А. Шень

О «математической строгости» и школьном курсе математики

Издание третье, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 372.851
ББК 22.1
Ш47

Шень А.

Ш47 О «математической строгости» и школьном курсе математики. — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2019. — 72 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-2891-3

Математики традиционно (и не без оснований) гордятся «математической строгостью» — точностью и полнотой доказательств теорем на основе определений и аксиом. Насколько этот идеал достигнут в школьном курсе математики? Можно ли его достигнуть? И нужно ли к этому стремиться?

В брошюре разбираются несколько деликатных вопросов школьного курса математики (в чём проблема, как её пытаются решить в школьных учебниках и как её можно было бы решать). Изложение рассчитано на любознательных школьников, квалифицированных учителей и добросовестных экзаменаторов.

Предыдущее издание книги вышло в 2011 г.

ББК 22.1

Оригинал-макет предоставлен автором. Рецензент и редактор Н.А. Яковлев.
Рисунок на обложке: фрагмент папируса с предложением 5 второй книги «Начал» Евклида. Предположительно 75–125 г. н. э.
Музей археологии и антропологии, Univ. of Pennsylvania.
Фотография: Bill Casselman, с разрешения музея,
`http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/papyrus/papyrus.html`

Электронная версия книги является свободно распространяемой и доступна по адресу `ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/rigor.zip`

Учебно-методическое издание

Александр Шень

О «математической строгости» и школьном курсе математики

12+

Подписано в печать 14.02.2019 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура тип таймс. Печ. л. 4,5. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

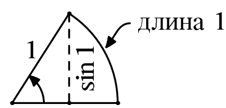
Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
тел./факс: (499) 785-05-18, e-mail: 3565264@mail.ru, www.printsg.ru
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-5-4439-2891-3

1. Простые вопросы и ответы

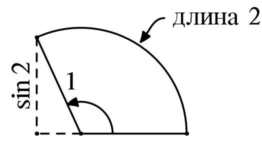
– *Что такое синус угла в* 1 *радиан?*

– Надо взять угол в 1 радиан, то есть угол, для которого длина дуги окружности равна радиусу. Затем нужно построить прямоугольный треугольник с таким углом и найти отношение противолежащего катета к гипотенузе.



– *Что такое синус угла в* 2 *радиана?*

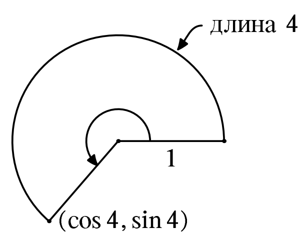
– Этот угол тупой, и синус для него определяется иначе. Построим единичную окружность на координатной плоскости. Отложим от оси OX против часовой стрелки угол в два радиана. Координаты полученной точки будут $(\cos 2, \sin 2)$.

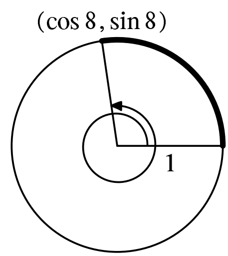


Другими словами, повернём плоскость (вокруг начала координат) против часовой стрелки на угол в 2 радиана. Точка $(1, 0)$ при этом повороте перейдёт в точку $(\cos 2, \sin 2)$.

– *Что такое синус угла в* 4 *радиана?*

– Этот угол больше развёрнутого (который составляет π радиан). Но в остальном всё так же. Надо отложить против часовой стрелки угол в 4 радиана (охватывающий дугу окружности в 4 раза длиннее радиуса) или повернуть точку $(1, 0)$ на оси OX на этот угол, получится точка $(\cos 4, \sin 4)$.





— *Что такое синус угла в* 8 *радиан?*

– О дуге длиной 8 говорить нехорошо, поскольку она получается больше окружности. Но поворот на 8 радиан рассмотреть можно. Он состоит из полного оборота (2π радиан) и поворота на $8 - 2\pi$ радиан. Поэтому синус угла в 8 радиан равен синусу угла в $8 - 2\pi$ радиан.

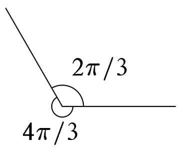
– *Что такое синус угла в -8 радиан?*

– То же самое, только поворачивать надо по часовой стрелке, а не против. По симметрии $\sin(-8) = -\sin 8$.

2. Вопросы без ответов

«Что же тут интересного? — скажет хорошо знакомый с курсом математики школьник. — На простые вопросы даны правильные ответы».

Но вот несколько каверзных вопросов.



В геометрии угол определяется как пара лучей, исходящих из общего начала. Нарисуем угол в $4\pi/3 = 240°$. Другой человек, глядя на ту же пару лучей, может счесть её углом в $2\pi/3 = 120°$. Выходит, что углы в $4\pi/3$ и $2\pi/3$ — это одно и то же. Как же у этих углов могут быть разные синусы? Ведь не может же у одного и того же угла быть два разных синуса?

Похожая проблема с поворотами. Поворот на 90 градусов и поворот на $450 = 360 + 90$ градусов — это один и тот же поворот или два разных? Вроде бы два разных: чтобы повернуть кран на $450°$, мало повернуть его на $90°$, надо сделать ещё целый оборот. Попросив отвернуть вентиль на $360°$ и обнаружив, что ничего не сделано, мы будем удивлены. С другой стороны, вроде бы поворот — это геометрическое преобразование, при котором точки переходят в другие точки. Любая точка A при поворотах на $90°$ и на $450°$ переходит в одну и ту же точку A'. Выходит, это одно и то же преобразование?

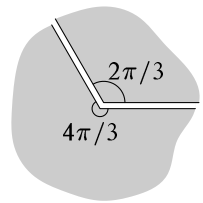
Наконец, о направлении вращения. Задавая поворот, нужно указывать не только величину поворота, но и направление вращения (по часовой стрелке или против), иначе будет путаница. Но в аксиомах геометрии о направлении вращения (и о часовых стрелках) ничего не говорится. И как бы могли выглядеть соответствующие аксиомы, непонятно.

3. О бедных авторах

Математика славится тем, что даёт чёткие определения и строгие доказательства. Недаром Достоевский и его герои используют слово «математический» для высшей степени ясности и неопровержимости. Желая соответствовать этой репутации, авторы учебников чувствуют себя обязанными давать по возможности отчётливые определения всем используемым понятиям (кроме основных — не определяемых, но фигурирующих в аксиомах). Как же они поступают с углами и тригонометрическими функциями этих углов?

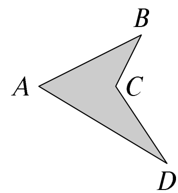
Углы и плоские углы

Чтобы разобраться с нашим первым недоразумением, можно различать два понятия: *просто угол* (пара лучей) и *плоский угол* (пара лучей и часть плоскости, между ними заключённая). «Просто угол» разрезает плоскость на два плоских угла, которые в сумме составляют полный угол (который можно считать плоским углом со слившимися краями) в 360°.

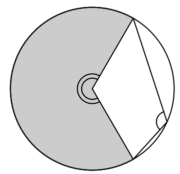


Ну хорошо, а когда в какой-то теореме речь идёт об углах, имеются в виду просто углы или плоские углы? Обычно это всё равно, но иногда становится важным.

Если мы говорим, что сумма углов треугольника равна развёрнутому углу, всё понятно без дополнительных уточнений. Но чтобы сумма углов невыпуклого четырёхугольника $ABCD$ была равна привычным 360 градусам, угол BCD нужно брать бо́льшим 180°.



Похожая ситуация с теоремой о вписанном угле. Традиционно она читалась так: *вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу.* В такой формулировке важно, что центральный угол может быть и больше 180°, то есть надо рассматривать плоские углы.

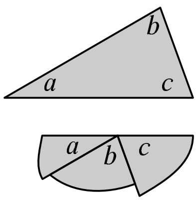


Именно такая формулировка была в учебнике планиметрии известного геометра из Харькова А. В. Погорелова при первом издании учебника в 1972 году. (Точнее, это тогда ещё не было учебником, а было книжкой *Элементарная геометрия*, выпущенной издательством «Наука»; до этого выходили отдельно две брошюры *Планиметрия* и *Стереометрия.* Определение центрального угла и теорему о вписанном угле можно найти на с. 73 – 74 этой книги.)

В издании 1985 года (*Геометрия 6 – 10*, издательство «Просвещение») никаких центральных углов уже нет, а формулировка теоремы (с. 57) звучит так: *Вписанный в окружность угол, стороны которого проходят через две данные точки окружности, равен половине угла между радиусами, проведёнными в эти точки, или* *дополняет её до* 180° («её» — значит «половину угла»). Соответственно изменено и доказательство.

В издании 2003 года (вышедшем уже после смерти Погорелова — он умер в 2002 году) снова говорится о плоских и центральных углах, хотя и более расплывчато, чем в первом издании, и теорема формулируется по-старому: *вписанный угол равен половине центрального угла* (с. 153). Однако, восстановив эту формулировку, доказательство для этого случая (надо проверить, что плоский угол, больший 180°, равен сумме своих частей) автор (а скорее редактор) восстанавливать не стал, и случай дуги, большей полуокружности, попросту пропущен без каких-либо пояснений. Зато доказательство теперь кончается словами «Теорема доказана полностью» вместо более скромного «Теорема доказана» в изданиях 1979 и 1985 годов.

Может ли угол быть больше 360°?



Кстати, о сумме углов. Когда мы говорим, что сумма углов треугольника равна развёрнутому углу, всё очень наглядно. Если разрезать треугольник на три части и приставить их друг к другу углами, то образуется развёрнутый угол. Здесь сложение углов понимается как действие над геометрическими фигурами, и сумма тоже геометрическая фигура — развёрнутый угол.

Случай четырёхугольника можно толковать аналогичным образом. Но если автор учебника напишет, что сумма углов, скажем, шестиугольника равна углу в 720°, то бдительный школьник (или недоброжелательный рецензент) спросит: а что ж это за такой угол в 720°? Это уже не плоский угол, а неизвестно что такое...

Что на это отвечать автору? Можно выкрутиться, использовав более аккуратную формулировку: сумма *величин* углов равна 720°. Величина угла — это число, эти числа можно сложить и получить число 720 (а знак градуса у 720 — это условность, напоминающая, что мы измеряем углы).

Правда, впоследствии углы будут измерять в радианах, и чему же станет равна величина прямого угла: $\pi/2$ или 90? Ведь это же, что ни говори, два разных числа. Приходится разделять *градусную меру* угла и *радианную меру* угла. Лучше было бы иметь некоторую единую абстрактную *величину* угла, которую можно измерять в разных единицах (градусах, минутах, радианах). Но как это выразить?[1]

Похожая проблема есть и с длиной отрезков. Можно ли говорить о длине отрезка как некоторой числовой характеристике отрезка? Или длина зависит

[1] Автор-экстремист написал бы, что группа углов изоморфна группе действительных чисел по сложению, но без канонического с ней изоморфизма.

от выбора единиц измерения, и следует отдельно говорить о дюймовой мере отрезка, метровой мере, сантиметровой, аршинной, верстовой и т.п.?

Повороты

Перейдём к поворотам. Хочется различать повороты на 90° и 450°. Но оставаясь в рамках (пусть даже идеализированной) школьной реальности, этого сделать нельзя: как преобразования плоскости это одно и то же, и приходится это признать.

Когда мы интуитивно их различаем, то подразумеваем, что поворот — это не только результат (куда мы попали), но и процесс (как мы двигались). Но как это выразить?

В школьных учебниках делаются (по правде говоря, довольно беспомощные) попытки различать «углы» и некоторые особые сущности, называемые «углами поворота». Вот как об этом пишут:

> В геометрии угол определён как часть плоскости, ограниченная двумя лучами. При таком определении получаются лишь углы от 0° до 180°. Но угол можно рассматривать и как меру поворота. При этом он может оказаться и более 180°, и более 360°. Будем наблюдать, например, за колесом, вращающимся вокруг неподвижной оси $\langle\ldots\rangle$ Пусть в начале вращения одна из спиц колеса была горизонтальна. $\langle\ldots\rangle$ Если колесо совершит полный оборот, то спица, за которой мы наблюдаем, вернётся на старое место, то есть снова окажется горизонтальной. Но мера поворота будет равна не нулю, а 360° $\langle\ldots\rangle$ Рассмотренные нами углы называют обобщёнными углами (Н. Я. Виленкин и др., *Алгебра* для 9 класса. М.: Просвещение, Московские учебники, 1996.)

> Начальный радиус можно повернуть около точки O на сколько угодно градусов как по часовой, так и против часовой стрелки. Повернём, например, его против часовой стрелки на 180°, потом ещё на 180° и ещё на 60°. В результате начальный радиус повернётся на 420° $\langle\ldots\rangle$ Говорят, что *угол поворота* начального радиуса равен 420°. Угол поворота считается положительным, если начальный радиус вращается против часовой стрелки, и отрицательным, если вращение происходит по часовой стрелке. (Ю. Н. Макарычев и др., *Алгебра*, 9 класс. Учебник для школ и классов с углублённым изучением математики. М.: Мнемозина, 2004.)

Наглядная картина из этих описаний ясна, но считать это математическим определением «угла поворота» никак нельзя. Педанты обязательно укажут нам на то, что «угол поворота» — не угол, поскольку бывает больше 360°, и не является характеристикой поворота, поскольку один и тот же поворот соответствует «углам поворота» в 90° и 270°. И что же это такое — угол поворота?![2]

Смирившись с невозможностью достичь желаемого, мы можем (как это делается в учебниках алгебры для старших классов под редакцией А. Н. Колмогорова) не говорить вовсе об углах поворота, а определить поворот на любое число радиан (в том числе большое) как геометрическое преобразование. Для этого надо вычесть из данного нам числа такое кратное 2π, чтобы остался геометрический угол, и выполнить поворот на этот угол. Но надо бдительно следить за собой, чтобы не написать, скажем, «поворот на угол в 5π», поскольку нас могут поймать на слове и ехидно спросить: а что это за угол? И ответить будет нечего. Придётся смущённо объяснять, что «поворот на угол в 5π» — это, мол, такая идиома, в которой оборот «угол в 5π» самостоятельного смысла не имеет. (Вроде «милостивого государя», который отнюдь не «государь, который милостив».)

Та же самая беда с тригонометрическими функциями — строго говоря, нельзя говорить «синус угла в 8 радиан», поскольку такого угла (как геометрического объекта) нет. Можно лишь говорить «синус числа 8» (это ордината точки, в которую переходит точка $(1, 0)$ при повороте на 8 радиан). Поворот, как мы видели, определяется формально, с помощью вычитания кратных 2π. Для синуса это означает, что он определяется для геометрических углов, а потом формально продолжается периодически с периодом 2π.

Верёвочки и часовые стрелки

Часто авторы не выдерживают этих попыток навести и соблюсти строгость — и демонстративно порывают с ней. Возьмите верёвочку длины 8, говорят они, и намотайте её на окружность. Её конец попадёт в некоторую точку, и эта точка имеет координаты $(\cos 8, \sin 8)$. Для -8 надо наматывать верёвочку в другую сторону. Про верёвочку уж точно ясно, что это нематематическое понятие: трудно представить себе, что в математике есть «определение верёвочки» или «аксиома о верёвочке».

Ещё несколько слов про направление поворота («по часовой стрелке»). Оставаясь в рамках аксиоматической геометрии, выражение «поворот на угол

[2] Автор-экстремист, наверно, сказал бы про гомотопический класс путей в группе $SO(2)$ или про группу, построенную из локальной группы малых поворотов.

AOB по часовой стрелке» определить нельзя. Дело в том, что в традиционных аксиомах геометрии нет ничего, фиксирующего ориентацию плоскости. Если мы рисуем геометрические фигуры на стекле, то с точки зрения «застеколья» все аксиомы выполнены. Но то, что для нас против часовой стрелки, для них будет — по. (Возможный выход состоит в том, чтобы рассматривать ориентированные углы и считать, что поворот на угол AOB и поворот на угол BOA — это не одно и то же преобразование, а взаимно обратные преобразования. Но и это сделать аккуратно довольно сложно.)

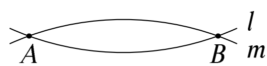
Из всех этих трудностей авторы учебников пытаются как-то выкрутиться, причём не всегда одинаково. Дело осложняется тем, что тригонометрические функции есть и в алгебре, и в геометрии, а учебники разные. (Да и по одному предмету есть несколько учебников.)

В следующих разделах мы расскажем о других «тонких местах» в школьном курсе математики и об их истории, а также посмотрим, что о них написано в школьных учебниках.

4. Аксиомы связи

Геометрия как аксиоматическая наука

Что такое прямая с точки зрения аксиоматически изложенной геометрии, понятно. Вернее, непонятно, но понятно, что и не должно быть понятно — прямая считается *неопределяемым понятием*, а некоторые её свойства — *аксиомами*. При таком подходе, условно говоря, на вопрос «что такое прямая?» мы имеем право отвечать «это меня не касается, я знаю только, что...» и перечислять аксиомы.



Например, есть аксиома о том, что *для любых двух различных точек имеется ровно одна прямая, через них проходящая.* Из этой аксиомы (сразу же) следует теорема: *две прямые имеют не более одной общей точки.* В самом деле, если разные прямые l и m имеют общие точки A и B (разные), то через A и B проходит более одной прямой, в противоречии с аксиомой.

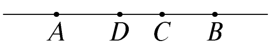
В этом рассуждении неважно, что понимается под точками и прямыми. Если понимать под точками людей, а под прямыми политические партии, и при этом аксиома окажется верной (для любых двух различных людей есть ровно одна партия, в которую они входят), то наше рассуждение докажет, что две разные партии могут иметь не более одного общего члена. Иногда говорят, что сила аксиоматического подхода в том и состоит, что мы можем рассуждать правильно, но так и не узнать, о чём мы рассуждали.

Но в курсе геометрии очень быстро рассуждения становятся сложнее — появляются новые понятия. Сразу же после точек и прямых в геометрии рассматривают *отрезки*, о которых мы немного и поговорим.

Что такое отрезок? Это часть прямой. Скажем, отрезок AB состоит из *точек прямой AB, лежащих между A и B*. Что здесь непонятного? Прямая AB — это прямая, проходящая через A и B. (Уже известная нам аксиома гарантирует, что такая прямая есть и что имя «прямая AB» не будет по недоразумению присвоено двум разным прямым — такая прямая единственна.)

Лежать между

Если вы «всё поняли», то зря. В определении отрезка есть ещё одно слово: «между». Оно настолько незаметно, что два тысячелетия, с Евклида и до конца XIX века, миллионы школьников учили геометрию по Евклиду (и его пересказам), где об этом ничего не сказано, и никто ничего не замечал. (Не сказано об этом и в классическом учебнике Киселёва.)

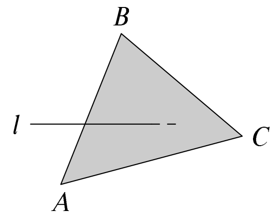


В конце XIX века, с ростом требований к математической строгости, математики начали задавать себе вопрос: а что значит «между»? Вот, скажем, есть такое свойство: *если точка C прямой лежит между точками A и B, а точка D лежит между A и C, то D лежит между A и B*. Вроде очевидно, но как это доказать? Никак, пока нет определения слова «между» (для точек на прямой).

