Комплексные числа. – 1

§ 1. Немного мистики.

Как известно, не существует такого действительного числа i, что $i^2 = -1$. Однако забудем на минуту об этом и постараемся сложить и умножить друг на друга числа $2+3i$ и $7+2i$:
$(2+3i)+(7+2i) = (2+7)+(3+2)i = 9+5i$; $(2+3i)(7+2i) = 14+21i+4i+6i^2 = 8+25i$

1. Сложить и перемножить $(2+3i)$ и $(7-i)$.
2. Найти $(-i)^2$
3. Найти $(-i)^{10}$
4. Найти $(1+i)^{100}$
5. Доказать тождество $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$
6. Найти $1/1+i$ /т.е. такое $x=u+vi$, что $x\cdot(1+i)=1$/
7. Найти $\sqrt{i}$ /такое $x=u+vi$, что $x^2=i$ /

§ 2. Точные определения. Сумма.

Комплексным числом называется пара $\langle u,v\rangle$, где u, v – действительные числа. Два комплексных числа $\langle u,v\rangle$ и $\langle u',v'\rangle$ называются равными, если $u=u'$ и $v=v'$. Иногда вместо $\langle u,v\rangle$ пишут $u+vi$, не придавая /пока/ знакам $+$ и i никакого смысла. Каждому комплексному числу $\langle u,v\rangle$ однозначно соответствует точка на плоскости, имеющая u и v своими координатами. Множество комплексных чисел обозначим $\mathbb{C}$.

1. Нарисовать $2+3i$, $7-i$, $1+i$.

Суммой двух комплексных чисел $\langle u_1, u_2\rangle$ и $\langle v_1, v_2\rangle$ называется число $\langle u_1+u_2,\ v_1+v_2\rangle$: $\langle u_1,u_2\rangle+\langle v_1,v_2\rangle=\langle u_1+v_1, u_2+v_2\rangle$ или $(u_1+u_2 i)+(v_1+v_2 i)=(u_1+u_2)+i(v_1+v_2)$

2. Доказать, что точки, соответствующие комплексным числам 0, z_1, z_2, z_1+z_2, образуют параллелограмм.

Число $z=\langle z_1, z_2\rangle$ называется разностью чисел $u=(u_1,u_2)$ и $v=(v_1,v_2)$ если $z+v=u$. В этом случае пишут $z=u-v$

3. Докажите, что разностью чисел $\langle u_1,u_2\rangle$ и $\langle v_1,v_2\rangle$ является число $\langle u_1-v_1,\ u_2-v_2\rangle$

Модулем комплексного числа $u=\langle u_1,u_2\rangle$ называется действительное неотрицательное число $|u|=\sqrt{(u_1)^2+(u_2)^2}$

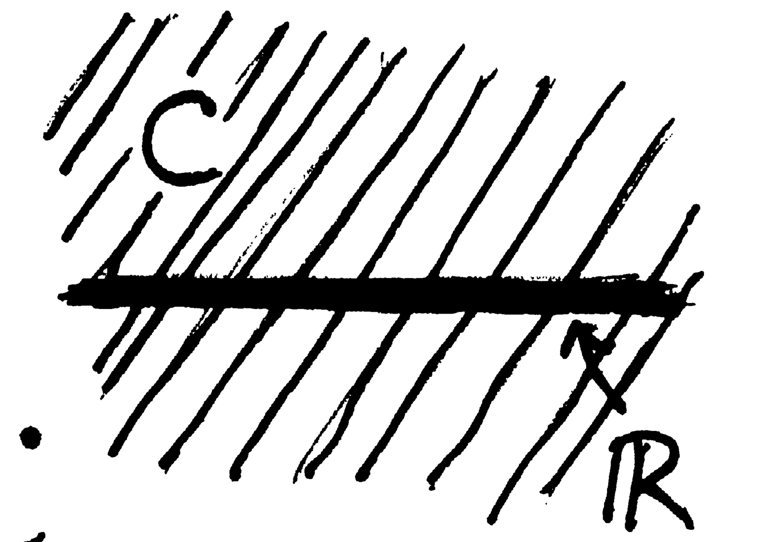
4. Нарисуйте на плоскости множество $\{z\in\mathbb{C} \mid 1\le|z|<2\}$
5. Нарисуйте множество $\{z\in\mathbb{C} \mid |z+(1+i)|\le 1\}$ /$1+i$ есть пара $\langle 1,1\rangle$ /
6. Докажите неравенство $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ для произвольных комплексных z_1 и z_2. / Для вещественных z_1 и z_2 мы его проходили/
7. Когда неравенство задачи 6 превращается в равенство?
8. Верны ли обычные законы сложения $u+v=v+u$ и $u+(v+w)=(u+v)+w$ для комплексных чисел?

