Женя Бокич

Саша Лифшиц

Андрей Пакитнов

Андрей Тверской

Саша Шень

В сущности почти чудо, что современные методы обучения еще не совсем удушили святую любознательность, ибо это нежное растеньице требует наряду с поощрением прежде всего свободы - без нее оно неизбежно погибает. Большая ошибка думать, что чувство долга и принуждение могут способствовать находить радость в том, чтобы смотреть и искать. Мне кажется, что даже здоровое хищное животное потеряло бы жадность к еде, если бы удалось с помощью бича заставить его есть, даже когда оно не голодно, и особенно если принудительно предлагаемая еда не им выбрана.

Альберт Эйнштейн

То,
что вообще может быть сказано,
может быть сказано ясно,
а о чем невозможно говорить,
о том следует молчать.

Леон Витгенштейн

Сборник задач для школьников 8-го класса
/курс алгебры/

Часть 1. Теория множеств.

/Эту часть составляли Женя Бокич и Саша Шень/

Цитаты приводятся по книгам:
К.Зелиг Эйнштейн
В.Тростников. Конструктивные процессы в математике

ЛИСТ №I МНОЖЕСТВА.

Пусть A и B – два множества

Опр. $A\cap B$ – множество элементов, которые входят в A и B одновременно

$A\cup B$ – множество элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств A, B /может быть, в оба сразу/.

$A\setminus B$ – множество тех элементов, которые входят в A, но не входят в B.

Мы говорим, что A – подмножество B /и пишем $A\subset B$/, если все элементы A являются элементами B.

Мы говорим, что A равно B /и пишем $A=B$/, если $A\subset B$ и $B\subset A$.

Пустым множеством называется множество, не содержащее элементов. Оно обозначается знаком $\varnothing$.

Контрольные вопросы.

I/. Вычислить $A\cap B$, $B\cap A$, $A\cup B$, $B\cup A$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если

а/. $A=\{I,2,3\}$ $B=\{2,5\}$ г/. $A=\{I,2\}$ $B=\{2\}$

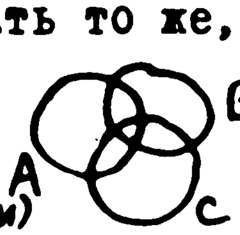
б/. $A=\varnothing$ $B=\{I\}$ д/. $A=\{I\}$ $B=\{I\}$

в/. $A=\varnothing$ $B=\varnothing$

/ответ дать в форме таблицы/

	$A\cap B$	$B\cap A$	$A\cup B$	$B\cup A$	$A\setminus B$	$B\setminus A$	$A\subset B$	$B\subset A$	$B=A$
а									
б									
в									
г									
д									

2/. Пусть A,B,C – множества точек, расположенных внутри кругов с соответствующими буквами. Заштриховать: $A\cap B$, $B\cup C$, $C\setminus A$, $A\cap C$, $B\setminus/A\cap B/$, $B\setminus/A\cap C/$. Сделать то же, если круги расположены так:



Упражнения (задачи)

I/. Доказать тождества:

а/. $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$, $A\cap B=B\cap A$, $\dfrac{C\subset A,\ C\subset B}{C\subset A\cap B}$, $A\cap/B\cap C/=/A\cap B/\cap C$

б/. $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$, $A\cup B=B\cup A$, $\dfrac{A\subset C,\ B\subset C}{A\cup B\subset C}$, $A\cup/B\cup C/=/A\cup B/\cup C$

в/. $A\cap/B\cup C/=/A\cap B/\cup/A\cap C/$, $A\cup/B\cap C/=/A\cup B/\cap/A\cup C/$,

г/. $\varnothing\cap A=\varnothing$, $\varnothing\cup A=A$, $A\setminus\varnothing=A$, $\varnothing\setminus A=\varnothing$.

д/. $A\subset A$, $\dfrac{A\subset B,\ B\subset A}{A=B}$, $\dfrac{A\subset B,\ B\subset C}{A\subset C}$, $\varnothing\subset A$.

е/. $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\setminus B=\varnothing\Leftrightarrow/B\setminus A/\cup A=B$

ж/. $\dfrac{A\subset B,\ C\subset A,\ B\subset C}{A=B=C}$, $\dfrac{A\cap B=\varnothing}{A\setminus B=A}$

2/. Проверить, являются ли написанные равенства тождествами /верные – доказать, для неверных привести контрпример/. Проанализировать, не является ли одна из частей написанных "равенств" подмножеством другой части.