Было решено, что это слово и не надо определять — надо считать понятие *A находится на прямой между B и C* неопределяемым, а сформулированное свойство — аксиомой. Есть и другие сразу приходящие в голову аксиомы: *если A лежит между B и C, то A лежит между C и B*; *из трёх различных точек на прямой ровно одна лежит между двумя другими*.

Но одну аксиому заметили не сразу; её назвали *аксиомой Па́ша* (по имени заметившего её математика по фамилии Паш). Она гласит, что *если прямая l пересекает одну из сторон треугольника и не проходит через его вершины, то она пересекает другую его сторону и не пересекает третью*.

Тут говорится о треугольниках и их сторонах, но это лишь способ выражения. Подразумевается такое утверждение: *если точки A, B и C не лежат на одной прямой и если на прямой l, не проходящей ни через одну из этих точек, есть точка, лежащая на прямой AB между точками A и B, то выполнено ровно одно из двух утверждений*: (1) *на прямой l есть* *точка, лежащая на прямой BC между точками B и C*; (2) *на прямой l есть точка, лежащая на прямой AC между точками A и C*. Длинно, зато никаких треугольников, отрезков и т.п. не упоминается.



Наивные люди удивились бы: а чего тут непонятного? прямая l начинается и кончается вне треугольника ABC, значит, раз войдя в него (пересекши отрезок AB), она должна и выйти (через BC или AC). Или вот другое рассуждение: если AB пересекает l, то точки A и B лежат по разные стороны от l. Для точки C, таким образом, есть два варианта расположения относительно прямой l (на прямой она лежать не может по предположению). Если C лежит по ту же сторону от l, что и A, то BC пересекает l; если по другую, то AC пересекает l.

Увы, эти рассуждения используют формально не определённые понятия «внутри треугольника», «по одну сторону от прямой», так что в строгом аксиоматическом смысле доказательствами их считать нельзя.

Основания геометрии по Гильберту

Аккуратно аксиоматическое построение геометрии было впервые проделано великим немецким математиком Давидом Гильбертом в его книге *Основания геометрии*, появившейся в конце XIX – начале XX века. Точнее следовало бы сказать — в последних изданиях этой книги, так как читатели замечали дефекты в изложении, а Гильберт их исправлял. Эта книга переведена на русский (Д. Гильберт, *Основания геометрии*, перевод с 7-го немецкого издания И. С. Градштейна, под редакцией и со вступительной статьёй П. К. Рашевского, М. – Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы). Перевод снабжён примечаниями (переводчика и редактора), в которых подробно объясняются некоторые рассуждения, лишь коротко намеченные у Гильберта. Но даже и после этих комментариев читать книгу далеко не просто.

Зато там всё строго. Скажем, аксиомы для понятия «между» (по существу уже упоминавшиеся) формулируются так:

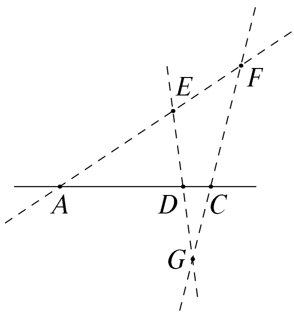
II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C суть три различные точки прямой, и B лежит также между C и A.

II_2. Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая, что точка C лежит между A и B.

II_3. Среди любых трёх точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

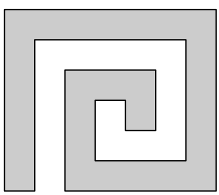
Аксиома II_4 — уже приведённая нами выше аксиома Паша.

За этими аксиомами следуют теоремы. Вот первая из них (теорема 3, с. 60): *Для любых двух точек A и C на прямой существует по крайней мере одна точка D, лежащая между A и C.*



Её доказательство начинается с применения аксиомы о точках и прямых, говорящей, что вне любой прямой есть хотя бы одна точка: «согласно аксиоме I_3 вне прямой AC существует некоторая точка E, а в силу аксиомы II_2 на прямой AE существует такая точка F, что E является точкой отрезка AF. В силу той же аксиомы, а также аксиомы II_3, на прямой FC существует точка G, не лежащая на отрезке FC. Таким образом, по аксиоме II_4 прямая EG должна пересечь отрезок AC в некоторой точке D».

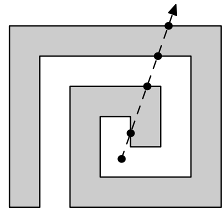
Не так просто за этим проследить, правда? (При этом помогает рисунок, но надо помнить, что это лишь иллюстрация и доказательство никак не должно опираться на этот рисунок!) А между тем это самое первое и самое простое из серии доказательств у Гильберта. Скажем, дальше строго определяется понятие «внутри многоугольника». Для этого доказывается такая теорема: *все точки, не лежащие на сторонах многоугольника* (несамопересекающегося, не обязательно выпуклого), *можно разбить на два класса таким образом, что*



- *любые две точки, лежащие в одном классе, можно соединить друг с другом ломаной, не пересекающей многоугольник*;
- *никакие две точки, лежащие в разных классах, нельзя соединить друг с другом ломаной, не пересекающей многоугольник*;
- *ровно один из классов ограничен* (*существует число, большее расстояния между любыми двумя точками этого класса*).

Неформально говоря, эта теорема утверждает, что многоугольник делит плоскость на две части, одна из которых ограничена, а другая — нет. Её обычно называют *теоремой Жордана для многоугольников* («настоящая», общая теорема Жордана утверждает то же самое для произвольных непрерывных несамопересекающихся замкнутых кривых).

Доказав теорему Жордана для многоугольников, мы можем с чистой совестью дать определение *внутренней точки* многоугольника (лежащей в том из двух классов, который ограничен).



Даже если не ставить цели провести аккуратное доказательство этой теоремы «из первых принципов» (аксиом геометрии), а просто стараться придумать хоть какое-то рассуждение, которое не сводилось бы к возгласу «ну ведь это очевидно», то это далеко не так легко сделать. (Один из возможных вариантов: выберем какой-нибудь луч, не параллельный ни одной из сторон многоугольника; чтобы определить, является ли точка внутренней, выпустим из неё луч, параллельный выбранному, и посчитаем, чётное ли число раз он пересекает стороны многоугольника — при этом пересечения в вершинах требуют отдельного учёта.) И такое в книге Гильберта — на каждом шагу и без особых пояснений!

Аксиомы связи в школе

Всерьёз отнеслись к идее строгого изложения геометрии в школе два автора учебников — великий русский (советский) учёный А. Н. Колмогоров и уже упоминавшийся А. В. Погорелов. Учебник Колмогорова сейчас уже редко встречается в школах, так что мы будем говорить о Погорелове.

Идея его книжки *Элементарная геометрия*, о которой мы уже говорили, была в том, чтобы изложить геометрию строго, но доходчиво. Строго — чтобы дотошный читатель мог истолковать текст как полное (или легко восполняемое) доказательство. Доходчиво — чтобы для не столь дотошных читателей все эти скучные обоснования были незаметны и не отвлекали от геометрической сути. Вот как сформулированы аксиомы связи в этой книжке:

II_1. Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II_2. Точка, лежащая на прямой, разбивает прямую на две полупрямые. Точки на одной полупрямой не разделяются точкой, производящей деление. Точки разных полупрямых разделяются этой точкой.

II_3. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.

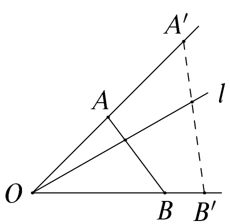
Надо отдать должное мастерству Погорелова — действительно эти утверждения выглядят просто и естественно, а одновременно им можно придать точный смысл. Например, второе из них означает, что если на прямой l выбрана точка A, то все остальные точки прямой l можно разделить на два класса таким образом, что точки одного класса не разделяются точкой A (точка A не лежит между ними), а точки разных классов разделяются точкой A (точка A лежит между ними).

В качестве примера выведем из этих аксиом вторую аксиому связи по Гильберту: для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая, что точка C лежит между A и B. В самом деле, точка C разбивает прямую на две полупрямые; точка A попадает на одну из них. Возьмём в качестве B точку на другой полупрямой. Тогда точки A и B разделяются точкой C (поскольку полупрямые разные).

Третья аксиома Погорелова для начинающих выглядит просто как описание рисунка. А для тех, кто понимает, она позволяет легко доказать аксиому Паша (которая теперь становится, так сказать, «теоремой Паша»): приведённое нами наглядное объяснение аксиомы Паша (второе из них) становится строгим её доказательством!

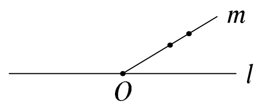
Погорелов, видимо, надеялся, что при первом чтении большинство школьников пропустят разные обоснования геометрически очевидных вещей, а при повторном чтении некоторые из повзрослевших и умудрённых школьников их оценят.

К сожалению, ничего хорошего на практике из этого не получилось — Погорелов переоценил и учителей, и школьников. Ни те, ни другие так и не прониклись тонкостями обоснований, в лучшем случае пропуская их. В результате от изящной цепи рассуждений, которая была в первой книжке Погорелова, в современных изданиях остались одни развалины.



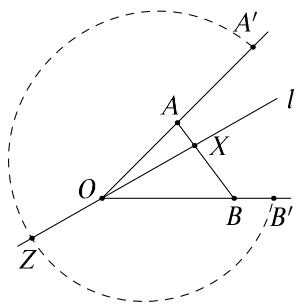
Вот один из примеров такой деградации. Возьмём определение: луч с началом в точке O [=точка O и одна из полупрямых, на которые точка O делит некоторую прямую] *проходит между* сторонами угла с вершиной O [=фигуры из двух лучей с общим началом O], если он пересекает какой-либо отрезок AB с концами на сторонах угла. Это определение сохранилось неизменным во всех изданиях. Наверное, вы с ним встречались — но задумывались ли о том, что слова «какой-либо» тут весьма существенны? Обратите внимание: в определении *мы не требуем, чтобы луч пересекал все отрезки с концами на сторонах угла.*

Этого и не нужно требовать, поскольку это можно доказать. Из аксиом следует, что если луч l пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла, он обязательно пересечёт любой такой отрезок $A'B'$. Как это доказать? В первом издании Погорелова сначала доказывается лемма: *если начало луча m находится на прямой l, а луч не лежит на этой прямой, то все точки луча m находятся по одну сторону от l* (в одной из двух полуплоскостей, на которые l делит плоскость).



Почему верна эта лемма? Возьмём две точки на луче m. Если бы они лежали в разных полуплоскостях, то соединяющий их отрезок пересекал бы прямую l. Но прямая, на которой лежит m, и прямая l пересекаются в единственной точке O. Значит, соединяющий эти две точки отрезок проходит через O, и потому они не могут лежать на одном луче!

Теперь применим эту лемму: раз точки A и A' лежат на одном луче (одной из сторон угла) с началом на прямой l, то по лемме они лежат по одну сторону от прямой l. Аналогично точки B и B' лежат по одну сторону от прямой l. Но отрезок AB пересекает l, так что A и B лежат по разные стороны от прямой l. Значит, и точки A' и B' лежат по разные стороны от l, и потому $A'B'$ пересекает l.



Но это ещё не всё: мы доказали, что отрезок $A'B'$ пересекает *прямую* l (теорема 2.3, с. 27), но ещё надо доказать, что она пересекает *луч* l (задача 18, с. 28). Решения этой задачи в книге не приводится, но можно рассуждать «от противного». Пусть это не так, то есть точка пересечения Z отрезка $A'B'$ (показанного в виде пунктирной дуги на рисунке) с прямой l лежит по другую сторону от точки O (по сравнению с точкой X пересечения луча l и отрезка AB). Тогда отрезок XZ содержит точку O, и потому X и Z лежат по разные стороны от прямой OA. Но X лежит по ту же сторону от этой прямой, что и B (поскольку отрезок XB не пересекает указанной прямой); аналогично Z лежит по ту же сторону от этой прямой, что и B'. Приходим к противоречию с тем, что B и B' лежат по одну сторону от прямой OA (лемма).

Довольно запутанные рассуждения[3], не правда ли? Не удивительно, что уже в издании 1986 года от попыток строгого обоснования свойств взаимного расположения точек остались лишь рожки да ножки. Свойство II_2 вообще опущено, а от свойства II_3 осталось лишь заклинание «Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости», без какого-либо уточнения смысла этого утверждения. Далее написано: «Полупрямой или лучом называют часть пря-

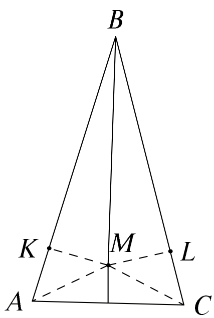
[3]Первую часть рассуждения можно изложить иначе: заметить, что по аксиоме Паша прямая l пересекает отрезок AB' для любой точки B' на луче AB, а затем применить то же рассуждение ещё раз и перейти от AB' к $A'B'$. Такое рассуждение намечено в издании 2003 года (задача 49 на с. 20, отмеченная как «задача повышенной трудности»), но вторая часть рассуждения (переход от прямой к лучу) всё равно необходима.

мой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной её точки» — строго говоря, это определение не имеет смысла, так как понятие «одной стороны» имеет смысл лишь в предположении аксиомы, которая теперь выброшена. Примерно так же обстоит дело и в издании 2003 года.

Сложившаяся практика и неизбежные опасности

Сказанное не следует воспринимать как пожелание вернуться к исходному варианту учебника: видимо, шансов растолковать строгие и деликатные рассуждения на основе аксиом всё равно нет.

Но в результате Погорелову, как и другим авторам учебников, приходится фактически опускать все рассуждения, которые обосновывают расположение геометрических объектов на чертеже: мы рисуем картинку, надеясь, что она правильна, и затем неявно опираемся на неё. Скажем, если на рисунке некая точка M на прямой оказалась между точками K и L, то мы обычно считаем возможным молча записать уравнение $MK + ML = KL$ (для длин отрезков), хотя вообще-то кто его знает, всегда ли (в условиях задачи) точка M не выйдет за пределы отрезка KL. Лишь в редких случаях, когда сразу видно несколько возможных вариантов расположения точек, мы разбираем эти варианты по очереди.



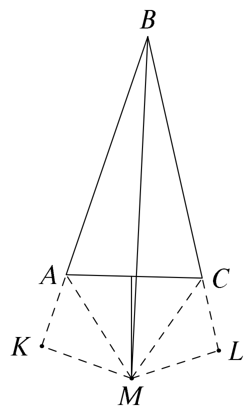
Честно говоря, такое легкомыслие вовсе не безобидно. Существует множество геометрических парадоксов, в которых «доказывается» какое-нибудь явно абсурдное утверждение. Вот один из них, который можно найти, например, в лекциях немецкого математика Феликса Клейна, изданных в 1908 году (русский перевод: Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, том 2, Геометрия, перевод Д. А. Крыжановского под редакцией В. Г. Болтянского, второе издание, М.: Наука, 1987) или в брошюре Я. С. Дубнова *Ошибки в геометрических доказательствах* (М.: Физматгиз, 1955, серия «Популярные лекции по математике», вып. 11). Докажем, что *все треугольники — равнобедренные* (пример 6 на с. 14 – 17 брошюры Дубнова, разбор ошибок на с. 30 – 31; см. также с. 311 книги Клейна).

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AB = BC$. Для этого проведём биссектрису угла B и серединный перпендикуляр к стороне AC. Пусть M — точка их пересечения. Опустим из точки M перпендикуляры MK и ML на стороны BA и BC. Точка M, лёжа на серединном перпендикуляре, одинаково отстоит от A и от C, то есть $MA = MC$. Находясь на биссектрисе угла B, она равноудалена от сторон этого угла, то есть $MK = ML$. Поэтому прямоугольные треугольники MKA и MLC равны по катету и гипотенузе. Значит, углы KAM и LCM, лежащие против равных катетов, тоже равны. Складывая эти углы с равными углами MAC и MCA (при основании равнобедренного треугольника AMC), получаем, что углы BAC и BCA равны, и треугольник равнобедренный.

Давайте честно признаемся сами себе, что это рассуждение ну ничем не хуже доказательств теорем из школьного учебника геометрии. Если бы результат не был абсурдным, то мы бы ничего так и не заподозрили.

Удалось ли вам понять, отчего получается такая ерунда? Может быть, мы незаконно рассмотрели точку M, которой не существует, поскольку прямые параллельны? Но если биссектриса и серединный перпендикуляр параллельны, то биссектриса является высотой, так что треугольник всё равно равнобедренный. (Это же относится и к случаю, когда биссектриса и перпендикуляр совпадают.)

Может быть, тогда дело в том, что точка M может находиться вне треугольника — а мы считали, что она внутри?



Действительно, этот случай заслуживает отдельного рассмотрения. Ну что ж, разберём и его. Нарисовав картинку, мы видим, что и впрямь ситуация меняется. По-прежнему $MK = ML$ и $MA = MC$ (по тем же причинам, что и раньше), так что прямоугольные треугольники MAK и MCL равны по гипотенузе и катету. По-прежнему есть пары равных углов: MAK равен MCL, а MAC равен MCA. Но складывая их, мы получаем *внешние* углы треугольника ABC. Что ж, это не страшно — если равны внешние углы, то равны и смежные с ними внутренние углы, и мы снова получаем, что треугольник равнобедренный.

При этом доказательство даже более строгое, чем принято в школьных учебниках: мы рассмотрели разные возможные положения точки M, что часто пропускается. Тем не менее результат абсурден! Что ж это такое выходит-то?! Куда смотрят министерство образования и академия наук?

Мы не будем лишать читателя удовольствия разгадать эту загадку и найти источник ошибки. Если это не будет получаться, попробуйте сделать точный чертёж, причём для случая, когда треугольник достаточно сильно отличается от равнобедренного. (Если и это не поможет, найдите книжку Дубнова — она издавалась довольно давно, но доступна в электронном виде в интернете. Заодно узнаете и другие интересные вещи — скажем, почему прямой угол «равен» тупому.)

5. Измерение отрезков

В школьных учебниках

Авторы многих современных учебников геометрии сразу же говорят о расстоянии между точками (или, что почти то же самое, о длине отрезка) как о неопределяемом понятии, и формулируют различные свойства расстояния в качестве аксиом. Пример такой аксиомы: *если точка B лежит между A и C, то расстояние AC равно сумме расстояний AB и BC.*

В таком подходе есть элемент жульничества. (Кстати, кто-то из великих математиков в шутку заметил, что аксиоматический метод имеет те же преимущества перед построением интересующих нас объектов, что и воровство перед честным трудом.)

Жульничество это двоякое — и по существу, и исторически. По существу: в геометрии мы пытаемся формулировать аксиомы, но в школьном курсе арифметики и алгебры об аксиомах не говорят. Нас сначала учат складывать натуральные числа, затем вводят дроби и отрицательные числа — и всё это безо всяких аксиом. (Мало того, потом к ним добавляются корни и всякие логарифмы, по-прежнему безо всяких аксиом.) Есть ли смысл заботиться об аксиомах в школьном курсе геометрии, если всё равно часть (и очень существенная часть) понятий остаётся без какого-либо строгого обоснования?

