внимание события, которым теория приписывает бо́льшую вероятность, — и потому, если вычисленная нами вероятность какого-то опасного события меньше вероятности попасть под метеорит, то вряд ли стоит опасаться этого события. Но принцип этот следует применять с осторожностью и не уподобляться профессору математики из анекдота, который решил, что вероятность наличия бомбы в самолёте ещё недостаточно мала, чтобы ей можно было пренебречь, но вероятность наличия двух бомб уже достаточно мала — и потому одну возил с собой!)

24. Парадоксы теории вероятностей

С вероятностями и их оценкой связано множество парадоксов, которые часто и подолгу обсуждают самые разные люди — от домохозяе[в/к] до философов науки (и не всегда легко отличить тех от других). Большинство недоразумений связано с нечёткой формулировкой изначальных предположений. Мы уже не раз говорили, что любой подсчёт вероятностей начинается с некоторой гипотезы (все грани кубика встречаются одинаково часто, в половине случаев выпадает орёл и т. п.), и в случае неясностей стоит прежде всего попытаться отчётливо сформулировать эту гипотезу (указать вероятностное пространство и распределение вероятностей на нём, как сказали бы математики).

Случайное направление. *Некто приходит на станцию метро в случайный момент и садится в первый пришедший поезд* (*в ту или другую сторону*). *Оказывается, что в одну сторону он едет гораздо чаще, чем в другую. Как так может быть?*

Конечно, можно допустить, что в одну сторону больше рейсов, чем в другую (а обратно поезда перегоняют ночью или в обход по другой ветке). Но нет ли более простого объяснения?

Оказывается, есть. Чтобы понять это, уточним слова «приходит на станцию в случайный момент». Пусть, скажем, он приходит с 10:00 до 11:00, при этом в одной шестидесятой всех случаев в первую минуту (с 10:00 до 10:01), в одной шестидесятой — во вторую минуту и т. д. Если при этом поезда в одну сторону идут в 10:00, 10:10, 10:20, . . . , а в другую — в 10:02, 10:12, 10:22, . . . , то в обе стороны они идут с десятиминутными интервалами, но шансы поехать в ту и в другую сторону относятся как 8 к 2.

Какие автобусы переполнены? (Ю. Неретин). *Двое кончают работу одновременно и идут к автобусной остановке вместе. Каждый уезжает на первом подъехавшем автобусе: одному нужен* 130*-й автобус, другому —* 103*-й. При этом первый считает, что в среднем* 130*-е автобусы более полные, а второй — что* 103*-е. Почему так может быть?* (Речь не идёт о зависти или о том, что каждый учитывает себя как лишнего пассажира.)

Дело тут в том, что каждый оценивает заполненность «своего» автобуса по тому автобусу, в который он сел, а «чужого» — по проходящим до этого автобусам. Представим себе для примера, что автобусы каждого маршрута ходят парами: сначала долго нет, а потом сразу два с небольшим промежутком. При этом первый автобус в каждой паре полный (накопился народ), а второй почти пустой. Тогда ожидающий «своего» автобуса скорее всего сядет в полный (вероятность попасть между двумя близкими автобусами пары мала), а проезжающие «чужие» автобусы будут и полные, и пустые.

Телешоу. *Ведущий приносит три одинаковых закрытых коробки, в одной из которых лежит приз. Участник выбирает одну из коробок, после чего ведущий (который знает, где на самом деле лежит приз) открывает одну из двух оставшихся, показывает, что там приза нет, и предлагает участнику подумать ещё и подтвердить или изменить свой выбор. Как должен поступить участник?*

Оказывается, что смена выбора вдвое увеличивает шансы выиграть приз. Другими словами, игрок, который всегда меняет свой выбор, будет выигрывать вдвое чаще, чем игрок, который этого не делает. Хотя многим это кажется парадоксальным, объяснение совсем простое. Пусть игрок решил, что он выберет случайно одну из трёх коробок и затем будет стоять на своём. Тогда вся процедура с открыванием других коробок роли не играет, и он выиграет, если сразу же укажет правильную коробку. Это будет происходить примерно в трети всех игр (разумное предположение, если игрок не умеет видеть сквозь коробки и выбирает коробку случайно).

Рассмотрим теперь другого игрока, который заранее решил, что после открывания пустой коробки изменит свой выбор (и укажет на третью коробку — не ту, которую открыл ведущий, и не ту, на которую игрок указал изначально). В каком случае эта стратегия приведёт к успеху? Это случится, если в изначально выбранной коробке приза не было, то есть примерно в двух третях игр (при тех же предположениях).

Наш анализ предполагает, что игра проводится по одному и тому же сценарию многократно — и что этот сценарий именно таков, как описано (ведущий сначала кладёт приз в случайно выбранную коробку, а затем открывает одну из пустых коробок). Но из этого анализа не следует никаких практических выводов, если вы попали на телешоу первый и последний раз в жизни и не знаете сценария шоу (хотя и верите, что ведущий вас не обманывает и что действительно в одной из коробок есть приз).

В самом деле, представим себе такой сценарий: если игрок указал на коробку с призом, то ведущий открывает одну из пустых коробок и предлагает подумать ещё, а если игрок указал на пустую коробку, то ведущий немедленно открывает её. При таком сценарии две трети игр сразу же кончатся без выигрыша, а в трети случаев игроку будет предложено сделать второй ход (и менять свой ход в этом сценарии означает отказываться от выигрыша).

Ещё одно замечание: мы не уточнили, как ведущий выбирает пустую коробку (если есть выбор). Это не важно для нашего анализа — всё равно игрок, всегда меняющий свой выбор, выигрывает в $2/3$ всех игр. (Но условные вероятности в конкретных ситуациях могут быть другими: если, скажем, мы знаем, что ведущий всегда выбирает левую из двух пустых коробок, мы указали на среднюю, а он открыл правую, то приз наверняка в левой!)

Два конверта. *Ведущий приносит два одинаковых конверта и говорит, что в них лежат деньги, причём в одном вдвое больше, чем в другом. Двое участников берут конверты и тайком друг от друга смотрят, сколько в них денег. Затем один говорит другому: «Махнёмся не глядя?»* (*предлагая поменяться конвертами*). *Стоит ли второму соглашаться?*

Вообще-то тут дело ясное: игра симметрична, и никаких причин считать, что у противника шансы лучше и меняться с ним, нет. С другой стороны, игрок может рассуждать так: в моём конверте лежит сколько-то рублей, скажем, a. Это значит, что у другого игрока либо $2a$ рублей, либо $a/2$ рублей. В первом случае, согласившись на обмен, я выиграю a рублей; во втором — проиграю $a/2$ рублей. Так как возможности выиграть и проиграть равновероятны, а выигрыш превышает проигрыш, то обмен мне выгоден.

В чём ошибка? Как всегда, надо понять схему проведения опыта. Допустим, что такая игра проводится многократно. Условие неразличимости конвертов означает, что примерно в половине случаев у первого игрока будет вдвое меньше денег, чем у второго, а в половине случаев наоборот. Но чтобы проанализировать игру более детально, нам надо знать, как действует ведущий, вкладывая деньги в конверты. Тут возможны разные варианты.