§ 3. Умножение комплексных чисел.

Произведением чисел $\langle u,v\rangle$ и $\langle p,q\rangle$ называется число $\langle up-vq,\ uq+vp\rangle$: $\langle u,v\rangle\cdot\langle p,q\rangle=\langle up-vq, uq+vp\rangle$; $(u+iv)(p+iq)=(up-vq)+(uq+vp)i$

1. Умножить числа $\langle 2,3\rangle$ и $\langle 7,-1\rangle$.
2. Найти $\langle 0,1\rangle^2$ /то есть $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ /
3. Найти $\langle 1,-1\rangle^{100}$ /то есть $\langle 1,-1\rangle\times\langle 1,-1\rangle\times\ldots$ 100 раз /
4. Верны ли обычные свойства умножения $uv=vu$ и $u(vw)=(uv)w$ для комплексных чисел? Верен ли закон $u(v+w)=uv+uw$?
5. Найти сумму и произведение чисел $\langle a,0\rangle$ и $\langle b,0\rangle$
6. Доказать, что $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
7. Если $z=\langle a,b\rangle$, то через $\bar{z}$ обозначим число $\langle a,-b\rangle$. Доказать, что вторая компонента чисел $z+\bar{z}$, $z\cdot\bar{z}$ равна 0.
8. Докажите, что $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.
9. Найти $(1+i)^{100}\cdot\overline{(1+i)^{100}}$

Комплексные числа - 2



§ 4. Смысл обозначения $a+bi$. Деление.

Через i обозначается комплексное число $\langle 0,1\rangle$.

1. Найдите i^2.

Числа вида $\langle a,0\rangle$ /с нулевой второй компонентой/ будем иногда называть действительными и не различать числа a ($\in \mathbb{R}$) и $\langle a,0\rangle$ ($\in \mathbb{C}$). Из контекста будет ясно, что мы имеем в виду. (Поскольку $\langle a,0\rangle+\langle b,0\rangle=\langle a+b,0\rangle$ и $\langle a,0\rangle\cdot\langle b,0\rangle=\langle ab,0\rangle$, то $2+2=4$ и $2\times 2=4$ независимо от того, как понимать эти числа - как вещественные или как комплексные, то есть иметь в виду $2+2=4$, $2\times 2=4$ или $\langle 2,0\rangle+\langle 2,0\rangle=\langle 4,0\rangle$, $\langle 2,0\rangle\times\langle 2,0\rangle=\langle 4,0\rangle$)

2. Докажите, что $\langle a,b\rangle=\langle a,0\rangle+\langle b,0\rangle\cdot\langle 0,1\rangle$. В соответствии с введенными обозначениями это можно записать как $\langle a,b\rangle=a+bi$

3. Докажите, что если $xy=0$, то $x=0$ или $y=0$.

4. Говорят, что z равно <u>частному</u> от деления x на y /$x,y,z\in\mathbb{C}$/, если $y\neq 0$ и $x=zy$. Докажите, что двух различных частных быть не может: если $x=zy$ и $x=z'y$, то $z=z'$. Заметим, что вопрос о существовании частного пока не решен!

5. Докажите, что 1 ($=\langle 1,0\rangle$) можно разделить на любое ненулевое число: если $x\neq 0$, то существует $y\in\mathbb{C}$, такое, что $xy=1$

6. Найдите $1/i$, $1/-2i$, $1/1+i$, $1/4-7i$.