У Евклида

Исторически (у Евклида и вообще древних греков) отрезки и числа были разделены. Числа у них были только целыми. Иррациональных чисел не было и в помине. Говорить, что диагональ квадрата со стороной 1 имеет длину $\sqrt{2}$, греки не осмеливались — никакого *числа* $\sqrt{2}$ у них не было. Конечно, они понимали, что означают слова «точка B делит отрезок AC в отношении $2:3$» — это значит, что можно взять отрезок (*общую меру*), который в AB укладывается два раза, а в BC три раза. Но говорить об отношении диагонали квадрата к стороне как о числе $\sqrt{2}$ в этом смысле нельзя. Греки знали (и умели красиво геометрически доказывать), что диагональ и сторона квадрата не имеют общей меры — нет отрезка, который бы укладывался целое число раз и там, и там.

(В современных терминах это означает, что число $\sqrt{2}$ иррационально, то есть не представимо как отношение m/n с целыми m и n. Другими словами, это означает, что уравнение $m^2 = 2n^2$ не имеет решений в целых числах, кроме как $m = n = 0$.)

Кстати, это не мешало грекам рассматривать пропорцию $a : b = c : d$ для четырёх отрезков a, b, c, d. Мы сейчас понимаем эту пропорцию так: частное от деления длины a на длину b равно частному от деления длины c на длину d. У греков не было ни длин как чисел, ни частных. Тем не менее эту пропорцию они определить могли. Вот что написано у Евклида (*Начала* Евклида в переводе Д. Д. Мордухай-Болтовско́го, книги I – VI, М. – Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948) в Книге Пятой:

> Говорят, что величины *находятся в том же отношении*: первая ко второй и третья к четвёртой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвёртой каждая при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.

На современном языке это можно пересказать так: пропорция $a : b = c : d$ по определению означает, что

- если $ka > lb$ для некоторых натуральных k и l, то и $kc > ld$;
- если $ka = lb$ для некоторых натуральных k и l, то и $kc = ld$;
- если $ka < lb$ для некоторых натуральных k и l, то и $kc < ld$.

При этом ka определяется как приложенный k раз сам к себе отрезок a, так что с умножением целого положительного числа на отрезок всё в порядке.

Если это определение кажется непонятным, вот лишний повод подивиться мудрости древних греков. А если понятным, попробуйте доказать, что из пропорции $a : b = c : d$ четырёх отрезков следует пропорция $a : c = b : d$ и тоже подивитесь их мудрости (а также своей, когда и если это удастся; вам пригодится аксиома Архимеда, о которой идёт речь дальше).

Ещё заметим, что такой подход к геометрии сильно препятствовал развитию алгебры — в основном рассматривались лишь уравнения в целых числах (где нас интересуют только целые решения), поскольку других чисел не было, а перемножать отрезки непросто. Квадрат отрезка, допустим, можно интерпретировать как площадь квадрата с такой стороной, а куб — как объём куба, но что такое четвёртая степень отрезка? И что делать, если мы хотим в уравнении сложить x с x^2?

(Заметим в скобках, что и буквенных обозначений, не говоря уже об обозначении x^2, у греков не было — такие обозначения появились гораздо позже. Греки всё записывали словами, и получалось довольно длинно. Вот одна из евклидовских формулировок: *В тупоугольном треугольнике квадрат на стороне, стягивающей тупой угол, больше* ⟨*вместе взятых*⟩ *квадратов на сторонах, содержащих тупой угол, на дважды взятый прямоугольник, заключённый между одной из сторон при тупом угле, на которую падает перпендикуляр, и отсекаемым этим перпендикуляром снаружи отрезком при тупом угле.* Не так просто узнать теорему косинусов, правда?)

Но уравнения в целых числах греки решали; такие уравнения теперь называют *диофантовыми* по имени греческого математика Диофанта, который занимался их решением и написал про это книгу *Арифметика.*

Современная точка зрения

Аксиомы геометрии в том виде, как они даны у Гильберта, также не упоминают действительных чисел. Но к тому времени, когда Гильберт писал свою книгу (начало XX века), была построена сравнительно строгая теория действительных чисел. Имея её, можно определить длину отрезка (точнее, отношение длин двух отрезков: измеряемого и единицы измерения) как действительное число.

Идею этого определения можно объяснить так. Пусть даны два отрезка a и b. Будем говорить, что рациональное число k/l (числитель и знаменатель — целые положительные числа) *меньше* $a : b$, если $kb < la$ (отрезок b, отложенный k раз, помещается внутри отрезка a, отложенного l раз). Аналогично определяется, что значит «рациональное число m/n больше a/b». А теперь числовое значение отношения отрезков a/b определяется как *то единственное действительное число, которое больше всех дробей* k/l*, меньших* $a : b$*, и меньше всех дробей* m/n*, бóльших* $a : b$.

Тут есть немало тонкостей, которые мы пропускаем. Почему вообще найдётся дробь m/n, которая больше отношения a/b? Может быть, отрезок b настолько мал, что сколько раз его ни откладывай, мы так и не выйдем за пределы отрезка a? (Это запрещает сформулированная ещё греками аксиома геометрии, называемая *аксиомой Архимеда.*) Почему действительное число с требуемым свойством найдётся и почему оно только одно? (Это можно доказать, используя аксиомы геометрии, предложенные Гильбертом, и свойства действительных чисел.) Наконец, всякое ли положительное действительное число может быть отношением некоторых отрезков? (Всякое; для этого Гильберт включил в число аксиом геометрии специальную аксиому, называемую *аксиомой полноты.*)

6. Равенство фигур

Что такое равные фигуры?

С небольшим преувеличением можно сказать, что школьная геометрия — это наука о равных треугольниках: анализируя доказательство какой-либо теоремы, а также доказательства всех теорем, на которые она ссылается, мы в конечном счёте придём к признакам равенства треугольников. Но что такое *равные треугольники*?

Учебник Киселёва, различные варианты которого использовались в российских школах чуть ли не целый век, говорит, что *равными треугольниками называются такие, которые при наложении могут быть совмещены.*[4]

В знаменитом французском учебнике Жака Адамара,[5] написанном примерно в тот же период, равенство фигур объясняется так:

> **3**. Всякая фигура может быть перемещена в пространстве бесчисленным множеством способов без изменения своего вида совершенно так же, как это может быть сделано с обыкновенными твёрдыми телами. *Равными фигурами называются такие две фигуры, которые можно совместить одну с другой так, чтобы они в точности совпадали во всех своих частях; одним словом, две равные фигуры представляют собой одну и ту же фигуру, расположенную в двух различных местах.*

В «Началах» Евклида понятие равенства для отрезков и углов встречается без объяснений, а в применении к фигурам (в частности, треугольникам)

---

[4] Приведём полное название книги, по которой приводятся цитаты (в более поздних изданиях многое изменено; цитируемое издание можно найти в интернете): А. Киселёв. *Элементарная геометрия для средних учебных заведений.* С приложением большого количества упражнений и статьи: Главнейшие методы решения геометрических задач на построение. Издание двадцать третье. **Допущена** Уч. Ком. М. Н. Пр. в качестве руководства для средних учебных заведений, мужских и женских (Журн. М.Н.П. 1913, апрель), **рекомендована** Учебн. Ком. при Св. Синоде для употребления в духовных семинариях в качестве учебного пособия (Церк. вед., 1893, № 32); **одобрена** Деп. Торг. и Мануф. для коммерческих училищ в качестве пособия (извещение от 30 мая 1898 г., № 14128). **Рекомендована** как руководство для кадетских корпусов. Издание Т–ва под фирмой „В. В. Думнов — насл. Бр. Салаевых", Москва. Типография П. П. Рябушинского, Страстной бульвар, собственный дом, 1914. С. 29).

[5] Цитаты даются по русскому переводу; вот его полное название: Ж. Адамар. *Элементарная геометрия.* Часть первая. Планиметрия. Перевод с 11-го издания под редакцией проф. Д. И. Перепёлкина. Пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы. Издание третье. С приложением составленных проф. Д. И. Перепёлкиным решений всех помещённых в тексте задач. Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, Москва, 1948. С. 20.

означает равенство площадей — то, что мы сейчас назвали бы *равновеликостью* фигур. Поэтому нынешние «признаки равенства» треугольников у него утверждают равенство их элементов (сторон и углов). Например, предложение 4 Книги Первой гласит:

> *Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждая каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.*

Естественно, что при строгом построении геометрии понятие равенства требует уточнения, и слова «совершенно так же, как это может быть сделано с обыкновенными твёрдыми телами» не годятся. Поэтому Гильберт в *Основаниях геометрии* начинает с равенства отрезков и углов, которое он называет «конгруэнтностью», считает неопределяемым понятием и для которого формулирует аксиомы. Параграф «Третья группа аксиом: аксиомы конгруэнтности» содержит такое разъяснение:

> Отрезки [в некоторых случаях] находятся в определённом соотношении друг с другом; для обозначения этого соотношения служат слова «*конгруэнтен*» или «*равен*».

Далее формулируются аксиомы. Например, аксиома III_2 у Гильберта гласит: *Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB, то отрезок $A'B'$ конгруэнтен также и отрезку $A''B''$; короче говоря, если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны также друг другу.*

Конгруэнтность (равенство) углов также считается неопределяемым понятием, и формулируются соответствующие аксиомы. Например, аксиома III_5 гласит: *Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то имеет место также и конгруэнтность

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

(Гильберт использует знак $\equiv$ для конгруэнтности). Эта аксиома представляет собой часть признака равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними; остальные его части могут быть доказаны с использованием этой и других аксиом.)

Равные фигуры в школьных учебниках

И Колмогоров, и Погорелов в своих учебниках считают понятие числа заранее известным, а длину отрезка и величину угла — неопределяемыми понятиями. Поэтому равенство отрезков и углов можно определить как равенство их длин (величин), безо всяких разговоров о наложениях, движениях и т. п.

При этом Колмогоров вместо «равенство» говорил «конгруэнтность», следуя Гильберту. Мотивы его понятны: если геометрическая фигура — это множество точек, то равенство фигур есть равенство этих множеств: равные фигуры должны быть составлены из одних и тех же точек. Поэтому одинаковые треугольники в разных местах плоскости не равны (ведь они состоят из разных точек), а только конгруэнтны.

Но если Гильберт использовал этот термин в книге для специалистов, то Колмогоров сделал это в школьном учебнике — что вызвало понятное отторжение у учителей и родителей, и так и не прижилось. (Это было, видимо, одной из причин неприятия учебника Колмогорова, в целом трудного и мало приспособленного к реальной школе.)

В учебнике Погорелова отдельно определяется равенство треугольников и равенство произвольных фигур. А именно, говорится, что *треугольники равны, если у них равны соответственные стороны и углы.* Точнее, треугольники ABC и $A'B'C'$ считаются равными, если $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, а также $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$. Это надо, по замыслу Погорелова, чтобы избежать двусмысленного слова «соответственные» — вдруг, глядя на чертёж, учитель считает одну пару сторон соответственными, а ученик другую?

Равенство отрезков и углов, как мы уже говорили, понимается как равенство длин отрезков и величин углов (которые есть неопределяемые понятия и для которых есть аксиомы).

В результате Погорелов получает возможность излагать геометрию без ссылки на наглядное понятие наложения фигур. При этом изложение остаётся достаточно естественным. Скажем, доказательство признаков равенства треугольников, которые у Евклида (а также Киселёва, Адамара и других) использовало наложение треугольников, вместо этого ссылается на аксиому о существовании треугольника, равного данному (треугольнику), но остаётся геометрически наглядным.

Определение равенства треугольников в учебнике Погорелова имело любопытный побочный эффект. Треугольник ABC теперь равен треугольнику BAC лишь в том случае, когда он равнобедренный (поскольку требуется равенство сторон, находящихся на одинаковых местах в *наименованиях* треугольников). К этому непросто привыкнуть, поскольку, что ни говори, треугольники ABC и BAC — это один и тот же треугольник, только записанный по-разному. (Зато теперь можно вывести теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника прямо из третьего признака равенства треугольников, применив его к треугольникам ABC и BAC.)

Другое последствие — что равенство произвольных фигур (не треугольников) надо определять отдельно. Если равенство четырёхугольников (и вообще многоугольников) ещё можно определить по аналогии, через равенство сторон и углов (равенство диагоналей, к счастью, отсюда следует), то для произвольных фигур нужен другой подход.

А именно, говорит Погорелов, фигуры *равны*, если существует движение, переводящее одну фигуру в другую. А *движение* — это преобразование, сохраняющее расстояния между точками: если A переходит при движении в A', а B в B', то расстояния AB и $A'B'$ равны.[6] Ещё, конечно, надо доказать, что для случая треугольников оба определения (через равенство элементов и с помощью движений) эквивалентны.

В общем, непросто всё это. А ведь помимо равенства фигур определяется ещё и подобие. (В первом издании подобие треугольников определялось отдельно как равенство углов и пропорциональность сторон. Затем подобие произвольных фигур определялось с использованием преобразований подобия — фигуры подобны, если существует соответствие между их точками, которое изменяет все расстояния в одинаковое число раз. В следующих изданиях отдельное определение подобия для треугольников выброшено.)

В более новых учебниках авторы возвращаются к неформальному изложению в духе Адамара и Киселёва. «Два геометрических тела, две поверхности, линии или фигуры называются *равными*, если их можно совместить друг с другом» (И. Ф. Шарыгин, *Геометрия.* 7 – 9 классы. 2-е изд. М.: Дрофа, 1998). «В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными $\langle\ldots\rangle$ две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением»[7] (Л. С. Атанасян,

[6] Из текста учебника не очень ясно, имеется ли в виду преобразование, определённое на всех точках плоскости, или только взаимно однозначное соответствие между точками фигур, сохраняющее расстояние. В первом случае возникает проблема в доказательстве того, что если фигура F равна фигуре F', то и фигура F', в свою очередь, равна фигуре F; предварительно надо доказать, что отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояния, покрывает всю плоскость. При втором понимании становится неочевидным, скажем, что если один из равных многоугольников может быть вписан в окружность, то и второй тоже: ведь взаимно однозначное соответствие между точками многоугольников, сохраняющее расстояния, не определено для центра окружности.

[7] Интересно, что сказали бы авторы и их читатели про левую и правую перчатки: равны они или нет?

В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина, *Геометрия*. Учебник для 7 – 9 классов общеобразовательных учреждений. 5-е изд. М.: Просвещение, Московские учебники. 1995).

При таком подходе возникает сложность, когда авторы вводят понятие движения плоскости. С одной стороны, вроде бы это понятие считалось интуитивно ясным, и через него определялось равенство фигур. С другой стороны, даётся определение движения (перемещения) как преобразования плоскости, сохраняющего расстояние между точками. И становится непонятно, имеются ли в виду те же самые наложения, что с самого начала, или нечто другое. Шарыгин это вообще никак не комментирует; в учебнике же Атанасяна и соавторов имеется специальный пункт (115), который так и называется: «Наложения и движения». В нём авторы хотят объяснить разницу между неопределяемым понятием наложения, свойства которого перечислены в аксиомах (сформулированных в приложении 1 этого учебника) и определяемым понятием движения (преобразования, сохраняющего расстояния), а затем доказать, что разницы-то и нет: теорема на с. 276 говорит, что любое движение является наложением (а замечание перед ней — что любое наложение является движением). Думаю, что мало кто из читателей в состоянии понять, что тут имеется в виду. Я бы не поручился даже и за авторов, поскольку некоторые их формулировки выглядят странно. См., например, абзац на с. 276, который звучит как определение неопределяемого понятия наложения:

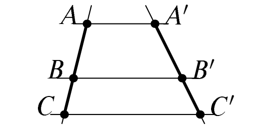
> Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. приложение 1, аксиомы 7 – 13).

Короче, вряд ли можно написать школьный учебник геометрии, сохраняя (пусть для читателей-знатоков) математическую строгость. Наиболее приблизился к этому, видимо, Погорелов, проявив в этом большую изобретательность и изящество — но и он этой цели не достиг (а в последних изданиях уже и не особо старался).

7. Пропорциональные отрезки и подобие

Ещё один деликатный момент в разных учебниках появляется в разных обличьях.

Пропорциональные отрезки



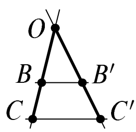
$AB : BC = A'B' : B'C'$

Пусть три параллельные прямые пересекают стороны угла — одну в точках A, B, C, а другую — в точках A', B', C'. Тогда *соответственные отрезки пропорциональны.*

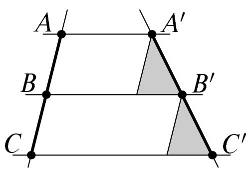
Это свойство ($AB : BC = A'B' : B'C'$) можно переписать и по-другому, используя свойства пропорций, — скажем, так:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

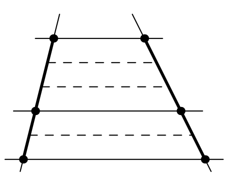
(В самом деле, можно перевернуть исходную пропорцию и заключить, что $BC/AB = B'C'/A'B'$, затем прибавить к обеим частям единицу и получить $AC/AB = A'C'/A'B'$, а затем перевернуть обратно.)



Важный частный случай (точки A и A' совпадают): если в треугольнике OCC' провести линию BB', параллельную основанию CC', то боковые стороны меньшего и большего треугольников пропорциональны: $OB : OC = OB' : OC'$.

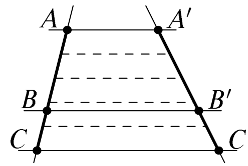


Как доказывают пропорциональность отрезков? Сначала рассматривается случай, когда $AB = BC$. Тогда равенство $A'B' = B'C'$ можно доказать, используя свойства параллелограммов и равенство серых треугольников на рисунке. Можно также сослаться на свойство средней линии трапеции: прямая, проведённая через середину боковой стороны AC трапеции $ACC'A'$ параллельно основаниям, является её средней линией.



Дальше можно рассмотреть случай, когда отрезки AB и BC имеют общую меру, то есть отрезок, который укладывается целое число раз и в AB, и в AC. Пусть, скажем, $AB : BC = 3 : 2$ и эта общая мера укладывается в AB три раза, а в BC — два раза. Тогда на одной из сторон угла возникает вереница из пяти одинаковых отрезков. Проведём через их концы параллельные прямые и рассмотрим отрезки, высекаемые ими на другой стороне. По доказанному эти отрезки равны, поэтому на другой стороне тоже возникает отношение $3 : 2$.

Дальше начинается самая трудная часть рассуждения: случай, когда отрезки AB и BC не имеют общей меры (как говорят, они *несоизмеримы*). Разделим отрезок AC на n частей. Каково бы ни было число n, точка B не попадает в точку деления (иначе отрезки AB и BC были бы соизмеримы). Значит, отрезок AB состоит из нескольких полных частей и одной неполной части. Если количество полных частей обозначить за k, то можно записать неравенства, дающие верхнюю и нижнюю оценки для отношения AB/AC:



$$\frac{k}{n} < \frac{AB}{AC} < \frac{k+1}{n}$$

(дробь k/n получилась бы, если бы неполной части не было, а дробь $(k+1)/n$ — если бы неполная часть была полной). На картинке $n = 5$ и $k = 3$, отрезок AB содержит три пятых отрезка AC и ещё немного (не доходя до четырёх пятых).