Пусть, например, ведущий всегда кладёт в один конверт рубль, а в другой — два. Тогда игрок, обнаруживший в своём конверте рубль, всегда проигравший, а игрок, обнаруживший два — всегда выигравший. И если игрок, видя рубль, думает, что с вероятностью $1/2$ (в половине случаев) он на обмене выиграет рубль, а с вероятностью $1/2$ (в другой половине случаев) проиграет полтинник, то он неправ. Другими словами: вероятность выиграть от обмена действительно равна $1/2$, но вероятность выиграть *при условии, что в конверте данная сумма a*, вовсе не равна $1/2$, и вычисление среднего выигрыша неверное. (При описанной схеме действий ведущего вероятность выиграть от обмена равна единице при $a = 1$ и нулю при $a = 2$.)

Для большей убедительности можно рассмотреть какой-нибудь другой способ действий ведущего. Предположим, например, что в половине случаев он кладёт в конверты рубль и два, а в половине случаев — два и четыре.

Тогда есть четыре равновероятные возможности:

- у первого игрока рубль, у второго — два;
- у первого игрока два рубля, у второго — рубль;
- у первого игрока два рубля, у второго — четыре;
- у первого игрока четыре рубля, у второго — два.

На каждую из них приходится примерно четверть всех случаев. Что можно сказать о выгодности обмена? Если первый игрок видит рубль, то с вероятностью 100% обмен ему выгоден (+1 рубль при обмене). Если первый игрок видит в своём конверте два рубля, то в половине этих случаев у его противника рубль (−1 рубль), а в половине случаев у противника четыре рубля (+2 рубля). Наконец, если у первого четыре рубля, то обмен с вероятностью 100% невыгоден (−2 рубля).

Таким образом, при этой схеме рассуждение с $+a$ и $-a/2$ оказывается правильным для случая, когда первый игрок видит у себя два рубля (при этом шансы выиграть и проиграть равны, и в среднем обмен ему выгоден), но неверным в двух других случаях.

Говоря математически, наш парадокс показывает лишь, что не существует такого распределения вероятностей на конвертах (с конечным числом вариантов), при котором условные вероятности проиграть и выиграть при условии «в конверте первого игрока оказалось a рублей» были бы равны при любом a.

С практической точки зрения тот факт, что вероятность выигрыша при условии наличия a рублей зависит от a, придаёт задаче психологический оттенок: игрок должен прикинуть, насколько его противник разбирается в ситуации и что можно сказать про количество денег в конвертах, если противник предлагает обмен, считая его для себя выгодным.

(Более формальная версия парадокса, отчасти ставящая под сомнение приведённое выше объяснение, такова. Рассмотрим распределение вероятностей, при котором содержание конвертов может быть равно $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 8)$ и так далее до бесконечности, а вероятности этих вариантов убывают как геометрическая прогрессия со знаменателем, близким к единице. Для каждого из вариантов вероятность получить тот или другой конверт равна $1/2$. Если у игрока на руках оказалось a (и $a \neq 1$), то вероятность того, что у другого игрока $2a$, лишь немного меньше того, чем вероятность $a/2$. Если же $a = 1$, у другого игрока наверняка больше. Поэтому по математическому ожиданию обмен выгоден при любом a. Нельзя ли прийти к противоречию, заметив, что у каждого из игроков математическое ожидание (без условий) меньше, чем у другого? Нет, так как у обоих игроков математическое ожидание бесконечно.)

Удвоение ставок. *Сыграем в орлянку (или любую другую честную игру с равными шансами выиграть и проиграть) на рубль. Если мы выиграли, уходим. Если проиграли, удваиваем ставки и так далее — до первого выигрыша. В итоге к моменту ухода мы отыграемся и даже выиграем рубль:* $(-1)+2=1$, $(-1)+(-2)+4=1$, $(-1)+(-2)+(-4)+8=1$ *и так далее. Получается, что мы гарантируем себе выигрыш, в то время как в среднем в честной игре мы должны оставаться при своих. Как же так?*

Математики скажут, что этот парадокс демонстрирует, что к среднему значению «суммы» бесконечно многих слагаемых надо относиться с осторожностью: вполне может быть, что среднее каждого слагаемого нулевое, а среднее всей суммы положительно.

Оставаясь в рамках здравого смысла, парадокс можно анализировать так. Пусть мы приходим в казино каждое утро и играем по описанной схеме. Примерно в половине всех случаев мы уйдём сразу, выиграв рубль. В другой половине случаев мы проиграем рубль и поставим два: в четверти случаев мы выиграем и снова уйдём с рублём, а в четверти проиграем 3 рубля. Таким образом, после двух ставок суммарный результат такой: в $3/4$ случаев мы выигрываем рубль, в $1/4$ случаев проигрываем 3 рубля. После трёх ставок ситуация аналогична: в $7/8$ случаев мы выигрываем рубль, а в $1/8$ случаев проигрываем 7 рублей. Так что средний выигрыш и после двух, и после трёх ставок действительно нулевой. То же самое будет и при любом ограничении на число ставок: несложно проверить, что если мы ставим максимум N раз, то с вероятностью $1-1/2^N$ мы выигрываем рубль, а с вероятностью $1/2^N$ проигрываем 2^N-1 рублей, и среднее равно нулю.

Парадокс с положительным выигрышем получается, лишь если мы предположим, что количество ставок не ограничено — но о математических трудностях мы уже говорили, а практически, надо полагать, казино откажется играть на большие суммы без соответствующего обеспечения со стороны игрока.

Парадокс Бернулли. *Лотерейный билет даёт право сыграть в такую игру: в половине случаев (с вероятностью* $1/2$*) мы выигрываем рубль, в половине оставшихся (с вероятностью* $1/4$*) мы выигрываем два рубля, в половине из оставшихся (с вероятностью* $1/8$*) мы выигрываем* 4 *рубля и так далее (вероятности делятся пополам, а выигрыши удваиваются). Какова «справедливая цена» такого билета?*

Лотерею с такими правилами можно представлять себе так: бросают монеты до первого появления орла и платят 2^n, где n — число решек до появления орла (каждая решка до орла удваивает ставку).

Вообще-то мы говорили, что «справедливая цена» лотерейного билета — это математическое ожидание выигрыша, тогда мы будем в среднем оставаться при своих. Здесь математическое ожидание получается бесконечным, если пытаться вычислять его как сумму произведений вероятностей на выигрыш:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Между тем вряд ли кто согласится дорого покупать такой билет. (Прикиньте, стали ли бы вы платить за него, скажем, 1000 рублей? Скорее всего нет.)

Этот парадокс обсуждался в статье Даниила Бернулли, опубликованной в журнале Санкт-Петербургской академии наук в 1738 году, поэтому получил называние «петербургского парадокса». С тех пор философы и экономисты написали про это множество статей, и среди их соображений немало разумных. Например, сам Даниил Бернулли предлагал такое объяснение: субъективная полезность денег не пропорциональна их количеству, и лишняя тысяча сильно обрадует бедняка и почти безразлична богачу, а при расчёте справедливой цены надо учитывать именно эту самую полезность.