1) [redacted]. $/A\cup B/\setminus C=/A\setminus C/\cup/B\setminus C/$, 2) [redacted]. $A\cup/B\setminus C/=/A\cup B/\setminus C$,
3) [redacted]. $/A\cup B/\setminus A=B$, 4) [redacted]. $/A\setminus B/\cup B=A\cup B$, 5) [redacted]. $/A\setminus B/\cup B=A$.

МНОЖЕСТВА : лист № 2

/продолжение упражнения № 2/

6/. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ 7/ $(B \cap C) \setminus A = [C \cap (A \cup B)] \setminus (A \cap B \cap C)$

8/ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ 9/ $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$

10/ $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ 11/ [redacted] $(A \cup B) \cap C = ((A \cap C) \setminus B) \cup ((B \cap C) \setminus A)$

12/ $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

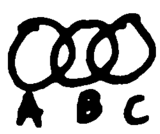
3. Задача. Найти выражение /если такое существует/, содержащее буквы A, B и знаки $\cup$, $\cap$, $\setminus$, такое, чтобы если $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1, 3\}$, это выражение приняло значение:

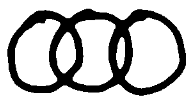
а/ $\{0, 1, 2, 3\}$ б/ $\{0, 1\}$ в/ $\{2\}$ г/ $\{3\}$

д/ $\{0, 1, 3\}$ е/ $\{1, 2\}$ ж/ $\{2, 3\}$ з/ $\{1, 2, 3\}$

Например, ответ к пункту а/ таков: $A \cup B$

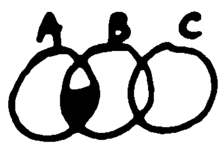
4. Пусть A, B, C, -множества точек, находящиеся внутри соответствующих кругов. Найти выражения /если такие существуют/, содержащие A, B, C и знаки $\cup$, $\cap$, $\setminus$, такие, что они были бы равны множеству заштрихованных точек на рисунках:

круги: 

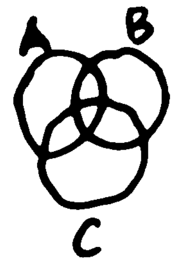
а)  б)  в) 

г) 

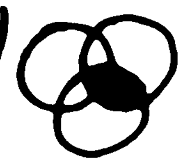
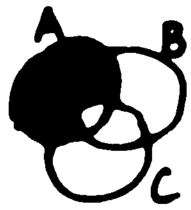
д) 

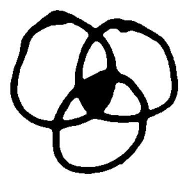
е) 

Например, в п. а) ответ : $A \cap B$

5. Та же задача, что в п.4, только круги расположены так: 

а заштрихованные множества такие:

а)  б)  в) 

г)  д) 

ФУНКЦИИ

I. Пусть A,B -множества и задан закон,сопоставляющий каждому элементу A некоторый /один/ элемент B. Тогда говорят, что задана функция, определенная на множестве A со значениями в множестве B.
Если эта функция обозначается f , то пишут $f: A \to B$
Если $x \in A$, то элемент,который наша функция сопоставляет x, называется значением f на x и обозначается $f(x)$.

2. Определение. Функции f и g , определенные на множестве A со значениями в B , называются РАВНЫМИ, если равны их значения на всех элементах A : для всех x из A $f(x) = g(x)$

3. Определение. Если A - произвольное множество, то определяется "тождественная функция", сопоставляющая каждому элементу A его же. Эта функция определена на множестве A и принимает значения из A.

4. Определение. Пусть $f: A \to B$. Пусть $A' \subset A$. Рассмотрим какой-либо элемент a множества A' и рассмотрим $f(a)$ /это элемент B/ Рассмотрим множество всех элементов $f(a)$ при всевозможных $a \in A'$; оно называется ОБРАЗОМ A' при отображении /функции/ f .

5. Определение. Пусть $f: A \to B$. Пусть $B' \subset B$. Рассмотрим те элементы A, которые после применения f попадают в B' -множество всех таких элементов называется ПРООБРАЗОМ B' при отображении f .