Всё это происходит на левой прямой. Но поскольку параллельные линии сохраняют порядок точек, то и справа отрезок $A'B'$ будет состоять из k полных частей и одной неполной, так что

$$\frac{k}{n} < \frac{A'B'}{A'C'} < \frac{k+1}{n}.$$

Значит, оба числа AB/AC и $A'B'/A'C'$ находятся между k/n и $(k+1)/n$ и потому отличаются друг от друга менее чем на $1/n$. А поскольку n можно взять сколь угодно больши́м, то эти числа должны попросту совпадать.

(Слово «попросту» при аккуратном изложении следовало бы заменить ссылкой на аксиому Архимеда для действительных чисел: если некоторое неотрицательное число меньше $1/n$ при всех целых положительных n, то это число равно нулю.)

Пропорциональные отрезки в школе

Изложенное нами рассуждение почти полностью повторяет изложение в учебнике Киселёва (или Адамара). Конечно, рассуждение это довольно длинное и — что ещё важнее — непривычное для школьного курса геометрии: равенство отношений выводится из того, что оно справедливо с точностью $1/n$ при любом n. Поэтому авторам учебников хочется его как-то упростить или хотя бы замаскировать, но по существу ничего нового тут не придумаешь. (По легенде один из великих математиков сказал интересующемуся наукой царю — представьте себе, такие возможны, — что в геометрии нет «царского пути» и надо изучать её с начала, как это делают обычные люди. Надо думать, что царь после этого немедленно утратил интерес к математике. Впрочем, кто знает — ведь Наполеон же выучил геометрию, правда, задолго до того, как объявил себя императором...)

Что же написано по этому поводу в современных учебниках?

В первом издании книги Погорелова (1972) приводится примерно то же рассуждение, что и у Киселёва (повторённое нами выше), правда, зачем-то откладываются отрезки, которые не укладываются целое число раз ни в AB, ни в AC.

В издании 1985 года теорема о пропорциональных отрезках немного замаскирована: рассматривается случай прямоугольных треугольников и теорема гласит, что косинус угла зависит только от величины угла (но не от прямоугольного треугольника, в котором имеется такой угол). Немного изменено и рассуждение, оно проводится «от противного».

Наконец, в издании 2003 года вновь рассматривается исходная формулировка теоремы о пропорциональных отрезках, но доказательство проводится от противного. Честно говоря, сравнивая текст Погорелова во всех вариантах с текстом Киселёва, видишь, почему Киселёва школьники понимали лучше. Недаром в последнем издании Погорелова стыдливо написано: «Докажем теорему в общем случае (не для запоминания)».

В учебнике Колмогорова с соавторами произошла совсем забавная вещь. Утверждение теоремы о пропорциональных отрезках было спрятано в довольно неожиданное место: закон дистрибутивности для умножения векторов на числа. Этот закон говорит, что если a и b — два вектора, а λ — число, то

$$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b.$$

(Доказательство при этом, естественно, не проводилось.)

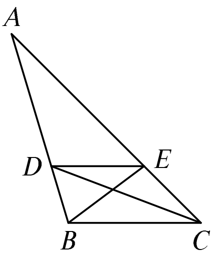
Текст Шарыгина похож на соответствующий текст в последних изданиях Погорелова. Наконец, Атанасян с соавторами выводит свойство пропорциональных отрезков из свойств площадей. Собственно говоря, аналогичным образом поступает и Евклид, и мы закончим обсуждение этой темы длинной выдержкой из Евклида (с. 175–176 русского перевода). Терминология Евклида немного непривычна, но можно догадаться, что имеется в виду; напомним только, что равными треугольниками у Евклида считаются треугольники равной площади.

Трудно даже представить себе, что всё это (естественно, не перевод, а оригинал) написано более двух тысяч лет назад. (Про древнюю Грецию потрясающе рассказал Михаил Леонович Гаспаров в книге *Занимательная*

Греция. Рассказы о древнегреческой культуре. М., 1995. Эта книга понравится даже тем, кто с отвращением скучал на уроках истории и литературы.)

Итак, говорит Евклид:

Предложение 2. *Если в треугольнике параллельно одной из сторон проведена некоторая прямая, то она пропорционально рассекает стороны треугольника; и если стороны треугольника рассечены пропорционально, то прямая, соединяющая сечения, будет параллельна остающейся стороне треугольника.*



Пусть в треугольнике ABC параллельно одной из сторон BC проведена DE; я утверждаю, что будет как BD к DA, так и CE к EA.

Действительно, соединим BE и CD.

Значит, треугольник BDE равен треугольнику CDE, ибо они на одном и том же основании DE и между одними и теми же параллельными DE и BC (предложение 38 книги I). Равные же к одному и тому же имеют то же отношение (предложение 7 книги V); значит, будет, что как треугольник BDE к [треугольнику] ADE, так и треугольник CDE к треугольнику ADE. Но как треугольник BDE к ADE, так и BD к DA, ибо они, находящиеся под одной и той же высотой, той, которая проведена из E перпендикулярно к AB, ⟨относятся⟩ между собой как основания (предложение 1). Вследствие того же вот как треугольник CDE к ADE, так и CE к EA; и, значит, как BD к DA, так и CE к EA (предложение 11 книги V).

(Далее Евклид переходит к доказательству обратного утверждения: из пропорциональности отрезков следует параллельность DE и BC; эту часть доказательства мы опускаем.)

8. Площади

Не нужно быть отличником по математике, чтобы понимать, что такое площадь. Всякий, кто меняет квартиру, понимает, что плохо, когда площадь новой квартиры меньше площади старой: вещи могут не поместиться. (Зато меньше пола для мытья.)

Площадь фигуры определяет, сколько нужно краски, чтобы её покрасить; площадь участка земли — сколько нужно зерна, чтобы его засеять.

(Последний пример был в учебнике Погорелова и часто вызывал недоумение школьников. Как так, говорили они, у нас была математическая наука, аксиомы, доказательства, строгость — и вот тебе на, посевы зерновых!)

Можно измерить площадь фигуры с помощью весов, вырезав её из однородного листа бумаги (а лучше фанеры) и сравнив вес с весом единичного квадрата из того же материала.

Но всё это, конечно, не годится в качестве строгого определения, которое можно было бы использовать в доказательствах.

Аксиомы площади

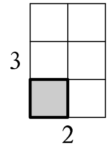
Естественно попробовать действовать аксиоматически: объявить, что всякая фигура имеет *площадь*. Это — неопределяемое понятие, которое удовлетворяет некоторым естественным аксиомам:

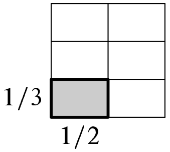
- площадь любой фигуры — неотрицательное число;
- площади равных фигур равны;
- если фигура разрезана на две части, то площадь всей фигуры равна сумме площадей её частей.
- площадь квадрата со стороной 1 равна 1.

На первый взгляд такой подход ничем не хуже аксиом для длин отрезков или для величин углов.

Следствия аксиом

Из этих аксиом можно вывести разные следствия. Например, можно доказать, что если фигура разрезана на три (или больше) частей, то её площадь равна сумме площадей этих частей. (В самом деле, можно отреза́ть части одну за другой.)

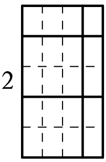




Отсюда можно вывести, что площадь прямоугольника 2×3 равна 6, поскольку его можно разрезать на 6 квадратов 1×1, каждый из которых имеет площадь 1.

Немного сложнее доказать, что площадь прямоугольника со сторонами $1/2$ и $1/3$ равна $1/6$. Это делается так: можно разрезать единичный квадрат на шесть таких прямоугольников. Все они равны и потому имеют одинаковую площадь (аксиома!), а в сумме их площадь равна 1. Значит, площадь каждого равна $1/6$.

После этого ясно, как найти площадь любого прямоугольника с рациональными сторонами. Например, прямоугольник со сторонами $4/3$ и $5/2$ можно разрезать на прямоугольники со сторонами $1/3$ и $1/2$. Площадь каждого будет $1/6$, а всего их будет $4 \times 5 = 20$, поэтому суммарная площадь равна $20/6 = 10/3$.



Таким образом, мы вывели из аксиом известную формулу: *площадь прямоугольника равна произведению* (*длин*) *его сторон.* Правда, не совсем — наш метод вычисления площади годится только для прямоугольников с рациональными сторонами.

Как доказать эту формулу для произвольных прямоугольников? Начнём с общего замечания: *если фигура F_1 является частью фигуры F_2, то площадь F_1 не превосходит площади F_2* (монотонность площади). В самом деле, вырежем фигуру F_1 из F_2 и заметим, что площадь F_2 равна площади F_1 плюс (неотрицательная) площадь обрезков.

Поэтому при уменьшении (увеличении) сторон прямоугольника площадь может только уменьшиться (соответственно увеличиться). Значит, площадь произвольного прямоугольника со сторонами α и β не меньше rs, если r и s — рациональные числа, меньшие α и β соответственно, и не больше uv, если u и v — рациональные числа, большие α и β соответственно.

Можно ли заключить отсюда, что площадь нашего прямоугольника равна $\alpha\beta$, поскольку число $\alpha\beta$ как раз обладает указанными свойствами (не меньше всех rs и не больше всех uv)? Не сразу — надо сперва доказать, что число с такими свойствами единственно. Это можно сделать, используя аксиому Архимеда, и это рассуждение (которое мы подробно проводить не будем) напоминает приведённое нами доказательство теоремы о пропорциональных отрезках.

Далее от прямоугольников можно перейти к параллелограммам (разрежем параллелограмм на части и соберём из них прямоугольник с теми же основанием и высотой), от параллелограммов к треугольникам (параллелограмм разрезается на два равных треугольника, поэтому его площадь вдвое больше площади каждого из треугольников), от треугольников к многоугольникам (которые можно разрезать на треугольники) и так далее.

Чем плохи аксиомы площади?

Можно ли считать намеченный нами аксиоматический подход к определению площади полностью удовлетворительным? Не совсем.

Во-первых, что такое фигура? Треугольник или квадрат — это, конечно, фигура. Треугольник с дыркой, наверное, тоже. А может ли фигура состоять из двух треугольников, расположенных в разных местах? И что означает равенство таких фигур?

Можно было бы определить фигуру как произвольное множество точек на плоскости. Правда, после этого возникает проблема — объяснить, что такое множество. (Теорию множеств тоже можно строить аксиоматически, но вряд ли это возможно в школьном курсе. К счастью, никто вроде не пытался!)[8]

Но даже если считать понятным слово «множество», возникают неприятные вопросы. Что значит «разрезать фигуру на две части» на этом языке? Видимо, представить её в виде объединения двух непересекающихся множеств. (Каждая точка объединения принадлежит либо одному множеству, либо второму, но не обоим сразу.)

К сожалению, знаток теории множеств не может с чистой совестью разрезать прямоугольник на две части по прямой — он ещё обязан отнести точки этой прямой к той или другой части. (Когда мы режем торт ножом, в какую часть попадают элементы торта, лежащие на линии разреза? Скорее всего, они остаются на ноже, но с разрезанием фигур так не скажешь.) Аналогично с отрезками: разрезая $[0,2]$ на две половины $[0,1]$ и $[1,2]$, мы видим, что они пересекаются и имеют общую точку 1; чтобы получить непересекающиеся множества, надо нарушить симметрию и, скажем, взять $[0,1]$ и $(1,2]$.

(Эта проблема знакома программистам: разрезая массив `a[1..n]` на две части в точке `k`, надо взять либо массивы `a[1..k-1]` и `a[k..n]`, либо `a[1..k]` и `a[k+1..n]`.)

Таким образом, приходится следить за границами. Это не фатально: надо только доказать, что площадь любого отрезка равна нулю (в самом деле, любое число непересекающихся отрезков можно поместить внутрь прямо-

[8]Под множеством, пишет создатель теории множеств, немецкий математик XIX века Георг Кантор, «я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т. е. всякую совокупность определённых элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом я думаю определить нечто, родственное платоновскому ειδος или ιδεα, а также тому, что Платон в своём диалоге „Филеб или высочайшее благо“ называет μικτος. Он противопоставляет его απειρον'у, т. е. безграничному, неопределённому, называемому мною несобственно бесконечным, равно как и περας'у, т. е. границе, и называет его упорядоченной „смесью“ обоих последних». (Г. Кантор. *Труды по теории множеств.* М.: Наука, 1985. С. 101.) Ну как, понятно?

угольника, а если бы площадь отрезка была положительна, то это привело бы к противоречию с монотонностью).

Есть ещё одна небольшая трудность: площадь всей плоскости, или даже полуплоскости, получается бесконечной, поэтому либо надо разрешить бесконечные площади (что тоже требует аккуратности), либо рассматривать только ограниченные фигуры (помещающиеся внутри некоторого прямоугольника).

А выполнимы ли аксиомы?

Серьёзная проблема на самом деле другая: а можно ли вообще определить площадь для всех ограниченных множеств на плоскости так, чтобы выполнялись указанные аксиомы? Может быть, наши требования (аксиомы) противоречат друг другу?

(Заметим, что речь идёт об определении площади для всех множеств, сколь угодно причудливых, где наша интуиция с зерном или весом уже не работает. Скажем, мы хотим определить площадь множества всех точек (x, y) в единичном квадрате, у которых обе координаты рациональны. Или множества точек, у которых одна координата рациональна, а другая иррациональна. Вряд ли интуитивное представление о площади тут поможет.)

Выполнимость аксиом площади — сложный вопрос, и специалисты дают такой удивительный ответ. Оказывается, что на плоскости можно (хотя это совсем не просто) определить площадь для всех множеств точек с соблюдением аксиом. Но аналогичную теорию объёмов для пространственных множеств построить нельзя. (А хотелось бы, чтобы теория площадей на плоскости была бы аналогична теории объёмов в пространстве.)

Парадокс Банаха – Тарского

Почему этого нельзя сделать в пространстве? Оказывается, можно разрезать шар (без центра, если быть точным) на конечное число частей, из которых можно сложить два таких же шара. А это невозможно, если мы верим в сохранение объёма при движениях (равные части имеют равные объёмы) и в правило сложения объёмов при складывании фигуры из частей. Эта конструкция называется *парадоксом Банаха – Тарского.*

(Не следует думать, что это открывает возможности практического применения математики и в голодные годы знатоки теории множеств смогут выжить, разрезая картофелину на части и превращая её в две точно таких же. Скорее наоборот — это показывает, что математическое понятие множества радикально оторвано от нашего наглядного представления о фигурах.)

Что же делать? Можно ли изложить теорию площадей в рамках элементарной геометрии, не углубляясь в сомнительные дебри теории множеств? Попытаться можно.

Площади многоугольников

Такая попытка сделана, например, в учебнике Адамара. Он говорит примерно следующее. Какие фигуры нас интересуют в первую очередь? Многоугольники. Как определить площадь многоугольника? Разрезать его на треугольники, а площадь треугольника есть половина произведения основания на высоту.

Конечно, нужно ещё доказать *корректность* этого определения. А именно — что (1) площадь треугольника не зависит от того, какую из его сторон мы выберем за основание, и (2) площадь многоугольника не зависит от того, как мы его разрежем на треугольники. Первое несложно вывести из подобия треугольников, второе Адамар тоже доказывает, но это доказательство трудно считать вполне строгим (даже и тот факт, что невыпуклый многоугольник можно разрезать на треугольники, не так просто строго доказать).

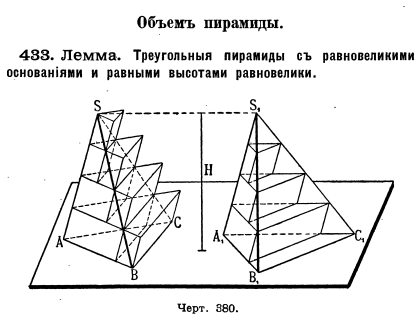
Объёмы многогранников

Аналогичная теория возможна и в пространстве, но возникает одно принципиальное отличие. Для нахождения площади многоугольников достаточно было разрезаний и перекладываний. Можно доказать, что любые два равновеликих многоугольника равносоставлены. (*Равновеликие* — имеющие одинаковые площади; *равносоставлены* — один из них можно разрезать на треугольные части, из которых составить другой.) Это утверждение называют *теоремой Бойаи – Гервина*. Его не так сложно доказать, если не углубляться в точное определение разрезания и поверить, что всякий многоугольник можно разрезать на треугольники.

В пространстве всё сложнее. Если вы попробуете разрезать, скажем, правильный тетраэдр на (многогранные) части и сложить эти части в куб, то это не удастся. И не из-за недостатка геометрической изобретательности — как выяснилось в начале XX века благодаря немецкому математику Дену, это невозможно. (Доказательство этой *теоремы Дена* — тема отдельного рассказа.)

Поэтому для вывода формулы объёма тетраэдра приходится применять *метод исчерпывания* (известный ещё Архимеду): оценивать объём сверху и снизу, вписывая в тетраэдр составленные из параллелепипедов многогранники и описывая их около него. Мы воспроизводим соответствующий рисунок (чертёж, как тогда говорили) из учебника Киселёва (с. 329); по существу то же рассуждение можно найти в учебнике Погорелова.

Одно время, когда Колмогоров пытался ввести в школьный курс элементы математического анализа, объёмы можно было вычислять с помощью интегрирования, как интеграл от площади сечений. К сожалению, постепенно от математического анализа в школьном курсе мало что осталось (если не считать механических упражнений на дифференцирование и поиск максимумов и минимумов).


Объемъ пирамиды.

433. Лемма. Треугольныя пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами равновелики.

Черт. 380.

Теория меры

В заключение скажем ещё несколько слов о том, как определяется площадь и объём в современной математике (соответствующий раздел называется *теорией меры*). Мера (площадь, объём) определяется не для всех фигур, а только для некоторых (они называются *измеримыми*). Но класс измеримых фигур настолько широк, что любая фигура, которую можно описать словами, на практике оказывается измеримой. (Построить явно пример неизмеримой фигуры не удаётся, хотя можно доказать существование таких фигур.) В частности, все фигуры из школьного курса геометрии измеримы. Для измеримых фигур выполнены перечисленные выше свойства площади. Более того, если фигура A разбита на бесконечное число частей $A_1, A_2, \ldots$ (а не только на конечное, как было в аксиомах площади), то её мера равна сумме мер частей A_i (надо только определить, что означает сумма ряда из бесконечного числа слагаемых).

9. Длина окружности и площадь круга

Ещё одно деликатное место в школьном курсе геометрии — длина окружности и площадь круга (а в стереометрии — площадь сферы и объём шара).

Длина окружности

Длина отрезка — это расстояние между его концами, длина ломаной — сумма длин её звеньев, это понятно. Но что такое длина окружности?

Можно вместо окружности нарисовать вписанный в неё многоугольник с настолько маленькими сторонами, что на глаз отличие будет незаметно, и измерить периметр (сумму длин сторон) этого многоугольника. Естественно ожидать, что периметр этого многоугольника (скажем, правильного n-угольника, вписанного в окружность, при очень большом n) будет почти такой же, как у окружности.