Можно предложить и другое объяснение: поскольку общее количество денег в мире не так велико (ну, или количество товаров — если допускать безналичные деньги), то обязательства организаторов лотереи не могут быть выполнены при большом числе решек и реально в сумме для математического ожидания остаётся совсем немного членов (если оценить с запасом число рублей в мире как 2^{100}, математическое ожидание будет не больше 50 рублей).

Наконец, можно отметить и следующее соображение: говоря о математическом ожидании как «справедливой цене», мы обосновывали это тем, что в среднем при большом числе игр игрок будет оставаться при своих. Но чтобы малая вероятность повлияла на среднее, необходимо большое число испытаний. Скажем, чтобы на деле воспользоваться обещанием выплатить 2^{20} рублей, если до первого орла будет 20 решек, нам нужно, чтобы такое хоть раз произошло. На это разумно рассчитывать, лишь если число игр сравнимо с 2^{20}, так что соображения о среднем становятся осмысленными лишь при нереально большом числе игр.

Вероятностный вариант парадокса лжеца. Известный «парадокс лжеца» состоит в следующем. Некто говорит «Это моё утверждение ложно.» Будет ли его утверждение истинным или ложным? (Любой ответ приводит к противоположному.) Парадокс лжеца имеет забавный вероятностный вариант (`twitter.com/#!/jbrownridge`, 28 октября 2011):

Если вы выберете ответ на этот вопрос случайно, какова вероятность правильного ответа?

(а) 25%; (б) 50%; (в) 60%; (г) 25%.

25. Коротко о разном

В этом разделе собраны задачи и короткие заметки на разные темы; во многих случаях они выходят за рамки схемы подсчёта частот, о которой мы говорили (скажем, множество возможных исходов эксперимента бесконечно), но всё же выглядят достаточно разумно с точки зрения здравого смысла.

Математическое ожидание числа бросаний

Будем бросать честную монету, пока не выпадет орёл; как только выпадет, останавливаемся. Каково математическое ожидание числа бросаний (включая последнее, с орлом)?

Одного бросания достаточно с вероятностью $1/2$, двух — с вероятностью $1/4$, трёх — с вероятностью $1/8$ и так далее, поэтому надо искать сумму ряда $\sum n/2^n$. Это несложно, но удобно объяснить вычисление в терминах теории вероятностей.

Пусть искомое среднее (математическое ожидание) равно S. В половине случаев достаточно одного бросания (среднее в этой части равно 1), а в половине случаев первое бросание не помогает и мы начинаем всё с нуля (в этой половине среднее равно $1 + S$). Получаем уравнение

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + S),$$

из которого мы находим, что $S = 2$.

Можно предложить и другое объяснение. Будем повторять опыт (бросание монеты до первого орла) много раз, записывая подряд результаты всех бросаний. Другими словами тот же процесс можно описать так: мы разрезаем случайную последовательность орлов и решек (результаты бросаний) на участки, заканчивающиеся орлом, то есть присоединяем к орлу все предшествующие ему решки. Число таких групп будет равно числу орлов, то есть примерно половине общего числа бросаний. Следовательно, средний размер группы (общее число бросаний, делённое на число групп) примерно равен 2.

110 Найдите среднее число бросаний игрального кубика, если мы останавливаемся, получив шестёрку.

111 Найдите среднее число бросаний монеты, если мы останавливаемся, получив двух орлов (не обязательно подряд).

Немного сложнее найти среднее число бросаний монеты, если мы останавливаемся, получив двух орлов *подряд*. Усредняя отдельно в зависимости от итогов первого бросания, получаем, что

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + S) + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + S_0),$$

где S_0 — среднее число бросаний монеты до появления двух орлов подряд, если только что был орёл (считаются бросания после этого орла). Теперь надо написать уравнение для S_0: в половине случаев выпадает орёл и хватает одного бросания, а в половине случае выпадает решка, и задача сводится к исходной. Получаем, что

$$S_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + S),$$

Решая эту систему уравнений, получаем $S = 6$, $S_0 = 4$.

112 Найдите среднее число бросаний монеты, если мы останавливаемся, получив решку сразу за орлом (комбинация 01). [Ответ: 4.]

Может показаться парадоксальным, что в этой задаче получается меньший ответ, чем в предыдущей: при бросании двух монет вероятности получить 00 и 01 одинаковы, но среднее время ожидания 01 меньше, чем для 00. (Если вдуматься, то это не так и удивительно: ведь если выпал 0, то избежать появления 01 можно только с одними нулями, а избежать появления 00 можно несколькими способами (111... и 1010..., например.)

Нечестная игра

Давайте сыграем в такую игру: вы называете одну из восьми комбинаций $001, 010, 010, 011, 100, 101, 110, 111$, я называю другую, потом мы бросаем монету до тех пор, пока в последовательности нулей и единиц (результаты бросаний) не появится одна из двух наших комбинаций. Тот, чья комбинация появится, выиграл.

(Из предыдущего обсуждения мы знаем, что некоторые комбинации требуют в среднем меньшего числа бросаний, чем другие, но первый игрок может выбрать любую — так в чём же подвох?)

Тем не менее игра нечестная, и даже удивительно, насколько нечестная: шансы второго игрока в ней по крайней мере вдвое выше. Дело в том, что он выбирает свою комбинацию, уже зная комбинацию первого, и может выбрать её так, чтобы она появилась раньше с вероятностью по крайней мере $2/3$. Например, если вы выберете 010, то я могу назвать 001 и выиграю с вероятностью $2/3$.

Чтобы убедиться в этом, обозначим через $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$ вероятности вашего выигрыша при последних цифрах $00, 01, 10, 11$ (в предположении, что раньше никто не выиграл). Их можно найти из системы уравнений

$$p_{00} = \tfrac{1}{2}p_{00} + \tfrac{1}{2} \cdot 0,\ \ p_{01} = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2}p_{11},\ \ p_{10} = \tfrac{1}{2}p_{00} + \tfrac{1}{2}p_{01},\ \ p_{11} = \tfrac{1}{2}p_{10} + \tfrac{1}{2}p_{11}.$$

(Первое уравнение: если после двух нулей появляется ещё нуль, то мы остаёмся в ситуации двух нулей; если появляется единица, то я выигрываю.

Второе: если после 01 появляется 0, то вы выигрываете; если появляется 1, то мы переходим в ситуацию 11, и так далее.)

Первое уравнение показывает, что $p_{00} = 0$ (и это понятно: пока продолжаются нули, никто не выигрывает, а при первой единице выигрываю я); далее легко находим $p_{01} = 2/3$, $p_{10} = p_{11} = 1/3$. Поскольку при первых двух бросаниях все четыре варианта равновероятны, общая вероятность вашего выигрыша равна $1/3$.

113 Покажите, что 000 появляется раньше 100 с вероятностью $1/8$. [Указание: если три нуля не выпали сразу, то раньше комбинации 100 они появиться уже не смогут.]

114 Найдите выгодные ответы для других вариантов первого хода.