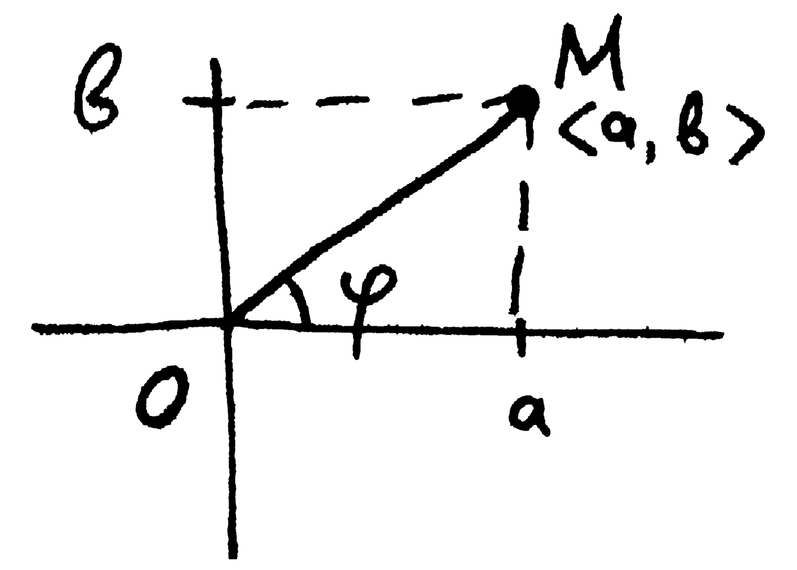
7. Докажите, что если x - любое, а $y\neq 0$, то существует частное от деления x на y, то есть такое z, что $zy=x$. Оно единственно в силу задачи 4.

8. Найти $(1+i)/(1-i)$, $(3+4i)/1+i$. $(5+i)/(1-5i)$

9. Докажите, что $\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z}_1/\overline{z}_2$

§ 5. Тригонометрическая форма комплексного числа: аргумент и модуль.

Напомним, что <u>модулем</u> комплексного числа $a+bi$ называется $\sqrt{a^2+b^2}$. <u>Аргументом</u> числа $a+bi$ называется угол φ, образуемый вектором OM с осью абсцисс. Аргумент определен "с точностью до 2π", так, аргументом $1-i$ можно считать и $-\pi/4$, и $7\pi/4$.



1. Известно, что (r,φ) - модуль и аргумент комплексного числа $\langle a,b\rangle$. Как найти его? /Требуется выразить a, b через r,φ /.

2. По модулю и аргументу найти число:
а/ $(2,\pi)$ б/ $(0,\pi/3)$ в/ $(\sqrt{2},-\pi/4)$
г/ $(-2,3\pi/2)$ д/ $(1,\pi/2)$

3. По числу найти модуль и аргумент:
а/ $3+4i$ б/ $-i$ в/ 0 г/ $-i-1$
д/ $-1+3i$

4. Докажите, что при умножении чисел (r_1,φ_2) и (r_2,φ_2), заданных своими модулями и аргументами, получается число с модулем и аргументом $(r_1\cdot r_2,\ \varphi_1+\varphi_2)$.

5. Докажите т е о р е м у М у а в р а: если число с модулем и аргументом (r,φ) возвести в n-ую степень /умножить n раз само на себя/, то получится число с модулем и аргументом $(r^n,n\varphi)$:
$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

§ 6. Действительная и мнимая части. Тригонометрические формулы.

Пусть ~~z =~~ $\langle a,b\rangle$; a называется <u>действительной</u> частью z, b - мнимой. Обозначения: $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$ / real - действительный, imaginary - мнимый, англ./

1. Докажите, что если z имеет аргумент r и модуль φ, то $\mathrm{Re}\,z=r\cos\varphi$, $\mathrm{Im}\,z=r\sin\varphi$

2. Докажите, что $\mathrm{Re}\,z=(z+\overline{z})/2$, $\mathrm{Im}\,z=(z-\overline{z})/2i$

Обозначим через $\mathcal{M}(\varphi)$ / φ - действительное число/ комплексное число $\cos\varphi+i\sin\varphi$.

3. Чему равны аргумент и модуль $\mathcal{M}(\varphi)$? Докажите, что $\mathcal{M}(-\varphi)=\overline{\mathcal{M}(\varphi)}$, $\mathcal{M}(\varphi_1+\varphi_2)=\mathcal{M}(\varphi_1)\cdot\mathcal{M}(\varphi_2)$, $\cos\varphi=\mathrm{Re}\,\mathcal{M}(\varphi)$, $\sin\varphi=\mathrm{Im}\,\mathcal{M}(\varphi)$.