Но как всё-таки определить длину окружности? Можно ли взять бесконечное n и рассмотреть длину правильного вписанного n-угольника при таком n? Не стоит — хотя математики и научились рассматривать бесконечные n, не поступаясь строгостью (это называется *нестандартным анализом*), но лишь сравнительно недавно, и это требует большой осторожности (и знания математической логики, далеко выходящего за пределы школьной программы).

Какие другие варианты определения окружности можно придумать? Можно сказать, что длина окружности — это то число, к которому *стремится* периметр правильного вписанного n-угольника, когда n стремится к бесконечности. Конечно, нужно объяснить, что значит слово «стремится», или, как говорят в курсе математического анализа, дать определение *предела.*

Пределы

Это определение совсем не просто для понимания; достаточно сказать, что оно впервые было отчётливо сформулировано лишь в XIX веке (французским математиком О. Коши), хотя к этому моменту математический анализ существовал несколько веков и были доказаны весьма трудные и важные теоремы. Но, доказывая эти теоремы, математики удовлетворялись интуитивным понятием о пределе и смутными рассуждениями про бесконечно малые величины (и поэтому современные педанты могут и не счесть эти рассуждения доказательствами).

Дать определение предела несложно (хотя понять сложнее). В нашем случае оно может быть сформулировано так: *число L является длиной окружности, если для всякого положительного ε можно указать натуральное число N с таким свойством: периметр правильного вписанного многоугольника с любым числом сторон, большим N, отличается от L не более чем на ε.*

Разумеется, после этого ещё надо доказать, что такое число L существует и что оно единственно; это совсем не так просто (особенно первое).

Можно заменить вписанные многоугольники на описанные, но перечисленные сложности не пропадут.

Периметры вписанных и описанных многоугольников

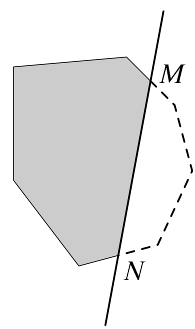
В определении длины окружности можно обойтись и без пределов, и это умел делать уже Архимед в древней Греции. Можно сказать так: *длина окружности — это число, не меньшее периметров всех вписанных многоугольников и не большее периметров всех описанных.* (Конечно, нужно фиксировать единицу измерения или говорить, как это делали греки, об отрезке, длина которого равна периметру окружности.)

Это определение будет строгим, если мы сделаем три вещи. Надо:

• доказать, что периметр любого вписанного многоугольника меньше периметра любого описанного;

• заключить отсюда, что существует разделяющее их число (не меньшее одних и не большее других);

• доказать, что такое разделяющее число единственно.



Первое совсем несложно. Если мы отрезаем прямыми ножницами кусок от бумажного многоугольника, то его периметр уменьшается (прямой разрез MN заменяет ломаную границу прежнего многоугольника на участке от M до N). Значит, при вырезании внутреннего многоугольника из внешнего с помощью нескольких разрезов мы уменьшаем его периметр (на каждом шаге, а потому и в целом).

Второе утверждение (существование разделяющего числа) является одной из аксиом при строгом построении теории действительных чисел.

Наконец, третье утверждение тоже можно доказать, используя аксиому Архимеда (достаточно рассматривать правильные вписанные и описанные n-угольники).

Кстати, именно этот метод (сравнение с вписанными и описанными многоугольниками) Архимед использовал, чтобы доказать, что число π заключено между $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$.

Площадь круга

Перейдём теперь к площади круга. Её тоже можно определить как число, разделяющее площади вписанных и описанных многоугольников (а также как предел площадей вписанных правильных n-угольников при стремлении n к бесконечности, или ещё что-нибудь в таком роде).

Что ещё — помимо определений, которые мы обсудили, — говорится в школе о длине окружности и площади круга?

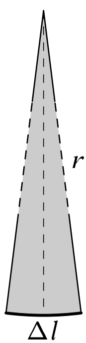
Свойства

Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$.

Что это — определение числа π или теорема, которую можно доказывать? На самом деле и то, и другое — это определение числа π (как половины отношения длины окружности к её радиусу) вместе с утверждением о корректности этого определения (отношение длины окружности к радиусу не зависит от размера окружности).

Это утверждение о корректности можно доказывать (при том или ином определении длины); при этом используется тот факт, что отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.

Площадь круга радиуса r равна πr^2.



$\Delta S = \frac{\Delta l \cdot r}{2}$

Здесь два утверждения: (1) что площадь круга пропорциональна квадрату радиуса и (2) что коэффициент пропорциональности не абы какой, а то самое число π, которое возникает в длинах окружностей.

Первое можно доказывать, используя тот факт, что отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Второе можно объяснить наглядно так. Будем считать, что окружность — это правильный многоугольник с бесконечным числом сторон. Тогда круг разобьётся на бесконечное число треугольников. Высота каждого из них (опущенная на бесконечно малую сторону) равна радиусу, а длины оснований (Δl) в сумме дают длину окружности, поэтому сумма площадей (ΔS) треугольников равна половине произведения высоты (радиуса) на сумму оснований (длину окружности).

Это же рассуждение можно приспособить к формальным определениям длины окружности и площади круга (с бóльшими или меньшими хлопотами, в зависимости от того, какое определение выбрано).

10. Площадь поверхности и объём

Переходя к пространству, вместо окружностей и кругов надо рассматривать сферы и шары и определять площадь сферы и объём шара. Тут появляются дополнительные сложности.

Многогранники сложнее многоугольников

На плоскости в окружность можно было вписывать (или около неё описывать) правильные n-угольники при произвольном n (которое затем неограниченно увеличивалось). В пространстве этого не сделаешь. Во-первых, правильные многогранники надо ещё определить; во-вторых, при разумном определении их оказывается всего пять (куб, октаэдр, тетраэдр, додекаэдр и икосаэдр) и неограниченно увеличивать тут нечего.

Вообще с многогранниками сложнее иметь дело, чем с многоугольниками. Все знают, что в n-угольнике n углов («Сколько стоит пятикопеечная булка?»). Нетрудно сообразить, что в n-угольнике n сторон (хотя из названия этого не видно): обходя его по кругу, мы на каждом шаге обнаруживаем новую сторону и новый угол (вершину).

А сколько будет вершин в многограннике с n гранями? Оказывается, что однозначно ответить на этот вопрос нельзя — в разных n-гранниках может быть разное число вершин. Например, куб имеет шесть граней и восемь вершин. Столько же граней имеет пирамида, в основании которой пятиугольник (основание и пять боковых граней), но вершин у неё всего шесть. Кстати сказать, помимо вершин (В) и граней (Г) у многогранника ещё можно считать рёбра (Р), и вместо тривиального соотношения для многоугольников (число углов равно числу сторон) для многогранников есть *формула Эйлера*:

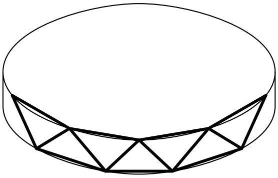
$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2.$$

(Если вы не встречались с этой формулой, проверьте её на разных примерах. Вообще-то тут ещё надо уточнять, что такое многогранник и что считается его вершинами, гранями и рёбрами. Скажем, если в многограннике есть сквозной «туннель», то эта формула будет неверна.)

Ещё одно отличие. Чтобы вписать многоугольник в окружность, достаточно было выбрать на окружности несколько точек и потом соединить их сторонами (в том порядке, как они следуют вдоль окружности). Другого многоугольника с теми же вершинами не существует. Но если мы возьмём несколько точек на сфере, то совсем не так ясно, как сделать их вершинами многогранника; и действительно, может быть несколько многогранников с одними и теми же вершинами.

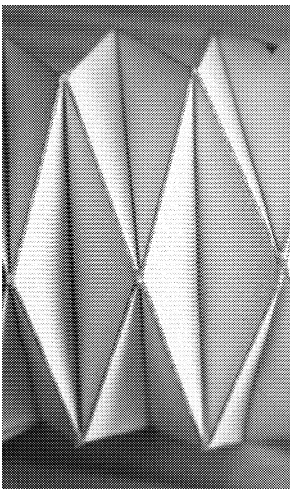
Так что же такое площадь поверхности? Попробуем определить её как то число, к которому стремятся площади поверхности вписанных многогранников, когда все их грани становятся очень малыми. Увы, это не годится, как показывает следующий пример.

Сапог Шварца



В этом примере (названном по имени немецкого математика Г. Шварца, жившего в XIX веке) вписанный многогранник как бы сложен в гармошку, и потому его поверхность может быть очень большой.

Объяснить его построение проще на примере цилиндра (а не сферы). Рассечём цилиндр двумя плоскостями на расстоянии d (перпендикулярно его оси). Получится две окружности. Впишем в них правильные n-угольники, но со сдвигом: вершина одного находится около середины стороны другого. Соединим эти n-угольники треугольными гранями и получим многогранник, у которого две грани — правильные n-угольники, а остальные — треугольники. Такие «плашки» можно приложить друг к другу (совместив n-угольные грани) и получить многогранник, вписанный в цилиндр.



В этом построении есть два параметра: число сторон n и толщина плашки d. Сначала мы выбираем достаточно большое n. Это гарантирует, что вписанный многогранник будет проходить близко от цилиндра. Затем — при данном n — мы уменьшаем d. Треугольные грани, которые при больших d были почти что параллельны оси цилиндра, отклоняются всё больше и больше. И если выбрать d малым, то треугольные грани станут почти параллельны основанию цилиндра. При этом их суммарная площадь станет гораздо больше площади цилиндра (как знают портные, платье со сборками требует больше ткани, чем гладкое).

Такой «сапог» нетрудно сложить из бумаги: надо нарисовать шариковой ручкой сетку из прямых на листе бумаги, а затем сложить этот лист в гармошку, сгибая по линиям сетки (см. фотографию, где ось цилиндра горизонтальна, а грани не такие мелкие, как на предыдущем рисунке).

Определение площади поверхности

К счастью, площадь сферы всё-таки можно определить с помощью вписанных и описанных многогранников, только нужно потребовать, чтобы они были выпуклые. Начнём с такого замечания (аналогичное утверждение для многоугольников нам уже встречалось): если один выпуклый многогранник содержится в другом, то площадь поверхности внутреннего не больше, чем у внешнего. В самом деле, если отрезать от многогранника «шапочку» (плоским разрезом), то площадь поверхности уменьшится: выпуклая шапочка заменится на плоское сечение, имеющее меньшую площадь.

Поэтому можно определить площадь сферы как число, находящееся между площадями поверхностей вписанных и описанных *выпуклых* многогранников. (Такое число единственно, хотя доказать это не так просто.) А объём шара можно определить как число, заключённое между объёмами вписанных и описанных многогранников (уже не обязательно выпуклых).

К сожалению, это определение годится для сферы, но не годится, скажем, для поверхности шара со вмятиной: в такую поверхность при всём желании выпуклый многогранник не впишешь (а выпуклость важна, как мы видели).

Но главное — как найти объём шара и площадь поверхности?

11. Архимед

Эта сделал великий Архимед. В *Началах* Евклида вычисляется объём конуса, но нет ничего про поверхность конуса, а также про объём и поверхность шара. Про них написано в сочинении Архимеда *О шаре и цилиндре*, которое начинается так:

> *Архимед Досифею желает радоваться!*
>
> Я уже послал тебе запись наших открытий вместе с доказательством, что всякий сегмент, заключённый между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом одно и то же основание и одинаковую высоту; позднее, когда нам пришли на ум другие стоящие внимания теоремы, мы потрудились над их доказательствами. Теоремы эти таковы:
>
> во-первых, *поверхность всякого шара в четыре раза больше его большого круга*;
>
> затем, *поверхность всякого шарового сегмента равна кругу, радиус которого равен прямой, проведённой из вершины сегмента к окружности круга, составляющего основание сегмента*;
>
> кроме того, *для всякого шара цилиндр, имеющий основанием больший круг этого шара, а высотой — прямую, равную*

диаметру шара, и сам будет в полтора раза больше этого шара, и поверхность его тоже в полтора раза больше поверхности этого шара.

(Цитаты из Архимеда приводятся по книге: Архимед. *Сочинения*. Перевод, вступительная статья и комментарии И. Н. Веселовского. Перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, 1962.) Далее у Архимеда идёт такой философский комментарий:

> Конечно, эти свойства были и раньше по самой природе присущи упомянутым фигурам, но всё же они оставались неизвестными тем, кто до нас занимался геометрией, и никому из них не пришло на ум, что все эти фигуры являются соизмеримыми друг с другом; поэтому я не поколебался бы сравнить эти теоремы с теми, которые были открыты другими геометрами, и в частности с наиболее выдающимися теоремами, которые были открыты для тел Евдоксом, а именно, что всякая пирамида составляет третью часть призмы, имеющей с пирамидой одно и то же основание и одинаковую высоты, и что всякий конус составляет третью часть цилиндра, имеющего с конусом одно и то же основание и одинаковую высоту; действительно, хотя эти свойства по природе всегда были присущи указанным телам, но всё же оказалось, что они остались неизвестными многим жившим до Евдокса знаменитым геометрам и ни одному из них не пришли на ум. Теперь же их могут усмотреть все, имеющие к тому силы.

Видимо, первоначально Архимед пришёл к этим результатам, используя механические соображения. Но изложить он их старается строго, без ссылок на механику, и формулирует допущения, на которые он ссылается:

> Прежде всего излагаются аксиомы и необходимые для доказательства их допущения.

Аксиомы

1. *На плоскости существуют некоторые ограниченные кривые линии, которые или целиком находятся по одну сторону от прямых, соединяющих их концы, или ничего не имеют по другую их сторону.*

2. *Тогда выпуклой в одну и ту же сторону я называю такую линию, для которой прямые, соединяющие две произвольные*

её точки, будут или все находиться по одну сторону этой линии, или же некоторые по одну её сторону, другие же на самой линии, но никакая такая прямая не будет находиться по другую её сторону.

3. *Подобным же образом существуют некоторые ограниченные поверхности, которые не лежат сами на плоскости, но имеют на плоскости свои границы, причём эти поверхности будут или целиком находиться по одну сторону от плоскости, содержащей их границы, или ничего не будут иметь по другую сторону от неё.*

4. *Выпуклыми в одну и ту же сторону я называю такие поверхности, для которых прямые, соединяющие две произвольные их точки, будут или все находиться по одну сторону этой поверхности, или же некоторые по одну сторону, другие же на самой поверхности, но никакая из них не будет находиться с другой её стороны.*

Надо иметь в виду, что «прямыми» здесь именуется то, что мы называем «отрезками». Определение выпуклости почти современное; разница в том, что сейчас мы бы говорили о выпуклости тел, а не их поверхностей (чтобы избежать понятия «по одну сторону от поверхности»).

Далее у Архимеда говорится:

Допущения

Я принимаю следующее:

1. *Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая является кратчайшей.*

2. *Две другие линии, расположенные на плоскости и имеющие те же самые концы, будут всегда неравными, если обе они выпуклы в одну и ту же сторону, и одна из них или целиком объемлется другой линией и соединяющей их концы прямой, или же часть её объемлется другой, часть же является общей обеим линиям; при этом меньшей будет объемлемая линия.*

Для многоугольников, как мы видели, это можно доказать; для кривых это утверждение можно рассматривать как аксиому или как определение длины кривой. Аналогичные утверждения Архимед формулирует и для поверхностей:

3. *Подобным же образом из поверхностей, имеющих общую границу, расположенную на плоскости, наименьшей будет плоскость.*

4. *Две другие поверхности, имеющие общую границу, расположенную на плоскости, будут всегда неравными, если обе они выпуклы в одну и ту же сторону и одна из них или целиком объемлется другой поверхностью и плоскостью, содержащей их общую границу, или же часть её объемлется другой, часть же является общей обеим поверхностям; при этом меньшей будет объемлемая поверхность.*

Далее следует та самая «аксиома Архимеда», о которой мы говорили:

5. *Далее, бо́льшая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определённом отношении.*

Приведя эти аксиомы и допущения, Архимед находит сначала площадь поверхности цилиндра и конуса. Для этого он сравнивает их с поверхностями вписанных и описанных призм (для цилиндра) и пирамид (для конуса).

Затем Архимед переходит к площади поверхности шара. Для этого он сравнивает его с вписанной и описанной фигурами, состоящими из усечённых конусов. (Шар получается вращением круга; эти фигуры получаются, если вращать не круг, а вписанный в него или описанный около него многоугольник.) Сначала он доказывает, что *поверхность вписанной в шар фигуры, ограниченной коническими поверхностями, меньше учетверённого большого круга шара* (раздел XXV). Затем — что *поверхность описанной около шара фигуры больше учетверённого большого круга в шаре* (раздел XXX). Наконец, используя допущение 5, он устанавливает, что *поверхность шара равна его учетверённому большому кругу* (раздел XXXIII).

Аналогичные рассуждения (с оценками снизу и сверху) проводятся и для объёмов.

В трудах Архимеда замечательны не только сами результаты (найденные им площади и объёмы), но и тот уровень строгости, с которым они излагаются. С появлением в XVII веке «анализа бесконечно малых» (интегрального и дифференциального исчисления) сами формулы для объёма шара и площади сферы стали простым упражнением в интегрировании, но логическую отчётливость, с которой Архимед выделяет используемые им предположения, и строгость его рассуждений по достоинству смогли оценить лишь в XIX веке. Вот что он пишет в книге *Послание к Эратосфену. О механических теоремах*:

> Действительно, кое-что из того, что ранее было мною усмотрено с помощью механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение с помощью этого метода ещё не является доказательством; однако получить при помощи этого метода представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания ничего не зная. Поэтому и относительно тех теорем о конусе и пирамиде, для которых Евдокс первый нашёл доказательство, а именно, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида — третью часть призмы с тем же самым основанием и равной высотой, немалую долю заслуги я уделю и Демокриту, который первый высказал это положение относительно упомянутых фигур, хотя и без доказательства. И нам довелось найти публикуемые теперь теоремы тем же самым методом, как и предыдущие; поэтому я и решил написать об этом методе и обнародовать его, с одной стороны, для того, чтобы не оставались пустым звуком прежние мои упоминания о нём, а с другой, поскольку я убеждён, что он может принести математике немалую пользу; я предполагаю, что некоторые современные нам или будущие математики смогут при помощи указанного метода найти и другие теоремы, которые нам ещё не приходили в голову.

(с. 299 русского издания трудов Архимеда). Далее он излагает вычисление площади сегмента параболы с помощью понятия центра тяжести и замечает:

> Хотя это всем вышеприведённым рассуждением не доказано, но всё же оно производит впечатление, что окончательный вывод правилен; поэтому мы, видя недоказанность выведенного, но подозревая его правильность, предложим найденное нами и опубликованное ранее геометрическое доказательство.

В этой работе механика используется как инструмент предварительного анализа математических вопросов. Есть у Архимеда и собственно механические работы. В работе *О плавающих телах* сформулирован знаменитый закон Архимеда:

> *Тела более лёгкие, чем жидкость, опущенные в эту жидкость насильно, будут выталкиваться вверх с силой, равной*

тому весу, на который жидкость, имеющая равный объём с телом, будет тяжелее этого тела.