Случайные блуждания

Представим себе прямую дорогу между двумя лужами; человек стоит на этой дороге и случайным образом движется в одну и в другую сторону: будем считать, что раз в секунду он делает шаг и что направление этого шага определяется бросанием честной монеты. Когда он попадает в лужу, прогулка заканчивается. Вопрос: с какой вероятностью он попадёт в ту и в другую лужу, если до одной из них k шагов, а до другой l? (Время движения не ограничено.)

Довольно ясно, что сумма этих вероятностей равна единице, так как вероятность не угодить ни в одну из луж стремится к нулю с увеличением времени движения. И, видимо, больше та из двух вероятностей, где лужа ближе. Но насколько?

Пусть расстояние между лужами равно N шагов. Обозначим через p_n вероятность попасть в (скажем) левую лужу, если до неё n шагов (а до правой, соответственно, $N - n$). Ясно, что $p_0 = 1$ (уже), а $p_N = 0$ (попадание в лужу заканчивает движение).

Если движение началось в точке i, то в половине случаев мы перейдём в $i - 1$, а в половине — в $i + 1$. Поэтому

$$p_i = \tfrac{1}{2}p_{i-1} + \tfrac{1}{2}p_{i+1}.$$

Это значит, что числа $p_0, p_1, \ldots, p_N$ образуют арифметическую прогрессию. Зная в ней первый и последний члены, можно определить любой: $p_i = 1 - i/N$. Другими словами, шансы попасть в ту и другую лужи обратно пропорциональны расстояниям до них.

Что будет, если лужа есть только с одной стороны? Оказывается, что с единичной вероятностью мы в неё попадём независимо от расстояния до неё. В самом деле, пусть это расстояние k. Если с другой стороны есть лужа на расстоянии l, то вероятность попасть в первую лужу равна $l/(k + l)$.

Если вторую лужу убрать, то эта вероятность может только увеличиться (попадание во вторую лужу может лишь помешать), так что вероятность попадания в первую больше $l/(k+l) = 1 - 1/(k+l)$ при любом l — а значит, равна единице.

115 Найдите математическое ожидание числа шагов (до попадания в одну из луж) для всех начальных положений. [Указание: обозначим его m_i для начала на расстоянии i от левой лужи; тогда $m_i = 1 + (m_{i-1} + m_{i+1})/2$, откуда можно заключить, что m_i есть квадратный трёхчлен от i.]

116 (Несимметричное блуждание.) Мы находимся в k шагах справа от лужи и двигаемся влево и вправо с вероятностями p и q (при этом $p + q = 1$; движение на следующем шаге не зависит от предыстории). Какова вероятность (рано или поздно) попасть в лужу? [Указание: при $p = q = 1/2$ эта вероятность равна 1; отсюда можно заключить, что при $p > 1/2$ она тоже равна 1, но при $p < 1/2$ она оказывается строго между нулём и единицей.]

117 В клетках по краям доски 8×8 написаны числа. Докажите, что можно так заполнить остальные клетки доски числами, чтобы каждое число равнялось среднему арифметическому четырёх соседей. [Указание: начнём случайное блуждание из клетки, когда дойдём до края, остановимся и посмотрим, какое там число. Математическое ожидание этого числа запишем в исходную клетку.]

Задача о шляпах

Трёх игроков отведут в комнату, где наденут на них (случайно и независимо) белые или чёрные шляпы. Каждый видит цвет двух других шляп и должен написать на бумажке одно из трёх слов: «белый», «чёрный» и «пас» (не советуясь с другими и не показывая им свою бумажку). Команда выигрывает, если хотя бы один из игроков назвал правильный цвет и ни один не назвал неправильного. Как им сговориться действовать, чтобы увеличить шансы?

Если какой-то заранее выбранный игрок пишет (скажем) «белый», а все остальные — «пас», то вероятность успеха $1/2$ (этот игрок угадает с вероятностью $1/2$, а остальные не помешают). Удивительным образом эта стратегия не оптимальна. Вот лучшая: если игрок видит шляпы разного цвета, то он пишет «пас», а если одинакового — то указывает противоположный цвет. Проигрышные ситуации — когда все шляпы одного цвета (вероятность $1/4$).

Аналогичный вопрос можно задать и для большего числа игроков; как ни странно, вероятность выигрыша может быть и большей; скажем, для 7 игроков есть стратегия, успешная в $7/8$ всех случаев (и это связано с так называемым *кодом Хемминга* из теории кодирования).

Недоверчивые игроки

Два игрока хотят сыграть в орлянку, но не доверяют друг другу: каждый подозревает, что монета противника несимметричная. Как быть? Можно предложить такой способ: они одновременно бросают монеты (каждый свою): если обе монеты выпали орлом или обе решкой, то выиграл первый игрок, если по-разному — то второй. Этот способ основан на том, что если монеты независимы и *хотя бы одна из них симметрична*, то вероятность выигрыша в такой игре равна $1/2$.

118 Как можно имитировать бросание честного кубика, если каждый из двух игроков сомневается в качестве кубика у его противника?

В сущности, нет необходимости производить бросания монеты (или кубика) публично. Можно разрешить каждому игроку принести запечатанный конверт, внутри которого лежит бумажка «орёл» или «решка». Конверты вскрывают, и если там одно и то же, то выиграл первый, а если разное — то второй. Тогда каждый из игроков может сам заранее бросить честную монету и быть уверенным в честности пари (если только противник не может подсмотреть заранее результат бросания или подменить конверт в последний момент, уже зная содержимое конверта противника).

Специалисты по теории игр говорят об *игре с неполной информацией*; каждый из игроков делает свой ход, не зная хода противника, и после этого уже не может его изменить. В этой игре у каждого из игроков есть *вероятностная стратегия* (заранее бросить честную монету), которая гарантирует вероятность выигрыша $1/2$ при любых действиях противника.

119 Рассмотрим такую игру с неполной информацией: я зажимаю в кулаке рублёвую или двухрублёвую монету, а вы пытаетесь отгадать, что именно. Если угадали, то получаете эту монету, если нет — платите штраф в полтора рубля. Кто из игроков имеет в этой игре преимущество? Как надо изменить размер штрафа, чтобы игра была «честной»?

120 Согласно утверждению «Новой газеты» (номер от 26.02.2007), при проведении жеребьёвки (в каком порядке партии расположатся в бюллетене для выборах в 14 регионах России; в каждом из регионов в выборах участвует от 5 до 8 партий) «в восьми из четырнадцати регионов на первом месте $\langle\ldots\rangle$ оказалась партия „Единая Россия“». Докажите, что вероятность такого события (при честной жеребьёвке данная партия получила первое место в 8 или более регионах из 14) не превосходит 0,003.[7]

На самом деле можно предложить несложную процедуру, гарантирующую честное проведение жеребьёвки, если бы такое желание вдруг возникло.

[7] В этой задаче было бы опрометчиво применять принцип Курно – Бореля (см. также работу Г. Андерсена «Новое платье короля»).

Эта процедура гарантирует, что если *хотя бы одна* из партий соблюдает правила, то результат жеребьёвки будет честным.