Комплексные числа - 3

§ 6 /продолжение/

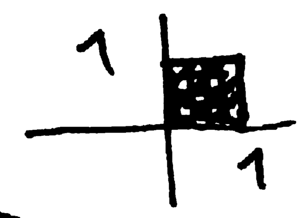
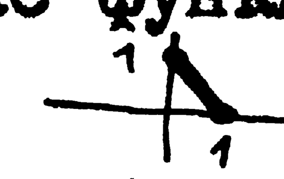
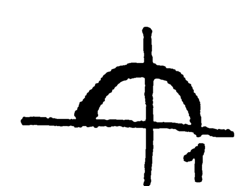
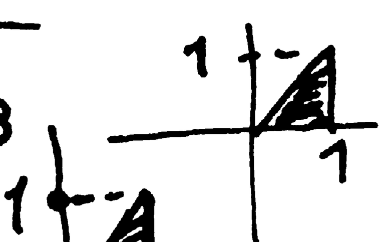
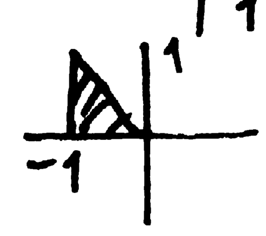
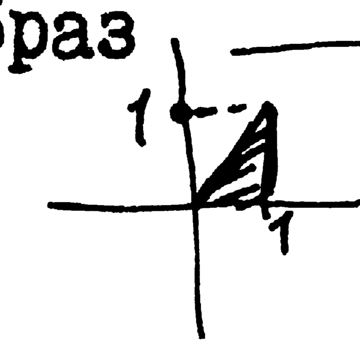
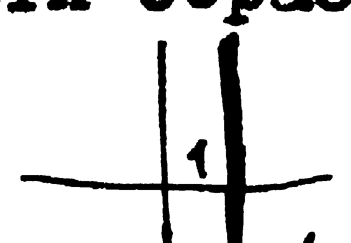
4. Докажите, что если n - натуральное число, то $\mathcal{M}(n\varphi)=(\mathcal{M}(\varphi))^n$
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Из этой формулы следует, что $\mathcal{M}(2\varphi)=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+2\cos\varphi\sin\varphi\, i$
поэтому $\cos 2\varphi = \mathrm{Re}(\mathcal{M}(2\varphi)) = \cos^2\varphi-\sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = \mathrm{Im}(\mathcal{M}(2\varphi)) = 2\sin\varphi\cos\varphi$

5. Получить формулы для $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$.
6. Вывести формулы для сумм $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$
$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$

§ 7. Преобразования комплексной плоскости

Функции $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ можно рассматривать как преобразования плоскости; задача состоит в нахождении образов и прообразов заданных множеств при заданных преобразованиях.

1. $f(z)=z+1+i$ найти образ 
2. Для той же функции найти прообраз 
3. $f(z)=\bar z$ найти образ 
4. $f(z)=iz$ найти образ 
5. $f(z)=2z$ найти образ 
6. $f(z)=(1+i)z$ найти образ 
7. $f(z)=iz^2$ 
Найти образ
Указание. Это парабола /график квадратного трехчлена/;надо найти ее уравнение.

§ 8. Уравнение $z^n=a$. Квадратное уравнение.

1. Найти все комплексные z, такие, что $z^2=1$. /Есть ли какие - нибудь кроме $z=1$ и $z=-1$? Почему ?/
2. Найти все комплексные z, такие, что $z^2=-1$.
3. Найти все z, являющиеся решениями уравнения $z^n=1$. Ответ дать в тригонометрической форме. То же для уравнения $z^n=a$.
4. Найти все корни уравнения $z^2=2i$.
5. Сколько корней имеет уравнение $x^2+2px+q=0$? Как их найти ?
6. Разложите на множители многочлен x^2+1 /Множители, конечно, могут иметь комплексные коэффициенты/
7. Разложите на множители многочлен z^2-2z+2
8. Нарисуйте корни уравнения $z^5=1$
9. Разложите на множители многочлен z^4+2z^2+1