Но это — лишь простая часть работы: в ней исследуется гораздо более сложный вопрос о равновесии плавающих тел. Приведённый нами закон Архимеда позволяет вычислить, какая часть плавающей доски будет погружена в воду — надо только знать её плотность. Но объяснить, почему доска плавает плашмя, а поставленная на бок — неустойчива, гораздо сложнее. Архимед разбирает этот вопрос для тела вращения, образованного частью параболы.

12. А нельзя ли проще?

Рассуждения Архимеда при всей своей строгости слишком сложны для современных школьников, поэтому авторы учебников стараются заменить их чем-нибудь более наглядным, пусть и не строгим.

Например, Погорелов в своём учебнике исходит не из формального определения площади сферы, а из наглядного представления: если поверхность площади S выкрасить с одной стороны слоем краски толщиной h, то общий объём израсходованной краски будет примерно Sh при малых h.

Слово «примерно» тут не случайно: на самом деле точное количество краски зависит не только от площади, но и от формы поверхности. На выпуклые поверхности (по сравнению с вогнутыми) краски уходит немного больше. Чтобы окрасить шар снаружи, нужно немного больше краски, чем чтобы окрасить круглую полость того же размера изнутри (при той же толщине слоя краски). Это особенно ясно, если представить себе толстый слой краски (скажем, в половину радиуса шара). Но это существенно только при больших h; при малых h эффект почти незаметен, и если в хозяйственном магазине вас предупреждают, что расход краски для наружных и внутренних работ разный, то это не из-за тонких геометрических эффектов, а потому, что для наружных работ употребляется другая краска и толщина слоя будет другой.

Теперь можно понять, как вычислить площадь сферы, зная формулу для объёма шара

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Доказательство этой формулы мы ещё обсудим, а сейчас объясним, как из неё получается формула для площади сферы.

Покрасим шар радиуса r слоем краски толщиной h. Крашеный шар имеет объём

$$V' = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 = \frac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3],$$

и чтобы найти объём слоя краски, надо вычесть объём некрашеного шара. Первое слагаемое сократится, останутся три:

$$V' - V = \frac{4}{3}\pi[3r^2h + 3rh^2 + h^3].$$

Чтобы найти площадь, надо разделить объём на толщину слоя краски; получится

$$S \approx \frac{V' - V}{h} = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3rh + h^2] = 4\pi r^2 + 4\pi rh + \frac{4}{3}\pi h^2.$$

Мы уже объясняли, что эта формула неточная; погрешность уменьшается с уменьшением h. При малых h в правой части обнуляются все члены, содержащие множитель h, и остаётся $4\pi r^2$, что и требовалось.

Это объяснение, правда, не позволяет найти площадь сферического сегмента и доказать такой замечательный результат Архимеда: *площадь части сферы, высеченной двумя параллельными плоскостями, пропорциональна расстоянию между этими плоскостями и не зависит от того, какая часть сферы между ними попала.*

(Это можно назвать «теоремой об апельсине в яйцерезке» — если разрезать тонкокожий сферический апельсин на ломтики одинаковой толщины, то кожуры во всех ломтиках будет поровну.)

Принцип Кавальери

А как найти объём шара, пусть и не очень строго? Можно воспользоваться рассуждением Архимеда, основанным на принципах механического равновесия. Но, пожалуй, проще понять наглядное объяснение, основанное на *принципе Кавальери.*

Этот принцип утверждает, что если два тела, положенные на стол, таковы, что любая горизонтальная плоскость рассекает их по равновеликим фигурам, то объёмы тел одинаковы. А если площади сечений отличаются в постоянное число (λ) раз, то и объёмы отличаются в λ раз.

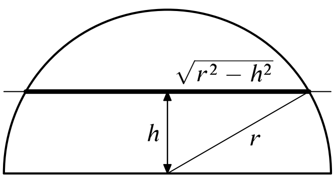
Например, если поставленные на стол конус и тетраэдр имеют равные высоты и одинаковые по площади основания (круг и треугольник), то в любом сечении получатся равновеликие круг и треугольник (они подобны основаниям с одинаковым коэффициентом подобия, который пропорционален высоте). Отсюда — по принципу Кавальери — следует, что объёмы их одинаковы.

(То же самое рассуждение показывает, что две пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями имеют равные объёмы — утверждение, которое мы уже упоминали.)

Интуитивно этот принцип кажется достаточно правдоподобным: разрежем оба тела на тонкие «ломтики», проведя множество горизонтальных сечений. Тогда соответствующие ломтики двух тел имеют одинаковую площадь. Значит, и суммарные объёмы одинаковы. (Если два батона положили рядом и порезали на ломти, и площади отрезанных вместе ломтей одинаковы, то и их объёмы одинаковы, ведь толщина ломтей одинакова. А значит, и общие объёмы двух батонов одинаковы.)

Конечно, это рассуждение содержит погрешность: объём ломтя не в точности равен произведению площади сечения, умноженной на толщину. Разница возникает из-за «краевых эффектов» — но ломти можно сделать очень тонкими и этой разницей пренебречь.

Вычисление объёма шара

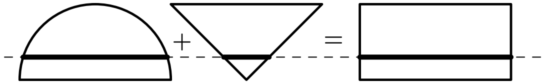


Как принцип Кавальери помогает в случае шара? Для удобства мы разрежем шар на две равные половины и будем искать объём полушара, положенного на стол плашмя.

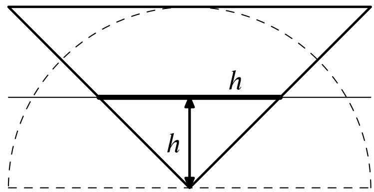
Пусть r — радиус (полу)шара, а секущая плоскость проходит на высоте h. Тогда в сечении получается круг, радиус которого можно найти по теореме Пифагора. Он равен $\sqrt{r^2-h^2}$. Соответственно площадь сечения равна

$$\pi(r^2-h^2)=\pi r^2-\pi h^2.$$

Уменьшаемое (πr^2) не зависит от высоты, а вычитаемое пропорционально квадрату высоты, на которой проходит сечение. Легко сообразить, что вычитаемое есть площадь круга радиуса h, который можно рассматривать как сечение прямого кругового конуса, поставленного остриём вниз, а уменьшаемое — сечение цилиндра. Внизу конус даёт нулевое сечение, а шар совпадает с цилиндром; вверху — наоборот.



(Глядя на этот вид сбоку, надо иметь в виду, что мы складываем *площади кругов*, возникающих при сечении шара и конуса, а не дли́ны отрезков, изображённых на рисунке.)



Таким образом, по принципу Кавальери суммарный объём конуса и шара равен объёму цилиндра. Объём цилиндра равен произведению основания на высоту, то есть $\pi r^2 \times r = \pi r^3$, объём конуса равен трети объёма цилиндра. Значит, объём полушара равен $\frac{2}{3}\pi r^3$, а объём всего шара, как мы и говорили, равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

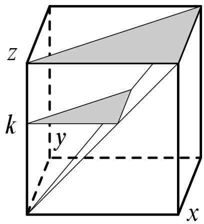
Объём пирамиды и принцип Кавальери

Отметим заодно, что принцип Кавальери можно использовать, чтобы найти объём пирамиды. Мы уже говорили, что из этого принципа следует, что объём пирамиды определяется высотой и площадью основания и не зависит от формы пирамиды. Более того, для пирамид данной высоты h он пропорционален площади основания S, то есть равен chS для некоторой константы c, которую осталось найти.

Чтобы найти c, заметим, что куб со стороной h можно разрезать на 6 пирамид, в основании которых лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами по h, а высота равна h. Это разрезание проще всего объяснить с помощью метода координат. Вспомним, что точка куба задаётся тремя координатами x, y, z, которые пробегают отрезок $[0, h]$. Для этих координат есть шесть возможностей взаимного расположения:

$$\begin{array}{lll} x \leqslant y \leqslant z, & y \leqslant z \leqslant x, & z \leqslant x \leqslant y, \\ x \leqslant z \leqslant y, & z \leqslant y \leqslant x, & y \leqslant x \leqslant z. \end{array}$$

Соответственно куб делится на шесть частей (равных, поскольку они отличаются лишь именами переменных). А одна такая часть представляет собой пирамиду описанного вида. Например, часть $y \leqslant x \leqslant z$ имеет в сечении высоты k треугольник на плоскости (x, y), задаваемый неравенствами $0 \leqslant x \leqslant k$, $0 \leqslant y \leqslant k$, $x \leqslant y$. Если глубоко вздохнуть, закрыть глаза и представить себе такие треугольники, поставленные друг над другом, то перед вашим мысленным взором появится пирамида. (Если не появится, попробуйте вздохнуть глубже или порешать задачи по стереометрии.)



Возвращаясь к кубу, мы видим, что его объём h^3 в шесть раз больше объёма каждой из шести пирамид, так что константа c в формуле для объёма пирамиды равна $1/3$ (площадь основания $h^2/2$, высота h).

Современный подход

В заключение раздела о геометрии скажем, как определяются объём тела и площадь поверхности «с точки зрения современной науки». Объём, как и площадь, определяется в теории меры. Там же доказывается современное уточнение принципа Кавальери: *объём тела равен интегралу площади сечения как функции от высоты, на которой проведено сечение*. Далее остаётся лишь вычислять эти интегралы. Для шаров, конусов, пирамид и т. д. это несложно, достаточно уметь интегрировать многочлены. (Именно так делает Погорелов — вот только определение интеграла и все обоснования остаются за кадром.)

Площадь поверхности научно определить немного сложнее. Можно брать объём её ε-окрестности, то есть множества всех точек, для которых расстояние до ближайшей точки поверхности меньше ε, затем делить этот объём на ε и устремлять ε к нулю. В пределе получится удвоенная площадь поверхности (поскольку окрашиваются обе стороны). (Вообще говоря, не для любого множества такой предел существует, так что надо ещё доказать его существование для интересующих нас поверхностей.)

Другой вариант состоит в том, чтобы «интегрировать форму объёма по поверхности», что наглядно соответствует разбиению поверхности на бесконечно малые части, которые можно считать плоскими, и сложению площади бесконечного числа бесконечно малых частей (подробно смысл этого объясняется в курсе математического анализа).

13. А что по алгебре?

До сих пор мы говорили в основном о курсе геометрии. Именно там есть аксиомы, теоремы, доказательства. Школьный курс алгебры в этом отношении более загадочен — теорем там мало, аксиомы вообще не упоминаются, а задачи в основном почему-то сводятся к решению уравнений и неравенств, и большую их часть можно решать по готовым образцам (так что честнее было бы назвать их не задачами, а упражнениями).

Каверзные вопросы

Но всё-таки, как же определяются основные понятия алгебры? Что означает неравенство $a < b$? И почему, скажем, мы имеем право умножать обе части этого неравенства на положительное число c, а при умножении на отрицательное должны изменять знак? И почему из неравенств $a < b$ и $b < c$ можно заключить, что $a < c$? Даже и без неравенств вопросов масса: почему при переносе слагаемого в другую часть равенства надо менять знак? Или даже: почему при перемене мест слагаемых сумма не меняется? Или совсем страшный (по своей философской глубине) вопрос — а что означает, что два числа равны?!

В общем, если добропорядочный школьник, прилежно изучавший математику, перед выпускным или вступительным экзаменом придёт в философское настроение и задумается, на чём основаны все эти столь привычные ему при решении задач правила и действия, ему будет непросто что-нибудь ответить. (Вообще привычная жизнь, если начать задумываться о ней — странная штука. Об этом замечательно написано в «Исповеди» Льва Толстого. Но мы отвлеклись.) Все школьные годы он честно менял знак (по крайней мере старался не забыть это сделать) при переносе слагаемого в другую часть равенства, но почему? Это что, прихоть учителя? Указание министерства просвещения? Мировой заговор власть имущих, которые внушили всем, что надо действовать так, и подавляют все попытки нарушить этот запрет? А может, всё-таки рискнуть и попробовать нарушить? Вот, говорят, Лобачевский построил неевклидову геометрию, в которой аксиома о параллельных неверна и параллельные прямые пересекаются — может, можно построить и нетрадиционную алгебру, в которой правила действий другие, и прославиться вслед за ним?

Отступление о Лобачевском

Кстати, о Лобачевском. Если вы прочли предыдущий абзац и не обратили внимание на глупость, в нём содержащуюся, то перечитайте ещё раз. Теперь заметили? Конечно, в геометрии Лобачевского параллельные прямые не пересекаются — поскольку это просто *определение* параллельности и ни от каких аксиом не зависит.

А разница в другом — в геометрии Лобачевского через данную точку вне данной прямой можно провести несколько прямых, параллельных данной! Интересно, что это заблуждение (о том, в чём состоит новаторская идея Лобачевского) очень распространено, как вы можете убедиться, порасспросив окружающих — тех, которые вообще что-то слышали о Лобачевском!

История вопроса тут такова. Пятый постулат Евклида (иногда называемый также одиннадцатой аксиомой) формулируется так: *И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.* Это — перевод Веселовского; более современный пересказ (Рашевского в предисловии к переводу *Оснований геометрии* Гильберта) звучит так: *всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше* $2d$ [то есть 180°], *эти прямые пересекаются и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше* $2d$.

В современных учебниках эту формулировку обычно заменяют эквивалентной: *через любую точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.* (Отметим, кстати, что *возможность* проведения параллельной прямой через любую точку вне данной прямой следует из других аксиом, так что в аксиому о параллельных можно включать лишь *единственность* такой прямой.)

Комментаторы Евклида пытались доказать пятый постулат, но с современной точки зрения эти доказательства просто заменяли его на эквивалентное утверждение (например, о существовании неравных подобных треугольников). Предположив, что пятый постулат неверен, можно вывести из этого предположения много парадоксальных следствий, в безуспешной надежде найти среди них прямое противоречие (и тем самым доказать пятый постулат). Постепенно стали подозревать (и первым опубликовал это предположение Лобачевский), что противоречия нет вовсе, и полученная геометрия (*неевклидова*, где пятый постулат заменён на противоположное утверждение: *через некоторую точку проходят две прямые, параллельные некоторой прямой*) хотя и выглядит странно, но логически ничем не хуже евклидовой.

Впоследствии подозрения Лобачевского подтвердились — были построены модели неевклидовой геометрии, которые показали, что в ней нет противоречия (если его нет в евклидовой геометрии).

Исследования по неевклидовой геометрии многое прояснили в основаниях геометрии и способствовали заполнению логических пробелов у Евклида. Как пишет Рашевский в упомянутом предисловии, «подлинное развитие вопроса об основаниях геометрии пошло не по прямому пути логического уточнения аксиоматики и доказательств Евклида, а осуществилось причудливым образом через длинный ряд попыток исправить Евклида там, где он был совершенно прав. Мы имеем в виду историю V постулата Евклида».

Статус правил алгебры

Вернёмся к алгебре — можно ли изменить правила действий и получить другую теорию? Формально говоря, можно, но при этом применять эту теорию следует с осторожностью. Изменив правила переноса в другую часть в бухгалтерских книгах (там, кстати, действительно бывают две части — приход и расход, дебет и кредит, прибыли и убытки и т. п.), можно вполне конкретно попасть впросак.

Но с точки зрения чистой математики алгебра тоже имеет неопределяемые понятия, аксиомы, принимаемые без обоснования, и теоремы, доказываемые на основе аксиом. Про это в школьном курсе не рассказывается — или, что ещё хуже, рассказывается урывками.

Скажем, в одном из учебников алгебры (Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова, *Алгебра*, Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений, М.: Просвещение, АО Московские учебники, 1997, с. 248) говорится так: «число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число» (с. 148). Но давайте спросим у школьника или учителя математики, что такое положительное число. Скорее всего они ответят, что положительное число — это число, большее нуля. Явный «порочный круг» — когда одно понятие определяется через другое, а это другое — через первое.

На самом деле аккуратное изложение теории действительных чисел могло бы происходить так.

Аксиомы упорядоченного поля

Сначала формулируются аксиомы для неопределяемых понятий сложения и умножения (эти аксиомы называют *аксиомами поля*). Например, среди них есть аксиома *ассоциативности* сложения $a+(b+c) = (a+b)+c$ и аксиома *дистрибутивности* $a(b + c) = ab + ac$. Аксиом поля достаточно, чтобы определить арифметические операции (скажем, $a - b$ определяется как то число x, для которого $b + x = a$; из аксиом следует единственность такого числа) и обосновать правила преобразований в арифметических выражениях.

Далее от равенств можно перейти к неравенствам и добавить новое неопределяемое понятие «быть меньше». Соответственно появляются и новые аксиомы. Скажем, одна из них говорит, что из $a < b$ следует $a + c < b + c$, другие позволяют умножать неравенство на число и т. д. Все эти аксиомы вместе называются *аксиомами упорядоченного поля*, а структуры, им удовлетворяющие, называются *упорядоченными полями*. Упорядоченных полей бывает много (и поле действительных чисел выделяется среди них дальнейшими аксиомами).

Извлечение корней

Аксиом упорядоченного поля достаточно, чтобы решать линейные уравнения и неравенства (а также системы линейных уравнений и неравенств). Для квадратных уравнений их уже мало, и даже сразу понятно, почему. Дело в том, что если мы ограничимся только рациональными числами (отношениями целых), то аксиомы упорядоченного поля будут выполняться. А между тем в рациональных числах квадратное уравнение $x^2 - 2 = 0$ не имеет решения, хотя его дискриминант положителен, так что обычные правила решения квадратных уравнений не действуют.

Поэтому необходимо добавить новую аксиому, которая говорит, что из любого неотрицательного числа a можно извлечь квадратный корень (а также кубический и вообще любой степени). Другими словами, эта аксиома утверждает, что *при* $a \geqslant 0$ *уравнение* $x^n = a$ (*при любом* $n = 2, 3, 4, \ldots$) *имеет неотрицательное решение*. Это решение единственно (что следует из аксиом упорядоченного поля; из них можно вывести, что $x_1^n < x_2^n$ при $0 \leqslant x_1 < x_2$, и потому не может быть двух разных решений). Поэтому можно ввести обозначение $\sqrt[n]{a}$ — *корень* n*-й степени из* a.

Показательная функция рационального аргумента

Далее учебник алгебры определяет показательную функцию a^x для положительных значений a и для рациональных значений x, полагая, скажем,

$$a^{5/3} = \sqrt[3]{a^5}.$$

Чтобы это определение было законно, надо проверить, что результат не меняется, если перейти к равной дроби. Например, надо убедиться, что

$$\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[6]{a^{10}}.$$

Это несложно. Затем надо рассмотреть случай отрицательного показателя, доказать свойства показательной функции и т. д. Всё это скорее занудно, чем трудно.

(В связи с показательной функцией есть нелепая ловушка. Как вы думаете, сколько решений имеет уравнение $x^{2x^2} = 1$? Ответ на этот вопрос зависит от того, считать ли решением число -1. На экзамене оба ответа легко могут объявить неверными. В самом деле, если не считать, то экзаменатор может заявить, что вы не знаете, что $(-1)^2 = 1$, и поставить двойку. А если считать, то экзаменатор может сказать, что вы не знаете, что показательная функция определена только при положительном основании (и даже сошлётся на страницу учебника, где это написано), и тоже поставить двойку. И пойди что-нибудь кому-нибудь докажи!)