121 Предложите такую процедуру. [Указание. Каждая из партий приносит в запечатанном конверте некоторую перестановку; эти конверты одновременно вскрываются в присутствии всех участников и затем последовательно (скажем, в алфавитном порядке названий партий) выполняются указанные в них перестановки.]

Свои и чужие места

В n конвертах, пронумерованных от 1 до n, лежат карточки с соответствующими номерами (номер на карточке совпадает с номером конверта). Карточки вынимают, перетасовывают (все перестановки равновероятны) и вкладывают обратно в конверты.

122 Найдите математическое ожидание числа карточек, которые окажутся в своих старых конвертах. [Указание: ответ можно получить практически без вычислений.]

123 Найдите вероятность того, что ни одна карточка не окажется в своём старом конверте. [Ответ: $1-1+1/2-1/6+1/24-\ldots\pm 1/n! \approx 1/e$.]

124 Подсчитайте среднее число *циклов* в случайно выбранной перестановке. (Цикл $i \to j \to k \to \ldots \to i$ означает, что i попало на место j, которое попало на место k и так далее по кругу без повторений до i. Карточка в своём собственном конверте считается за цикл длины 1.) [Указание: пусть S_n — среднее число циклов в перестановке n элементов. Тогда можно понять, что $S_n = \frac{1}{n}(S_{n-1}+1) + \frac{n-1}{n}S_{n-1}$; первое слагаемое соответствует случаю, когда первая карточка попала в свой конверт, а второе — случаям, когда она попала в какой-либо другой конверт.]

125 Из клубка с n верёвочками выходит $2n$ концов. Свяжем их попарно в случайном порядке; получится несколько (зацепленных друг за друга) верёвочных колец разной длины. Найдите математическое ожидание числа колец.

126 (Н. Н. Константинов) Каждый из n пассажиров купил по билету на n-местный самолет. Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Каждый следующий вошедший занимает своё место, если оно свободно; если нет, занимает случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир займет своё место? [Указание: с точки зрения занятых мест ничего не изменится, если вновь пришедший пассажир занимает своё место (а если на нём сидела старушка, то она пересаживается на случайное свободное место). Вероятность коллизии на последнем шаге не изменится, и произойдёт она в том случае, если старушка будет на одном из двух равновероятных оставшихся мест. Ответ: 1/2.]

Частоты букв и цифр

На практике частоты разных объектов (букв алфавита, цифр и др.) редко оказываются одинаковыми, и знание частот часто бывает полезным.

Вот что показал подсчёт частоты букв в тексте этой брошюры (точнее, в одной из предварительных версий — описание результатов меняет эти результаты!): чаще всех встретилась буква О (10,6%), следующей была буква Е (8,7%), затем И (8,0%), затем Т (7,3%), затем А (7,3%), затем Н (6,1%), затем С (5,4%) и так далее. Самой редкой буквой оказался твёрдый знак (0,02%), а второй по редкости — Ф (0,25%). Примерно такие же результаты получаются и для других достаточно длинных текстов.

$\boxed{\textbf{127}}$ Возьмём два разных текста одинаковой длины и напишем их в строчку друг под другом, подсчитав число совпадений (тех i, при которых i-я буква первого текста совпала с i-й буквой второго текста). Как оценить долю таких совпадений, зная частоты букв? [Указание: математическое ожидание числа совпадений равно сумме ожиданий для всех i; считая i-е буквы в двух текстах независимыми, можно оценить вероятность совпадения как сумму квадратов частот.]

Сведения о частотах можно использовать для расшифровки сообщений, в которых одни буквы заменены на другие, — надо посмотреть, какие буквы встречаются чаще всего в шифрованном тексте, и прикинуть, что бы могло стоять на их месте в исходном сообщении.

Знание частот полезно также для экономного кодирования — ещё Морзе, составляя свою знаменитую азбуку, старался выбрать для часто встречающихся букв короткие коды.

А что можно сказать о цифрах? Можно было бы ожидать, что цифры должны быть равноправны и в среднем встречаться одинаково часто. Однако это, как правило, не так. Эксперимент с текстом этой брошюры показал, что самая частая цифра — единица, и она встречается почти в пять раз чаще, чем самая редкая цифра (семёрка). В другом оказавшемся под рукой файле единица также оказалось самой частой, а семёрка — самой редкой.

Неравномерность появления разных цифр была замечена давно — ещё в XIX веке С. Ньюкомб обратил внимание, что первой значащей цифрой чаще других оказывается единица (рассказывают, что он обратил внимание, что начальные страницы таблиц логарифмов, использовавшихся для вычислений, замусолены больше других); более того, он высказал предположение, что частота цифры d (среди первых значащих цифр) должна быть близка к $\lg(d+1) - \lg d$. Впоследствии аналогичное наблюдение (уже в XX веке) сделал Ф. Бенфорд, проанализировавший более 20 тысяч чисел в разных источниках, поэтому иногда говорят о «законе Бенфорда».

В некоторых ситуациях этот закон можно обосновать математически: например, он верен для первых цифр степеней двойки (и вообще любого целого числа, кроме степеней 10). Это связано с тем, что $\lg 2$ иррационален и дробные части его кратных равномерно распределены на единичном отрезке. Аналогичный (но другой) закон можно получить для вторых слева цифр в степенях двойки; их распределение более близко к равномерному, но не совсем равномерно.

Предполагается (но никем не доказано), что в разных математических константах (вроде π, e, $\sqrt{2}$ и др.), записанных в виде бесконечных десятичных дробей, все цифры встречаются примерно поровну (каждая с частотой $1/10$). Более того, предполагается, что и группы из двух цифр встречаются с одинаковой частотой, аналогично для любого числа цифр. Такие числа называют иногда *нормальными*.

Хорошо перетасованная колода карт

Сейчас во время карточных игр обычно пользуются одной и той же колодой, тасуя её перед сдачей, но так было не всегда. В «Беседах о русской культуре» Ю. М. Лотман так описывает карточную игру пушкинских времён:

> Каждый из игроков получает колоду карт. Во избежание шулерства, колоды выдаются новые, нераспечатанные. Их распечатывают тут же особым специально отработанным жестом: крест-накрест заклеенная колода карт резко сжимается левой рукой, в результате чего заклейка с треском лопается. Дважды играть одной и той же колодой не разрешается, и после полной прокидки всей колоды (талии) карты бросают под стол, и игроки получают новые карты...
>
> Расход карт был неодинаковым и зависел от форм их употребления. Это вызвало специализацию. Принятые в России «французские» карты (несмотря на название, изготовлялись они в середине XVIII века в Германии, а позже для игральных карт было организовано русское производство) производились в трёх видах: гадальные карты, дорогие, художественно оформленные карты для неазартных игр и преферанса, предназначавшиеся для многократного использования, и карты для азартных игр. Расход последних был огромен, и поэтому печатались они довольно небрежно в расчете на одноразовое использование...
>
> В ходе азартных игр требовалось порой большое количество колод. При игре в фараон банкомет и каждый из понтёров (а их мог-

> ло быть более десятка) должен был иметь отдельную колоду... Использованная («пропонтированная») колода тут же бросалась под стол. Эти разбросанные, часто в огромном количестве, под столами карты позже, как правило, собирались слугами и продавались мещанам для игры в дурака и подобные развлекательные игры.