6. Контрольный вопрос. Пусть $A = \{0,1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$, а f -функция, определенная так: $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$. Найти образы $\{0,1\}$, $\{1,2\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ и прообразы $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$.

7. Контрольный вопрос. Пусть $f: N \to N$ определяется так: $f(n) = n^2$ Найти образы множества четных чисел, множества всех чисел,множества $\{1,2\}$ и прообразы: множества четных чисел, множества всех чисел, множеств $\{3,4\}$ и $\{9\}$.

8. Задача. Пусть A,B -множества, A_1, A_2 -подмножества A, B_1, B_2 -подмножества B. Докажите,что:
I/ если $A_1 \subset A_2$, то образ $A_1 \subset$ образ A_2
2/ если $B_1 \subset B_2$, то прообраз $B_1 \subset$ прообраз B_2 .

9. Задача. Проверить следующие утверждения /верные - доказать, для неверных построить опровергающий пример/
I/ Прообраз $(B_1 * B_2)$ = (прообраз B_1) $*$ (прообраз B_2),
где под $*$ понимать: а/ $\cap$ б/ $\cup$ в/ $\setminus$
2/ Образ $(B_1 * B_2)$ = (образ B_1) $*$ (образ B_2),
где под $*$ понимать: а/ $\cap$ б/ $\cup$ в/ $\setminus$
3/ Образ (прообраза B_1) = B_1
Прообраз (образа A_1) = A_1

I0. Задача. Найти среди неверных утверждений задачи 9 "наполовину верные", то есть такие, что либо всегда (правая часть) $\subset$ (левая часть) , либо всегда (левая часть) $\subset$ (правая часть) и доказать эти утверждения / естественно, только их "половины" /.

II. Определение. Пусть A,B,C -множества, $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Тогда определим "композицию" функций f, g так: $x \longmapsto g(f(x))$. Она действует из A в C и обозначается $g \circ f$ /так что $g \circ f(x) = g(f(x))$)

I2. Контрольный вопрос. Пусть $f: N \to N$ определена так: $f(n) = n^2$, а $g: N \to N$ равенством $g(n) = n + 3n^2 + 4$. Найти функции $g \circ f$ и $f \circ g$. Равны ли они ?

I3. Контрольный вопрос. Пусть $f: \{0,1,2\} \to \{2,3,4\}$ определяется равенствами $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, а $g: \{2,3,4\} \to \{5,0,1\}$ -равенствами $g(2) = 0$, $g(3) = 1$, $g(4) = 0$. Вычислить :
а/ $g \circ f(0)$, $g \circ f(1)$, $g \circ f(2)$, $g \circ f(3)$
б/ $f \circ g(0)$, $f \circ g(1)$, $f \circ g(2)$, $f \circ g(3)$

I4. Задача. Пусть $A = \{0,1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,4\}$
$f: A \to B$ опреде[redacted]ляется так: $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 1$, $2 \to 3$
Существует ли функция $g: B \to C$ такая, что
а/ $g \circ f(0) = 1$, $g \circ f(1) = 2$, $g \circ f(2) = 1$
б/ $g \circ f(0) = 2$, $g \circ f(1) = 2$, $g \circ f(2) = 1$

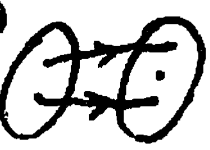
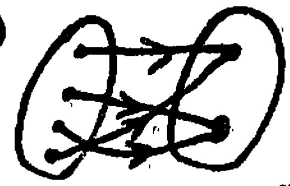
I5. Пусть $f: A \to A$ -тождественная, $g: A \to B$ и $h: B \to B$ -тождественная. Найти $h \circ g$, $f \circ g$, $g \circ h$, $h \circ f$

I6. Определение. Пусть $f: A \to B$. f называется:
а/ вложением, если разные элементы переводит в разные
б/ наложением, если всякий элемент B может быть получен в результате применения f к некоторому элементу A.

ФУНКЦИИ: продолжение

в/ взаимно – однозначным, если f является вложением и наложением одновременно.

17. Контрольный вопрос. Определить, являются ли указанные далее отображения а/ вложениями; б/ наложениями; в/ взаимно-однозначными.