14. Алгебра и начала анализа

Аксиома полноты

На этом месте определения показательной функции курс алгебры плавно перетекает в «начала анализа» — действительно, для определения показательной функции при всех действительных значениях аргумента нужны новые аксиомы. А именно, нужно добавить *аксиому полноты*, у которой есть разные варианты формулировки (эквивалентные друг другу).

Одна из формулировок этой аксиомы такова. *Пусть L и R — два непустых множества действительных чисел, причём любое число $l \in L$ не больше любого числа $r \in R$. Тогда найдётся разделяющее число α, для которого $l \leqslant \alpha \leqslant r$ при любых $l \in L$ и $r \in R$.*

Мы уже видели несколько ситуаций, в которых такое утверждение могло бы быть полезно. Например, так было при определении длины отрезка (при подходе Гильберта) и определении длины окружности (как чисcéла, разделяющего периметры вписанных и описанных многоугольников). Та же самая ситуация и с определением показательной функции для произвольного аргумента. Скажем, $2^{\sqrt{2}}$ можно определить как число, разделяющее множество L всех чисел $2^{p/q}$ при целых положительных p и q, для которых $p/q < \sqrt{2}$, и множество R всех чисел вида $2^{r/s}$ при целых $r, s > 0$, для которых $r/s > \sqrt{2}$.

Аксиома полноты и аксиома Архимеда

Ещё можно заметить, что из аксиомы полноты и обычных свойств неравенств (строго говоря, из аксиом упорядоченного поля) можно вывести аксиому Архимеда. А именно, можно доказать, что *если $a, b > 0$, то одно из чисел*

$$a, a+a, a+a+a, a+a+a+a. \dots$$

больше b.

Вот это доказательство (с непривычки оно может показаться трудным). В качестве L рассмотрим множество всех сумм вида a, $a+a$, $a+a+a$ и т. д. Если в L есть число, большее b, то всё доказано. Пусть это не так. Тогда

$$b \geqslant a + a + \ldots + a$$

(для любого конечного числа слагаемых в правой части). Рассмотрим множество R всех чисел с таким свойством (которые больше или равны любых таких сумм). Множество R содержит b, поэтому оба множества непусты, и можно рассмотреть разделяющее число α.

Тогда $a + a + \ldots + a \leqslant \alpha$ (при любом количестве слагаемых), так что α принадлежит множеству R. Более того, можно вычесть по a из обеих частей этого неравенства и заключить, что $a+a+\ldots+a \leqslant \alpha - a$ (это тоже верно при любом количестве слагаемых — надо просто изначально взять одно лишнее). Значит, $\alpha - a$ тоже принадлежит R, что противоречит тому, что $\alpha \leqslant r$ для любого $r \in R$.

Это рассуждение на первый взгляд выглядит переливанием из пустого в порожнее, неожиданно приводящим к цели — но оно на самом деле вполне строгое, хотя и не очень наглядное.

Ещё отметим (но уже без доказательства), что из аксиомы полноты можно вывести существование корней, так что соответствующую аксиому можно опустить (если есть аксиома полноты).

Бесконечные десятичные дроби

Можно было бы пытаться определять действительные числа не аксиоматически, а с помощью бесконечных десятичных дробей. Но это тоже не так просто.

Кстати, как вы думаете, число

$$0{,}99999\ldots$$

(бесконечное число девяток после запятой) меньше единицы или равно единице? Задав этот вопрос школьникам, можно получить разные ответы. Одни говорят, что меньше — ведь там всё-таки немного недостаёт до полной единицы. А сколько недостаёт? Наверное, бесконечно мало, а именно,

$$0{,}00000\ldots1$$

(бесконечное число нулей и потом ещё единица). А можно ли рассмотреть такое «бесконечно малое» число? На каком месте в нём стоит единица? Видимо, на бесконечном — но есть ли такое место? и это какое-то одно место или могут быть в разной степени бесконечно удалённые места? и что идёт за этой единицей?

Можно надеяться, что ситуация прояснится, если изображать числа на прямой. Но и тут не всё ясно. Возьмём, скажем, отрезок $[0, 1]$ и выбросим из него точку 1. Получится промежуток $[0, 1)$. Есть ли в нём наибольшее число? Вроде должно быть — если двигаться справа налево по числовой оси, пока мы не упрёмся в этот промежуток, то должны же мы упереться во что-то конкретное? Может быть, это и есть число 0,99999...? С другой стороны, вроде бы можно рассуждать так: если x — наибольшее число в $[0, 1)$, то число $(1 + x)/2$ (среднее арифметическое чисел 1 и x, середина отрезка от x до 1) по законам алгебры больше x и меньше 1, значит, x не было наибольшим...

Всё это показывает, что наша интуиция чисел (и точек на прямой) довольно смутная. Современные математики путём длительной тренировки убедили себя в том, что им всё ясно — и действительно, они пришли к некоторым единым правилам и соглашениям, которые кажутся им «истинными». (Но «что есть истина?») Если же вспомнить историю, то было много споров — есть ли непосредственно следующая точка? непосредственно следующий момент времени? Про эти споры (парадоксы Зенона и др.) можно прочесть в уже упоминавшейся книжке «Занимательная Греция» замечательного филолога М. Л. Гаспарова (1935–2005). (Он там немного говорит и про древнегреческую математику, при этом — уникальный для популярных книжек случай! — без математических ошибок.)

Современная точка зрения на эти вопросы такова. Прежде всего, никаких бесконечно удалённых мест в бесконечной десятичной дроби и никаких бесконечно малых дробей нет. (Формально говоря, бесконечная десятичная дробь — точнее, её часть после запятой — есть последовательность цифр, то есть отображение множества натуральных чисел $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ в десятиэлементное множество цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.)

Десятичные дроби в множестве действительных чисел

Далее можно действовать двумя способами. Можно считать заранее заданным некоторое упорядоченное поле, где выполняется аксиома полноты. Тогда каждой бесконечной десятичной дроби можно поставить в соответствие (единственный) элемент этого поля. А именно, скажем, дроби

$$0{,}314159265358\ldots$$

ставится в соответствие число, разделяющее *приближения с недостатком*, то есть числа

$$0{,}3 \quad 0{,}31 \quad 0{,}314 \quad 0{,}3141 \quad 0{,}31415 \quad 0{,}314159\ldots,$$

и *приближения с избытком*, то есть числа

$$0{,}4 \quad 0{,}32 \quad 0{,}315 \quad 0{,}3142 \quad 0{,}31416 \quad 0{,}314160\ldots$$

Такое разделяющее число существует по аксиоме полноты, а его единственность можно доказать с помощью аксиомы Архимеда.

Далее уже можно формально спросить, будет ли дробям $0{,}1999999\ldots$ и $0{,}2000000\ldots$ соответствовать одно и то же число или разные. Ответ: можно доказать, что одно и то же (а также что других совпадений — кроме случая дроби с девятками в периоде — нет).

Это один подход, в котором десятичным дробям ставятся в соответствие элементы упорядоченного поля с аксиомой полноты.

Действительные числа как бесконечные десятичные дроби

Другой подход состоит в том, чтобы вообще отказаться от аксиом и *определять* действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Разумеется, надо ещё разрешить конечное число цифр до запятой и знак минус перед всей дробью (иначе получится лишь отрезок $[0, 1]$, а не все действительные числа).

Далее нужно избавиться от неоднозначности, отождествив, в частности, $0{,}199999\ldots$ и $0{,}200000\ldots$, а также $0{,}000\ldots$ и $-0{,}000\ldots$ (или запретив один из двух вариантов записи).

После этого можно уже определить арифметические операции и доказать, что выполняются все аксиомы упорядоченного поля и аксиома полноты. (Так что это будут уже не аксиомы, а теоремы!)

Но определения и доказательства эти совсем не так просты. Например, для начала надо определить сложение дробей, в которых после запятой одни нули, то есть по существу сложение натуральных чисел. Для нас, правда, это не числа, а последовательности цифр, так что алгоритм сложения в столбик становится *определением* суммы. И надо, среди прочего, строго доказать, скажем, ассоциативность. (Что совсем не так легко сделать, если рассматривать сумму как результат формальных операций над бессмысленными символами.) Дальше хуже — умножение ещё сложнее сложения, для бесконечных дробей появляются свои трудности, так как алгоритмы сложения и умножения в столбик начинают с правого конца числа, которого теперь нет, и т. п.

В общем, если начать изучение математического анализа со строгого построения теории действительных чисел на основе бесконечных десятичных дробей (и добросовестно следить за строгостью), то скорее всего мы завязнем посередине или даже ближе к началу...

Немного истории

Вообще со «строгостью» в математическом анализе дела обстояли довольно сложно. На заре математического анализа производную часто «определяли» как отношение бесконечно малого приращения функции к бесконечно малому приращению её аргумента, а интеграл — как сумму бесконечно числа бесконечно малых слагаемых. В течение нескольких веков одни математики доказывали замечательные теоремы с помощью определённых таким образом производной и интеграла, а другие (возможно, менее замечательные, но более педантичные) их справедливо критиковали за явную логическую путаницу, когда некоторые величины сначала считаются не равными нулю, а потом всё-таки приравниваются к нулю. (Это даже использовалось как аргумент в философских спорах. Теолог Дж. Беркли сочинил памфлет *Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику, где исследуется, являются ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчётливо познаваемыми и с очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры.* См. его *Сочинения.* М.: Мысль, 2000.)

Всё это «устаканилось» лишь недавно (по историческим меркам): определение предела было дано Коши лишь в первой половине XIX века, строгая теория действительных чисел была создана (Дедекиндом, Вейерштрассом, Кантором — в несколько отличающихся вариантах) в конце XIX века, а общее формально-аксиоматическое построение математики уже относится к началу XX века. Его с разных точек зрения много критиковали, но по крайней мере некоторая ясность в то, какие рассуждения в математике принято разрешать, а какие нет, была внесена.

Возвращаясь от истории к школьному курсу алгебры и начал анализа, заметим в заключение, что после некоторых попыток ввести туда хотя бы элементы строгого изложения (скажем, определение предела) всё это было заброшено, и там остались лишь общие разговоры о том, что это как-то можно обосновать, да простейшие правила дифференцирования и интегрирования, пригодные для механического исполнения.

Но вообще-то после построения теории вещественных чисел можно строго определить показательную функцию. Затем можно доказать, что она принимает все положительные значения, и определить логарифмы.

Далее можно строго (и независимо от курса геометрии) определять синус и косинус, но таких попыток в школьном курсе, кажется, не было (и действительно, это имеет смысл делать в ходе изучения математического анализа, с помощью бесконечных рядов).

15. От автора

Не знаю, поверят ли мне читатели, не заставшие советской власти, но был такой странный жанр: *призывы*. Перед праздниками (первое мая, седьмое ноября, не помню, было ли это перед другими праздниками, скажем, восьмым марта) официально утверждался и публиковался в газетах текст под названием «Призывы ЦК КПСС к советским трудящимся».[9] Любопытные могут найти точные тексты в архивах, но примерно они выглядели так:

- Труженики села! Боритесь за повышение производительности труда в сельском хозяйстве и за выполнение Продовольственной программы СССР!
- Деятели культуры! Всемерно укрепляйте многонациональную советскую культуру — национальную по форме и социалистическую по содержанию!

И так далее — помню, что таких призывов бывало довольно много, чуть ли не несколько десятков, но столько мне по памяти не сочинить.

В подражание — несколько призывов к разным категориям изучающих и преподающих математику.

Уважаемые авторы учебников!

В своём желании быть точными и строгими соблюдайте меру! Не забывайте, что помимо строгих определений у вещей есть наглядный смысл, а помимо изучения определений и теорем есть решение содержательных задач!

[9] А может, «к советскому народу», это было более или менее одно и то же. Нетрудящиеся именовались тунеядцами, и слово *тунеядец* не было неодобрительным ворчанием, а имело юридический смысл. Оно было в уголовном кодексе и за это (отсутствие источников дохода, признанных допустимыми советской властью) могли судить. Именно так был судим и сослан поэт Иосиф Бродский, и обличительная газетная статья называлась «Тунеядцу воздаётся должное». Впоследствии, когда Бродскому (уже эмигранту) присудили нобелевскую премию по литературе, был сделан эффектный плакат-коллаж: эта статья помещена рядом с фотографией, где король Швеции вручает Бродскому почётные знаки нобелевского лауреата. При этом заголовок статьи стал как бы подписью к фотографии.

Уважаемые учителя!

Будьте реалистами! Не пытайтесь научить строгим рассуждениям «как следует» и «с самого начала»! Не забывайте, что решение понятных задач, пусть с неосознанными пробелами, важнее заучивания непонятных определений и доказательств!

Уважаемые экзаменаторы!

Не судите строго школьников, путающихся в тонкостях определений, но понимающих наглядный смысл понятий и умеющих решать задачи. Пусть тот из вас, кто способен полностью строго изложить математику в объёме школьного курса, первый поставит двойку запутавшемуся в определениях школьнику!

Или уж, если вы решили «прикопаться» к определениям (не дай Бог!), то хотя бы изучите все имеющиеся пособия для школьников и учтите, что школьник может воспринимать данные в них определения (пусть и противоречащие друг другу) как истину в последней инстанции! (Впрочем, этих пособий столько и в них такой разнобой, что этот призыв сводится к предыдущему.)

Уважаемые школьники!

Если вы не возьмёте в толк, в чём тут проблема и почему простых ответов на простые вопросы недостаточно, не волнуйтесь! Спокойно решайте задачи! (Если вы будете продолжать заниматься математикой, постепенно всё станет ясно.) Если вам кажется, что вы поняли, в чём тут проблема, и видите пробелы в рассуждениях старших товарищей, не зазнавайтесь! Будьте снисходительны и терпимы к своим (пусть и недопросветлённым) коллегам!

16. Прибавление: Архимед и байки о нём

Помимо трудов Архимеда, сохранились и рассказы других античных авторов о нём. Надо иметь в виду, что эти рассказы — скорее байки, чем свидетельские показания, и оценка степени их правдоподобия — одна из сложных задач исторической науки. (Зато математические труды Архимеда — вещь бесспорная, выдумать такое никто не мог — просто бы не хватило квалификации!)

Вот что пишет историк Плутарх в жизнеописании полководца Марцелла, который осаждал Сиракузы (город, где жил Архимед и граждане которого были возмущены ложными, по описанию Плутарха, вестями):

> ⟨...⟩ Тогда Марцелл со всем своим войском двинулся к Сиракузам, разбил лагерь неподалёку и отправил послов, чтобы те рассказали гражданам правду о событиях в Леонтинах. Но это оказалось бесполезным — сиракузяне, среди которых наибольшим влиянием пользовались сторонники Гиппократа, им не верили, и Марцелл приступил к осаде одновременно и с суши и с моря: сухопутное войско повел Аппий, под командою же Марцелла были шестьдесят пентер, нагруженных всевозможным оружием и метательными снарядами. На огромный поплавок из восьми связанных друг с другом судов он поставил осадную машину и стал подходить к стене, твердо полагаясь на количество и превосходство своего снаряжения, равно как и на славу собственного имени. Но всё это было совершенно бессильно перед Архимедом и его машинами.
>
> Сам Архимед считал сооружение машин занятием, не заслуживающим ни трудов, ни внимания; большинство их появилось на свет как бы попутно, в виде забав геометрии, и то лишь потому, что царь Гиерон из честолюбия убедил Архимеда хоть ненадолго отвлечь своё искусство от умозрений и, обратив его на вещи осязаемые, в какой-то мере воплотить свою мысль, соединить её с повседневными нуждами и таким образом сделать более ясной и зримой для большинства людей. Знаменитому и многими любимому искусству построения механических орудий положили начало Евдокс [тот самый, которого упоминает Архимед в связи с объёмом конуса — А. Ш.] и Архит, стремившиеся сделать геометрию более красивой и привлекательной, а также с помощью чувственных, осязаемых примеров разрешить те вопросы, доказательство которых посредством одних лишь рассуждений и чертежей затруднительно; такова проблема двух средних пропорциональных [в современных терминах: требуется для данных отрезков a и b найти такие отрезки x и y, что $a : x = x : y = y : b$; это сводится к отысканию кубического корня и не может быть сделано циркулем и линейкой, как того

требовала греческая традиция задач на построение. — А. Ш.], необходимая составная часть многих задач, для разрешения которой оба применили механическое приспособление, строя искомые линии на основе дуг и сегментов. Но так как Платон негодовал, упрекая их в том, что они губят достоинство геометрии, которая от бестелесного и умопостигаемого опускается до чувственного и вновь сопрягается с телами, требующими для своего изготовления длительного и тяжёлого труда ремесленника, механика полностью отделилась от геометрии и, сделавшись одною из военных наук, долгое время вовсе не привлекала внимания философии.

Между тем Архимед как-то раз написал царю Гиерону, с которым был в дружбе и родстве, что данною силою можно сдвинуть любой данный груз; как сообщают, увлечённый убедительностью собственных доказательств, он добавил сгоряча, что будь в его распоряжении другая земля, на которую можно было бы встать, он сдвинул бы с места нашу. Гиерон изумился и попросил претворить эту мысль в действие и показать какую-либо тяжесть, перемещаемую малым усилием, и тогда Архимед велел наполнить обычной кладью царское трёхмачтовое грузовое судно, недавно с огромным трудом вытащенное на берег целою толпою людей, посадил на него большую команду матросов, а сам сел поодаль и, без всякого напряжения вытягивая конец каната, пропущенного через составной блок, придвинул к себе корабль так медленно и ровно, точно тот плыл по морю. Царь был поражён и, осознав все могущество этого искусства, убедил Архимеда построить ему несколько машин для защиты и для нападения, которые могли бы пригодиться во всякой осаде; самому Гиерону, проведшему большую часть жизни в мире и празднествах, не пришлось воспользоваться ими, но теперь и машины и их изобретатель сослужили сиракузянам верную службу.

Итак римляне напали с двух сторон, и сиракузяне растерялись и притихли от страха, полагая, что им нечем сдержать столь грозную силу. Но тут Архимед пустил в ход свои машины, и в неприятеля, наступающего с суши, понеслись всевозможных размеров стрелы и огромные каменные глыбы, летевшие с невероятным шумом и чудовищной скоростью, они сокрушали всё и всех на своем пути и приводили в расстройство боевые ряды, а на вражеские суда вдруг стали опускаться укреплённые на стенах брусья и либо топили их силою толчка, либо, схватив железными руками или клювами вроде журавлиных, вытаскивали носом вверх из воды, а потом, кормою вперёд, пускали ко дну, либо, наконец, приведённые в круговое движение скрытыми внутри оттяжными канатами, увлекали за собою корабль и, раскрутив его, швыряли на скалы и утёсы у подножия стены, а моряки погибали мучительной смертью. Нередко взору открывалось ужасное зрелище: поднятый высоко над морем корабль раскачивался в разные стороны до тех пор, пока все до последнего человека не оказывались сброшенными за борт или разнесёнными в клочья, а опустевшее судно разбивалось о стену или снова падало на воду, когда железные челюсти разжимались.