Если уж продавать запечатанные колоды, то логично их тасовать на фабрике, перед упаковкой. Соответственно на фабрике нужна тасовочная машина, а также контроль качества на её выходе, проверяющий, что вышедшая из машины колода хорошо перетасована. Логично? На первый взгляд да, но если задуматься, что должен делать контролёр качества, то это уже не так ясно. Может ли он посмотреть на порядок карт в колоде и отвергнуть её как «плохо перетасованную»? Если нет, то он вообще не нужен. А если он отвергает некоторые колоды и пропускает некоторые другие, то как это согласуется с тем, что в хорошо перетасованной колоде карт все расположения одинаково вероятны?

Можно сказать, что карты — дело несерьёзное, но тот же вопрос возникает и в других ситуациях. Скажем, имеются книги с «таблицами случайных чисел» (мы приводим фрагмент из такой таблицы с миллионом случайных цифр, выпущенной в 1955 году издательством The Free Press и переизданной в 2001 году; левая колонка — не случайные цифры, а номера строк):

2 TABLE OF RANDOM DIGITS

00050	09188	20097	32825	39527	04220	86304	83389	87374	64278	58044
00051	90045	85497	51981	50654	94938	81997	91870	76150	68476	64659
00052	73189	50207	47677	26269	62290	64464	27124	67018	41361	82760
00053	75768	76490	20971	87749	90429	12272	95375	05871	93823	43178
00054	54016	44056	66281	31003	00682	27398	20714	53295	07706	17813

Спрашивается, может ли такая таблица быть «качественной» и «некачественной»? Наверное, да: обнаружив в такой книге целую страницу из одних девяток, читатель скорее всего будет недоволен. Но как это согласуется с тем, что все комбинации по-настоящему случайных цифр, в том числе и эта, одинаково вероятны?

Этот философский вопрос (как и вообще философские вопросы) не имеет однозначного ответа. Один из вариантов ответа даёт алгоритмическая теория вероятностей: предлагается считать, что таблица хорошая, если её нельзя сжать, то есть нельзя задать более коротким описанием, чем сама таблица. (Конечно, это требует уточнений, и при этом возникает много проблем.)

Геометрические вероятности

Иногда говорят о равномерном распределении вероятностей на бесконечном множестве — скажем, о случайно выбранной точке, равномерно распределённой по окружности. Что имеется в виду, например, когда говорят, что игра типа рулетки честная?[8] Если на окружности выбрана некоторая дуга, то вероятность того, что точка попадёт внутрь этой дуги, должна быть пропорциональна длине дуги и не зависеть от положения этой дуги на окружности. Другими словами, доля случаев, в которых точка попадает внутрь дуги в α градусов, должна быть (при большом числе опытов) близка к $\alpha/360$. Отсюда следует, что аналогичное утверждение верно и для нескольких дуг: если в рулетке суммарная длина чёрных участков составляет $18/38$ длины окружности,[9] то вероятность выиграть, поставив на чёрное, равна $18/38$.

Аналогично говорят о случайной точке, равномерно распределённой на отрезке — имея в виду, что вероятность попасть в какую-либо часть отрезка пропорциональна длине этой части. Когда говорят, что случайная точка равномерно распределена в квадрате, имеют в виду, что вероятность попасть в какую-либо часть квадрата пропорционально площади этой части. (Чтобы получить такую точку, можно расстелить квадрат в чистом поле и посмотреть, в какую точку попадёт первая капля дождя.)

Математическая теория вероятностей для бесконечного числа исходов далеко выходит за рамки этой брошюры, тем не менее на некоторые вопросы можно дать правдоподобный ответ, исходя просто из здравого смысла.

128 Рулетку запускают дважды и получают две независимые равномерно распределённые точки на окружности. Каково математическое ожидание величины дуги между ними? (Величина дуги — угол между радиусами, проведёнными в её концы, от 0 до 180°.) [Указание. Довольно ясно, что можно фиксировать первую точку и искать математическое ожидание длины дуги от фиксированной точки до случайной. Если эту фиксированную точку взять двумя диаметрально противоположными способами, то сумма дуг будет 180°, а математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий, так что математическое ожидание длины одной дуги равно 90°.]

С другой стороны, некритическое отношение к правдоподобным аргументам легко приводит к парадоксам. Знаменитый *парадокс Бертрана* спрашивает, какова вероятность того, что случайно выбранная хорда окружно-

---

[8] Пример с рулеткой на самом деле неудачен, так как она поделена на ячейки, в которых может остановиться шарик. Более подходящим примером является аналогичное устройство, которое показывали в телеигре «что? – где? – когда?»; там по окружности двигался конец стрелки.

[9] В «американской рулетке» окружность разделена на 38 равных частей — 18 красных, 18 чёрных и 2 зелёных; попадание в зелёный сектор (0 или 00) означает, что игроки теряют свои ставки в пользу казино. В первоначальном варианте рулетки (1842, Франция) была одна зелёная часть 0; в Америке добавили вторую, чтобы сделать игру более невыгодной для игроков.

сти будет длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в окружность. Ответ зависит от того, как мы представляем себе случайный выбор. Если один из концов хорды фиксирован, а другой равномерно распределён по окружности, то хорда будет длиннее стороны на дуге в 120°, то есть вероятность получится равной одной трети. Если мы случайно выбираем расстояние от центра круга до хорды (равномерно на отрезке от 0 до радиуса круга r), то длинные хорды соответствуют расстояниям меньше $r/2$, и вероятность равна $1/2$.

129 Третий способ, рассмотренный Бертраном, таков: выбираем случайно точку внутри круга (вероятность попадания в некоторую часть круга пропорциональна её площади) и проводим хорду с серединой в этой точке. Какова вероятность получить длинную хорду (длиннее стороны вписанного правильного треугольника) в этом случае?

Хочется надеяться, что для читателя этот парадокс не выглядит парадоксальным — мы уже привыкли к тому, что постановка вопроса о вероятности должна чётко описывать процедуру случайного выбора.

Игла Бюффона

В двух следующих примерах можно математически корректно описать распределение вероятностей, но это не так просто, и мы ограничимся правдоподобными разговорами.

На тетрадный лист «в линейку» (проведены параллельные линии через равные промежутки) много раз бросают иголку, длина которой равна расстоянию между линиями. Какова вероятность того, что иголка пересечёт одну из линий? Оказывается, что эта вероятность равна $2/\pi$ (так что при большом усердии можно использовать этот опыт для экспериментального измерения числа π).

Вот нестрогое, но достаточно правдоподобное объяснение такого ответа. Чтобы пересечь две линии, иголка должна лечь строго перпендикулярно линиям, так что это событие имеет нулевую вероятность. Поэтому вероятность пересечь линию равна математическому ожиданию числа пересечений. Это математическое ожидание складывается из суммы ожиданий для частей иголки. Поэтому если иголку изогнуть, то математическое ожидание не изменится, а если её удлинить в α раз, то и математическое ожидание увеличится в α раз. Удлиним иглу в π раз и изогнём её по окружности. Тогда диаметр этой окружности будет в точности равен расстоянию между линиями, и она будет пересекать их ровно два раза (кроме того случая, когда она в точности коснётся линий — что имеет нулевую вероятность). Из пропорциональности находим, что для исходной игры математическое ожидание и вероятность равны $2/\pi$.