Машина, которую Марцелл поставил на поплавок из восьми судов, называлась самбука, потому что очертаниями несколько напоминала этот музыкальный инструмент; не успела она приблизиться к стене, как в неё полетел камень весом в десять талантов, затем — другой и третий. С огромной силой и оглушительным лязгом они обрушились на машину, разбили её основание, расшатали скрепы⟨. . .⟩

Марцелл, не видя иного выхода, и сам поспешно отплыл, и сухопутным войскам приказал отступить. На совете было решено ночью, если удастся, подойти вплотную к стене: сила натяжения канатов, которыми пользуется Архимед, рассуждали римляне, такова, что придает стрелам большую дальность полёта, и, стало быть, некоторое пространство вблизи полностью защищено от ударов. Но Архимед, по-видимому, заранее всё предусмотрев, приготовил машины, разящие на любое расстояние, и короткие стрелы; подле небольших, но часто пробитых отверстий в стенах были расставлены невидимые врагу скорпионы с малым натяжением, бьющие совсем близко.

И вот, когда римляне подошли к стене, как они полагали, совершенно незаметно, их снова встретил град стрел, на головы им почти отвесно посыпались камни, а сверху отовсюду полетели дротики; и они отступили. Когда же они оказались в некотором отдалении, сиракузяне опять засыпали их стрелами, поражая бегущих; многие погибли, многие корабли столкнулись, меж тем как отплатить врагу римляне были не в силах: ведь бóльшая часть Архимедовых машин была скрыта за стенами, и римлянам казалось, что они борются с богами — столько бед обрушивалось на них неведомо откуда.

Впрочем, Марцелл вышел из дела невредим и, посмеиваясь над своими мастерами и механиками, сказал: «Не довольно ли нам воевать с этим Бриареем от геометрии, который вычёрпывает из моря наши суда, а потом с позором швыряет их прочь, и превзошёл сказочных сторуких великанов — столько снарядов он в нас мечет! И в самом деле, прочие сиракузяне были как бы телом Архимедовых устройств, душою же, приводящею всё в движение, был он один: лишь его машины обороняли город и отражали натиск неприятеля, тогда как всё остальное оружие лежало без движения. В конце концов, видя, что римляне запуганы до крайности и что, едва заметив на стене веревку или кусок дерева, они поднимают отчаянный крик и пускаются наутёк в полной уверенности, будто Архимед наводит на них какую-то машину, Марцелл отказался от дальнейших стычек и приступов, решив положиться на время.

Архимед был человеком такого возвышенного образа мыслей, такой глубины души и богатства познаний, что о вещах, доставивших ему славу ума не смертного, а божественного [то есть военных и иных механизмах — А. Ш.], не пожелал написать ничего, но, считая сооружение машин и вообще всякое искусство, сопричастное повседневным нуждам, низменным и грубым, всё свое рвение обратил на такие занятия, в которых красота и совершенство пребывают не смешанными с потребностями жизни, — занятия, не сравнимые ни с какими другими, представляющие собою своего рода состязание между материей и доказательством, и в этом состязании первая являет величие и красоту, а второе — точность и невиданную силу: во всей геометрии не найти более трудных и сложных задач, объяснённых посредством более простых и прозрачных основных положений. Некоторые приписывают это природному дарованию Архимеда, другие же считают, что лишь благодаря огромному труду всё до малейших частностей у него кажется возникшим легко и без всякого труда. Собственными силами вряд ли кто найдёт предлагаемое Архимедом доказательство, но стоит углубиться в него — и появляется уверенность, что ты и сам мог бы его открыть: таким лёгким и быстрым путем ведёт к цели Архимед. И нельзя не верить рассказам, будто он был тайно очарован некоей сиреной, не покидавшей его ни на миг, а потому забывал о пище и об уходе за телом, и его нередко силой приходилось тащить мыться и умащаться, но и в бане он продолжал чертить геометрические фигуры на золе очага и даже на собственном теле, натертом маслом, проводил пальцем какие-то линии — поистине вдохновлённый Музами, весь во власти великого наслаждения. Он совершил множество замечательных открытий, но просил друзей и родственников поставить на его могиле лишь цилиндр с шаром внутри и надписать расчет соотношения их объёмов.

Таков был Архимед; сам неодолимый, он, в той мере, в какой это зависело от него, сделал таким же и свой город.

Случилось однажды, что в плен к римлянам попал спартанец Дамипп, плывший из Сиракуз; сиракузяне хотели его выкупить, и в ходе переговоров, потребовавших частых встреч, Марцелл обратил внимание на одну башню, охранявшуюся недостаточно бдительно и способную незаметно укрыть несколько человек, так как подле неё нетрудно было взобраться на стену. Поскольку переговоры велись невдалеке от башни, удалось достаточно точно определить её высоту, и вот, приготовив лестницу и дождавшись дня, в который сиракузяне, справляя праздник Дианы, предавались пьянству и развлечениям, Марцелл незаметно для неприятеля не только овладел башней, но ещё до рассвета заполнил своими воинами всю стену по обе стороны от неё и пробился сквозь Гексапилы. Когда же сиракузяне наконец заметили врага и среди них поднялась тревога, он приказал повсюду трубить в трубы и этим обратил противника в беспорядочное бегство: осаждённые в ужасе решили, что весь город уже в руках римлян. Но они ещё владели самым красивым, обширным и лучше других укрепленным кварталом — Ахрадиной, потому что этот квартал был обнесён особою стеной, примыкавшей к стенам внешней части города (одна часть его называлась Неаполь, другая — Тихэ).

С рассветом Марцелл, сопровождаемый поздравлениями своих военных трибунов, через Гексапилы спустился в город. Говорят, что, глядя сверху на Сиракузы и видя их красоту и величие, он долго плакал, сострадая грядущей их судьбе: он думал о том, как неузнаваемо неприятельский грабёж изменит вскоре их облик. Ведь не было ни одного начальника, который бы осмелился возразить солдатам, требовавшим отдать им город на разграбление, а многие и сами приказывали жечь и разрушать все подряд. Но такие речи Марцелл решительно пресёк и лишь с великою неохотой дал разрешение своим людям поживиться имуществом и рабами сиракузян, свободных же не велел трогать и пальцем — ни убивать их, ни бесчестить, ни обращать в рабство. И всё же, обнаружив, казалось бы, такую умеренность, он считал судьбу города жалкой и плачевной и даже в этот миг великой радости не смог скрыть своей скорби и сострадания, предвидя, что в скором времени весь этот блеск и процветание исчезнут без следа. Говорят, что в Сиракузах добычи набралось не меньше, чем впоследствии после разрушения Карфагена, ибо солдаты настояли на том, чтобы и оставшаяся часть города, которая вскоре пала по вине изменников, была разграблена, и лишь богатства царской сокровищницы поступили в казну.

Но более всего огорчила Марцелла гибель Архимеда. В тот час Архимед внимательно разглядывал какой-то чертёж и, душою и взором погруженный в созерцание, не заметил ни вторжения римлян, ни захвата города: когда вдруг перед ним вырос какой-то воин и объявил ему, что его зовёт Марцелл, Архимед отказался следовать за ним до тех пор, пока не доведёт до конца задачу и не отыщет доказательства. Воин рассердился и, выхватив меч, убил его. Другие рассказывают, что на него сразу бросился римлянин с мечом, Архимед же, видя, что тот хочет лишить его жизни, молил немного подождать, чтобы не пришлось бросить поставленный вопрос неразрешённым и неисследованным; но римлянин убил его, не обратив ни малейшего внимания на эти просьбы. Есть ещё третий рассказ о смерти Архимеда: будто он нёс к Марцеллу свои математические приборы — солнечные часы, шары, угольники, с помощью которых измерял величину солнца, а встретившиеся ему солдаты решили, что в ларце у него золото, и умертвили его. Как бы это ни произошло на самом деле, все согласны в том, что Марцелл был очень опечален, от убийцы с омерзением отвернулся как от преступника, а родственников Архимеда разыскал и окружил почётом.

(Плутарх. *Сравнительные жизнеописания* в двух томах, М.: Наука, 1994. Издание 2-е, исправленное и дополненное. Том I. Перевод С. П. Маркиша, обработка перевода С. С. Аверинцева, примечания М.Л. Гаспарова. Издание подготовили С. С. Аверинцев, М. Л. Гаспаров, С. П. Маркиш.)

В этом рассказе поучительно многое. И то уважение и понимание, с которым Плутарх говорит о математике (хотя всё же включает рассказ об Архимеде в жизнеописание Марцелла, а не наоборот, как было бы естественно) — мало кто из современных «гуманитариев» мог бы написать такое. И царь Гиерон, который не был дураком и не стал призывать Архимеда в армию и презрительно обзывать «кифаредом».[10] И «человеческий фактор» — когда в дело вступают «пьянство и развлечения», математические машины не помогают. И нравы армии по части убийств, грабежей и разбоев, мало изменившиеся за два тысячелетия.

В предисловии к изданию трудов Архимеда Веселовский приводит и два более ранних рассказа о том же событии (Полибия и Тита Ливия), видимо, более точных, но менее красочных.

Ещё одна знаменитая байка про Архимеда восходит к рассказу Витрувия (*Десять книг об архитектуре*. Перевод с лат. Ф. А. Петровского, М.: Издательство академии архитектуры, с. 171 – 172, вступление к Книге девятой):

9. Что же до Архимеда, то из всех его многочисленных и замечательных открытий приводимое мною является, несомненно, доказательством прямо-таки безграничной его изобретательности. А именно, когда Гиерон, достигший царской власти в Сиракузах, после удачного завершения своих предприятий, решил по обету бессмертным богам поместить в одном из храмов золотой венец, он заказал сделать его за определённую плату и отвесил нужное количество золота подрядчику. В назначенный по договору срок тот поставил царю тонко исполненную работу, в точности, видимо, соответствовавшую весу отпущенного на неё золота.

10. После же того как сделан был донос, что часть золота была утаена и при изготовлении венца в него было примешано такое же количество серебра, Гиерон, негодуя на нанесённое ему оскорбление и не находя способа доказать эту покражу, обратился к Архимеду с просьбой взять на себя разрешение этого вопроса. Случилось так, что в то время как Архимед над этим думал, он пошёл в баню и, садясь в ванну, заметил, что чем глубже он погружается в неё своим телом, тем больше через край вытекает воды. И как только это указало ему способ разрешения его вопроса, он, не медля,

[10] Кифара — древний музыкальный инструмент, немного похожий на нашу балалайку.

вне себя от радости, выскочил из ванны и голый бросился к себе домой, громко крича, что нашёл то, что искал; ибо на бегу он то и дело восклицал по-гречески: «эврика, эврика».

11. Тогда, исходя из этого открытия, он, говорят, сделал два слитка одинакового веса с венцом — один из золота, другой из серебра. Сделав это, он взял объёмистый сосуд, наполнил его до самых краёв водой и опустил в него серебряный слиток, при погружении которого вода вытекла в количестве, равном величине слитка. Вынув затем слиток, он долил воды, отмерив её секстарием, так, чтобы она опять сравнялась с краями, как и раньше. Так он определил, что серебро по весу соответствует известному количеству воды.

12. Проделав этот опыт, он подобным же образом опустил в наполненный сосуд золотой слиток им, вынув его, нашёл посредством прежнего измерения, что воды убавилось не столько же, а меньше, насколько меньше был объём золотого слитка сравнительно с равным ему по весу серебряным. После же этого, вновь наполнив сосуд и опустив в то же количество воды самый венец, он нашёл, что воды вытекло больше, чем при погружении золотого слитка такого же веса; и, таким образом, исходя из того, что венец вытеснил больше воды, чем слиток, он показал примесь в золоте серебра и обнаружил покражу подрядчика.

Другой перевод имеется в комментариях Веселовского к изданию трудов Архимеда на с. 579; странным образом вместо истории с доносом там говорится, что «при испытании на пробирном камне оказалось, что мастер часть золота заменил серебром». По поводу этой истории можно заметить ещё две вещи:

- никакого отношения к закону Архимеда (по крайней мере если дело обстояло именно так, как пишет Витрувий, и Архимед не взвешивал погружённый в воду венец) она не имеет, речь идёт просто об определении объёма по количеству вытесненной воды;
- судя по этому тексту, Витрувий не был большúм знатоком работ Архимеда, иначе бы он не выбрал бы из всех его достижений (достаточно простую) идею измерения объёма тела погружением в воду.

Другие байки про Архимеда, в частности история о том, как он сжёг римский флот с помощью зеркал, отражавших солнечный свет, ещё менее достоверны — вроде бы они появляются лишь в рассказах авторов, живших через много веков после Архимеда (в частности, не упоминаются у Полибия, Ливия и Плутарха). Рассказывают также о насосе для воды («архимедов винт»), об «архимедовом рычаге», с помощью которого Архимед якобы обещал поднять (перевернуть, сдвинуть) Землю, если ему дать точку опоры (см. цитату из Плутарха), но какие реальные механизмы положили начало этим рассказам, судить трудно — да и описания военных механизмов в тексте Плутарха вряд ли можно считать достоверными.

Есть одна совсем загадочная история, связанная с Архимедом — это его «задача о быках», изложенная в виде стихотворения. В переводе Веселовского это стихотворение звучит так:

ЗАДАЧА,
которую Архимед нашёл в эпиграммах и послал на разрешение
занимающимся подобными вопросами александрийским учёным
в послании к Эратосфену Киренскому

Сколько у Солнца быков, найди для меня, чужестранец
  (Ты их, подумав, считай, мудрости если не чужд),
Как на полях Тринакрийской Сицилии острова тучных
  Их в четырёх стадах много когда-то паслось.
Цветом стада различались: блистало одно млечно-белым,
  Тёмной морской волны стада другого был цвет.
Рыжим третие было, последнее пёстрым. И в каждом
  Стаде была самцов множеством тяжкая мощь,
Всё же храня соразмерность такую: представь, чужестранец,
  Белых число быков в точности было равно
Тёмных быков половине и трети и полностью рыжим;
  Тёмных быков четверти было равно
Пёстрых с прибавленной пятой и также полностью рыжим;
  Пёстрой же шерсти быков так созерцай число:
Части шестой и седьмой от стада быков серебристых
  Также и рыжим всем ты их число поравняй.
В тех же стадах коров было столько: число белошёрстых
  В точности было равно тёмного стада всего
Части четвёртой и третьей, коль сложишь ты обе их вместе;
  Тёмных число же коров части четвёртой опять
Пёстрого стада равнялось, коль пятую долю добавишь
  И туда же быков в общее стадо причтёшь.
Те же, чья пёстрая шерсть, равночисленным множеством были
  Рыжего стада частям пятой и с нею шестой.
Рыжих коров же считалось количество равным полтрети
  Белого стада всего с частию взятой седьмой.
Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,
  Нам раздельно назвав тучных быков число,
Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было,
  Не назовёт никто в числах невеждой тебя,
Всё ж к мудрецам причислен не будешь. Учти же, пожалуй,

Свойства такое ещё Солнца быков числа.
Если быков сереброшёрстых ты с тёмными вместе смешаешь
Так, чтобы тесно они стали бы в ширь и в длину
Мерою равной, тогда на обширных полях Сицилийских
Плотным квадратом они площадь большую займут.
Если же рыжих и пёстрых в одно смешаешь ты стадо,
Лесенкой станут они, счёт с единицы начав,
Так что фигуру они треугольную нам образуют;
Цвета иного быков нет нам нужды добавлять.
Если ты это найдёшь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты всё до конца превзошёл.

Этот текст, как рассказывают И. Н. Веселовский и современный математик Ilan Vardi (American Mathematical Monthly, том 105, апрель 1998, с. 305 – 319) опубликовал в 1773 году немецкий драматург и критик Лессинг вместе с другим (также старинным) текстом, содержащим неправильное решение. Русский перевод Веселовского не слишком ясен, поэтому приведём также и уравнения, данные им в комментариях (прописные и строчные буквы соответствует быкам и коровам):

$$
\begin{aligned}
X &= (1/2 + 1/3)\,Y + Z \\
Y &= (1/4 + 1/5)\,T + Z \\
T &= (1/6 + 1/7)X + Z \\
x &= (1/4 + 1/3)(Y + y) \\
y &= (1/4 + 1/5)(Z + z) \\
z &= (1/6 + 1/7)(X + x)
\end{aligned}
$$

К этим уравнениям, пишет Веселовский, прибавляются ещё такие условия: $X + Y$ равно квадратному числу (есть точный квадрат), а $Z + T$ равно треугольному числу (сумме вида $1 + 2 + 3 + \ldots + N$).

Уравнения сами по себе не так сложны — они дают линейную связь между неизвестными, и решения в целых числах будут кратны минимальному решению

$$(10366482, 7460514, 4149387, 7358060, 7206360, 4893246, 5439213, 3515820),$$

которое приводится — и совпадает — у Веселовского и Варди. Решение, приводимое в опубликованном Лессингом дополнении, получается из этого набора умножением на 80. Так что авторов этого решения, согласно Архимеду, никто не назовёт невеждами в числах. Но и к мудрецам они причислены не будут: решение не удовлетворяет оставшимся условиям.

Дальше начинается совершенно загадочная история: учёт двух последних условий приводит к уравнению

$$k^2 - 4729494 l^2 = 1.$$

Уравнение такого вида ($k^2 - dl^2 = 1$ для целых d) называют *уравнением Пелля* (с лёгкой руки Эйлера, который перепутал Пелля с другим английским математиком XVII века, которого звали William Brouncker и который действительно занимался этим уравнением). Никаких следов того, что Архимед или его древнегреческие коллеги умели решать это уравнение (помимо задачи о быках) нет. Более того, даже и зная метод решения таких уравнений (он был найден Брункером, но за шесть веков до этого тот же метод знали индийские математики), найти решение этого конкретного уравнения нереально — как вычислили в XIX веке, число быков записывается 206545 цифрами. При таком количестве цифр, естественно, полный ответ мог быть получен лишь с помощью компьютера (в 1965 году). А доказательство, что решение у таких уравнений всегда есть, было получено Лагранжем и опубликовано в том же самом году (1773), что и заметка Лессинга!

Как это всё понимать, остаётся загадочным. Трудно представить себе, что Архимед (или кто-то другой) составил задачу наугад, не пытаясь её решить, тем более что описание трудности двух частей задачи вполне адекватно. (И уж совсем странно, чтобы это было розыгрышем со стороны Лессинга; даже если он смог вычислить частично правильный ответ — зачем его публиковать?!) Также маловероятно, чтобы Архимед знал какой-то неизвестный ныне метод решения уравнения, к которому сводится задача, а все известные методы приводят к слишком сложным вычислениям. Может быть, он был уверен в существовании ответа, хотя не умел его вычислять — за пару тысячелетий до доказательства Лагранжа? Ещё предполагали, что слова о квадрате, образованном быками, не нужно понимать буквально — дескать, ширина быка меньше его длины, и потому быки образуют квадрат, но число быков по двум сторонам квадрата разное. Хотя это и упрощает задачу, но делает первое её условие нелепым: число быков должно разлагаться в произведение двух множителей, относящихся примерно как длина быка к ширине, так что и в это поверить трудно.

Оглавление