Вероятностные доказательства

В следующем примере мы используем теорию вероятностей для решения задачи, в формулировке которой ничего о вероятности не говорится. Вот эта задача: 10% *поверхности шара* (*по площади*) *выкрашено в чёрный цвет, остальные* 90% — *белые. Докажите, что можно вписать в шар куб таким образом, чтобы все вершины куба попали в белые точки.*

Решение обманчиво просто: впишем куб $ABCDA'B'C'D'$ в шар *случайным образом.* Тогда вероятность того, что данная вершина (скажем, вершина A) окажется чёрной, составляет $1/10$. Вероятность того, что *хотя бы одна* из восьми вершин куба окажется чёрной, не превосходит $8/10$ (объединение восьми событий вероятности $1/10$). Значит, бывают случаи (они составляют по крайней мере $2/10$ всех вариантов), когда все вершины белые!

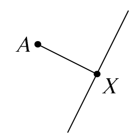
(Трудность в строгом обосновании этого решения состоит в определении понятия «случайный поворот куба». Соответствующее математическое понятие называется «мерой Хаара» на группе всех поворотов.)

Вот ещё один пример вероятностного доказательства существования искомого объекта. *Дан граф, состоящий из некоторого количества точек* (*вершин*)*; некоторые пары вершин соединены линиями* (*рёбрами*)*. Докажите, что можно раскрасить вершины в два цвета таким образом, чтобы не менее половины рёбер были «разноцветными», то есть соединяли вершины разных цветов.*

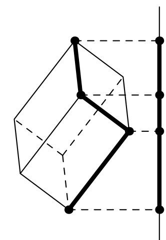
Вероятностное решение тут совсем простое: будем выбирать цвет вершин случайно, подбрасывая монету. Тогда для каждого ребра вероятность оказаться разноцветным равна $1/2$, и поэтому математическое ожидание числа разноцветных рёбер равно половине общего числа рёбер. А если среднее по всем раскраскам равно половине числа рёбер, то хотя бы в одном случае число разноцветных рёбер должно быть не меньше половины (среднее арифметическое чисел, каждое из которых меньше какого-то X, будет меньше X). Значит, искомая раскраска существует.

(Тут, правда, можно обойтись и без всяких вероятностей: добавляя вершины по одной, будем выбирать для новой вершины цвет, отличный от цвета большинства её соседей.)

В следующей задаче обойтись без вероятностей гораздо сложнее. В метро есть ограничение на перевозимые предметы: сумма «измерений» (длины, высоты и ширины) не должна превосходить некоторого значения (максимального разрешённого). Возникает такой вопрос: нельзя ли схитрить и обойти это ограничение, поместив прямоугольную коробку, у которой сумма измерений слишком большая, внутрь другой, у которой она меньше? Оказывается, что нет: *если один прямоугольный параллелепипед целиком помещается внутри другого, то сумма измерений первого не больше суммы измерений второго.*



Казалось бы, при чём тут вероятности? Тем не менее, они оказываются весьма полезными, и вот каким способом. В стереометрии определяется понятие *проекции* точки A на прямую l — это такая точка X, что AX перпендикулярно l. Можно также говорить о *проекции тела на прямую* — надо спроектировать все точки этого тела. Например, проекцией прямоугольного параллелепипеда будет отрезок. Длина этого отрезка зависит от направления прямой, её можно назвать *толщиной* тела в направлении прямой. (Можно представить себе, что тело зажимают между двумя параллельными плоскостями, как между губками штангенциркуля, и измеряют его толщину.) Будем рассматривать *среднюю толщину* тела — математическое ожидание длины его проекции на случайную прямую.



Лемма: *средняя толщина прямоугольного параллелепипеда пропорциональна сумме его измерений.*

Доказательство: как видно из картинки, толщина параллелепипеда складывается из трёх отрезков, каждый из которых представляет собой проекцию одного из направлений (длины, ширины и высоты). По свойству линейности математического ожидания заключаем, что средняя толщина параллелепипеда равняется сумме средних толщин этих отрезков. (Средняя толщина отрезка, как и для любого тела, определяется как математическое ожидание длины его проекции на случайную прямую.) Среднюю толщину отрезка длины u можно вычислить, зная математический анализ, но нам достаточно понимать, что она пропорциональна u с каким-то коэффициентом, а сам этот коэффициент не важен. (Пропорциональность ясна: увеличив длину отрезка во сколько-то раз, мы увеличим длину проекции в то же самое число раз, и потому математическое ожидание тоже увеличится во столько же раз.) Таким образом, средняя толщина параллелепипеда пропорциональна сумме его измерений, что и требовалось доказать.

Остаётся заметить, что если одна коробка вложена в другую, то проекция первой коробки на любую прямую целиком покрывается проекцией второй коробки на ту же прямую, и потому имеет меньшую (или такую же) длину. Раз это верно для любой прямой, то это верно и для математического ожидания, а потому и для пропорциональной ему суммы измерений.

Вероятность и психология

В своё время в СССР была популярна игра «Спортлото»: в карточке с 49 номерами (от 1 до 49) можно было закрасить 6 цифр и опустить её в специальный ящик. Во время тиража из «лототрона» выбирали шесть шаров с цифрами; если они совпадали с закрашенными, игрок получал большой выигрыш, если совпадали пять из шести — то меньший, и так до трёх совпадений. (Определённая доля выручки от продажи билетов делилась между выигравшими по некоторым правилам.)

Вопрос: есть ли (с точки зрения теории вероятностей и в предположении честности организаторов) разница, какие числа закрашивать? С первого взгляда кажется, что нет: теория вероятностей учит, что кажущаяся «неслучайной» комбинация цифр, скажем, $1, 2, 3, 4, 5, 6$, имеет ту же вероятность появления, что и любая другая. Однако важна и психология: если игроки избегают ставок на подобные «красивые» комбинации, считая их «неслучайными», то та же самая сумма денег распределится на меньшее число игроков в случае выпадения «красивой» комбинации (Н. Венда, Н. Гуревич, Психология «Спортлото», *Наука и жизнь*, 1980, № 1).

Вот ещё один пример, соединяющий теорию вероятностей с психологией. Предположим, что мы хотим провести опрос общественного мнения по какому-то деликатному вопросу (типа «всегда ли вы платите за проезд в электричке» или «как вы относитесь к пятому сроку президента»), так что опрашиваемые (респонденты, как сказали бы социологи) могут стыдиться своих (честных) ответов или опасаться последствий. Тогда можно попросить опрашиваемого тайно от социолога бросить монету; если выпадет орёл, то опрашиваемый честно отвечает на вопрос, а если решка, то он тайно бросает монету ещё раз и даёт случайный ответ (результат второго бросания). Легко подсчитать, что если доля утвердительных ответов на интересующий нас вопрос на самом деле равна p, то социолог получит $(p+0{,}5)/2$ утвердительных ответов, так что легко восстановить истинное p с небольшой потерей точности. С другой стороны, отвечающий всегда может оправдываться, что у него первый раз выпала решка, его ответ случайный (второе бросание) и ничего такого плохого он в виду не имел.

Вероятность и экономика

Когда говорят о вероятностях в реальном мире, обычно имеют в виду какие-то повторяющиеся испытания (хотя бы в принципе). Скажем, говоря о вероятности орла для данной монеты, мы подразумеваем, что её можно бросать много раз и смотреть на долю орлов. Другой пример: что мы имеем в виду, говоря о вероятности того, что стакан разобьётся, если уронить его (с данной высоты) на пол? Здесь уже нельзя повторять опыт с одним и тем же стаканом, если он разобьётся. Поэтому вопрос имеет смысл, лишь если у нас есть много одинаковых стаканов, и мы можем бросать их и смотреть, какая доля среди них разбилась.

Но бывают случаи, когда ситуацию в принципе нельзя повторить. Допустим, нас спрашивают, с какой вероятностью завтра будет дождь. Что это значит — мы ведь не можем дождаться завтрашнего дня, посмотреть, будет ли дождь, потом отыграть назад, попробовать ещё раз и так далее? Или, допустим, речь идёт о вероятности выигрыша любимой команды в завтрашнем футбольном матче — что это такое? Можно, конечно, посмотреть на статистику игр с тем же соперником, но ведь ясно, что это не то — в прошлом команда могла играть сильнее или слабее.

Тем не менее в некоторых ситуациях понятию вероятности можно придать «экономический» смысл. Представим себе, что завтра должны состоятся скачки с тремя лошадьми A, B, C и одна из них выиграет. Организаторы скачек пустили в оборот три «финансовых инструмента» — обязательства заплатить рубль в случае выигрыша соответствующей лошади. Купив сегодня такую бумагу на лошадь A, мы можем дождаться окончания скачек; если лошадь A выиграет, то мы по этой бумаге сможем получить рубль (а если не выиграет — ничего не получим). Такие бумаги можно и продавать: продавая такую бумагу, мы обязуемся заплатить покупателю рубль в случае выигрыша соответствующей лошади. (Точнее, обязательство берёт на себя эмитент бумаги.)

Конечно, не факт, что кто-то вообще захочет покупать или продавать такие бумаги. Но удивительным образом такие люди часто находятся, и довольно много, так что складывается некоторое равновесие: цена продажи и цена покупки становятся близкими.[10] Эту общую цену и считают вероятностью указанного в бумаге события (выигрыша соответствующей лошади, если вернуться к нашему примеру). Если событие становится по каким-то причинам более правдоподобным, то желающих купить такую бумагу становится больше, и цена её растёт.

Понятно, почему цена такой бумаги имеет вероятностный смысл. Скажем, если мы бросаем кубик, то бумага на право получить рубль при выпадении шестёрки будет срабатывать примерно в одной шестой всех случаев. Значит, чтобы остаться в среднем «при своих», следует покупать или продавать такие бумаги по $1/6$ рубля за штуку. (Если их продают дешевле, выгодно их покупать, а если покупают дороже — то продавать.) Что не так понятно — почему находятся желающие играть в эти игры. Видимо, таково свойство человеческой психологии (и без него бы не могли существовать биржи, рынки ценных бумаг, фьючерсов, опционов, деривативов и прочих «финансовых инструментов»).

Возникает такой вопрос: мы определили вероятность выигрыша каждой из лошадей как рыночную цену соответствующей бумаги. Но выполняются ли при этом те же законы теории вероятностей, что и раньше? Скажем, можно ли утверждать, что сумма вероятностей для трёх лошадей равна еди-

---

[10] В момент написания этого текста (16.03.2012) на сайте `intrade.com` можно купить или продать бумагу на право получить \$10.00 в случае победы Барака Обамы на президентских выборах 2012 года в США; купить её можно за \$6.05, а продать — за \$6.01, так что разница в цене покупки и продажи невелика. Соответственно можно сказать, что вероятность победы Обамы на выборах составляет в данный момент 60–61%.

нице: $\Pr_A + \Pr_B + \Pr_C = 1$? На первый взгляд нет: кто его знает, по какой цене будут торговаться эти бумаги. Но если подумать, то становится ясным, что тут есть механизм, обеспечивающий это равенство. Пусть, скажем, оказалось, что $\Pr_A + \Pr_B + \Pr_C < 1$. Тогда можно купить пакет из трёх таких бумаг (по одной для каждой лошади), заплатив меньше рубля. Но такой пакет означает гарантированный выигрыш одного рубля: как бы ни кончились скачки, ровно одна бумага сработает и мы получим рубль. Финансовые спекулянты своего не упустят, и начнут скупать такие пакеты, повысив спрос, и тем самым вызовут повышение цен. Наоборот, если $\Pr_A + \Pr_B + \Pr_C > 1$, то есть резон продать по одной бумаге каждого типа, зарезервировав рубль для выплат (при любом исходе придётся заплатить ровно рубль) — разница будет прибылью. Желающие продать понизят рыночную цену. Таким образом, в равновесном состоянии сумма $\Pr_A + \Pr_B + \Pr_C$ равна 1 с точностью, определяемой разницой между ценой продажи и покупки (и, как заметили бы практики, расходами на участие в торгах).

Такое понимание позволяет говорить о вероятностях индивидуальных (неповторимых) событий. Но даже и в этом случае нельзя разумно истолковать вероятность событий, про которые мы уже знаем, случились они или нет (типа возникновения жизни на Земле) или событий, про которые нет общепринятого способа это узнать (скажем, отравил ли Сальери Моцарта). Так что нужно проявлять осторожность, и всегда спрашивать себя, что имеется в виду под той или иной вероятностью. Не всегда это имеет разумное уточнение. Скажем, если вас спросят: «В серии из 10 000 бросаний монеты выпало 5217 орлов; какова вероятность, что эта монета честная?» — не торопитесь что-то вычислять, этот вопрос смысла не имеет. (Возможно, спрашивающий хочет узнать, какова вероятность того, что при бросании честной монеты будет 5217 или более орлов, или какова вероятность получить *ровно* 5217 орлов, или ещё что-нибудь — но это другие вопросы.)

Несколько книг по теории вероятностей

• Бернулли Я. О законе больших чисел. М.: Наука, 1986.

• Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1976.

• Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. М. Введение в теорию вероятностей. (Библиотечка Кванта, вып. 23.) 2-е изд. М.: Физматлит, 1995.

• Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. Пер. с англ. М.: Мир, 1969.

• Мостеллер Ф., Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука, 1975.

• Реньи А. Трилогия о математике. Перевод с венг. М.: Мир, 1980.

• Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 240 с.

• Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её применения. Пер. с англ. Том 1. М.: Мир, 1967.

• Ширяев А. Н. Вероятность. 2-е изд. М.: Наука, 1989. 3-е изд. (в двух книгах). М.: МЦНМО, 2004.

• Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. 3-е изд. М.: Наука, 1973.

Оглавление