(i)  (ii)  (iii)  (iv) 

(v) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определенная формулой $f(n) = n^2$; (vi) то же, но формула $f(n) = n/2$; (vii) то же, но формула $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечетно} \\ n/2, & \text{если } n \text{ четно} \end{cases}$

18. Задача. Если А – произвольное множество, то тождественная функция $A \to A$ является взаимно – однозначной. Доказать.

19. Задача. Пусть $f: A \to B$. Если f взаимно-однозначно, то существует и единственное $g: B \to A$ такое, что $g \circ f$ и $f \circ g$ /Контрольный вопрос: откуда и куда действуют $g \circ f$ и $f \circ g$ / – тождественные функции.
Это отображение /функция/ g называется обратным к f и обозначается $(f)^{-1}$.
Доказать, что $(f)^{-1}$ является биекцией. Поэтому можно рассмотреть $(f^{-1})^{-1}$ /Контрольный вопрос: откуда и куда эта функция действует?/. Найдите эту функцию.

20. Контрольный вопрос. Найдите обратные функции к тем функциям п. 17, которые являются биекциями / биекция – другое название для взаимно-однозначных функций/

21. Задача. Чему равна обратная функция к тождественной ?

22. Задача. Если $f: A \to B$ имеет обратную / то есть функцию $g: B \to A$ такую, что $f \circ g$ = тождественной в В и $g \circ f$ = тождественной в А/, то f – взаимно однозначно
/Таким образом, f взаимно однозначно $\equiv$ f имеет обратную /

<u>Сужение функции.</u> Пусть $f: A \to B$. Если образ А содержится в некотором $B' \subset B$, то можно рассмотреть функцию $f^{\sim}: A \to B'$ такую, что для всех $x \in A$ $f^{\sim}(x) = f(x)$.

23/. Верно ли что
f-вложение $\Longleftrightarrow$ $f^{\sim}$-вложение,
f-наложение $\Longrightarrow$ $f^{\sim}$-наложение, $f^{\sim}$-наложение $\Longrightarrow$ f-наложение.

Если $A' \subset A$, то можно рассмотреть $f^{*}: A' \to B$ определяемую формулой $f^{*}(x) = f(x)$ при всех $x \in A'$

24/. Верно ли, что
f- наложение $\Longrightarrow$ f^{*}-наложение, f-вложение $\Longrightarrow$ f^{*}- вложение,
f^{*}-наложение $\Longrightarrow$ f- наложение, f^{*}- вложение $\Longrightarrow$ f- вложение.

25/. Если f- вложение, а B' =образ А при f, то $f^{\sim}: A \to B'$ – взаимно-однозначное отображение.

26/. Если f – наложение, то существует такое $A' \subset A$, что $f^{*}: A' \to B$ – взаимно однозначно.

МНОЖЕСТВА : дополнительные задачи.

1. Можно ли выразить $\setminus$ через $\cup$ и $\cap$?
то есть: существует ли такое выражение, содержащее A, B, $\cup$ и $\cap$, что оно равно /при любых A и B/ $A \setminus B$?

2. Можно ли выразить $\cap$ через $\setminus$?

3. Можно ли выразить $\cup$ через $\cap$ и $\setminus$?

4. Если равенство $X=Y$, где X и Y - выражения, содержащие буквы A,B,C,... и $\cup$, $\cap$, $\setminus$, не является тождеством, то существует контрпример, в котором A, B, C, ... -конечные подмножества $\mathbb{N}$.

5. Рассмотрим множество всех натуральных чисел 1,2,3,... и введем в нем операции "глупое об"единение"и"глупое пересечение":
глупым об"единением двух чисел считаем наибольшее из них,
глупым пересечением двух чисел считаем наименьшее из них.
Доказать, что если имеется тождество, содержащее $\cap$ и $\cup$ /и не содержащее $\setminus$ /, то оно останется верным, если под буквами понимать числа, а под $\cap$ и $\cup$ -глупое пересечение и об"единение.

6. Верно ли обратное, то есть следует из верности равенства в "глупом" смысле его настоящая верность ?

7,8. Эти задачи получаются из 5 и 6 , если глупым об"единением двух чисел считать наименьшее / а не наибольшее,как раньше/ а глупым пересечением считать наибольшее.

9,10. Эти задачи получаются из 5 и 6 , если глупым об"единением считать НОК , а глупым пересечением -НОД

11,12. Эти задачи получаются из 5 и 6, если глупым об"единением считать НОД / а не НОК , как в 9,10/, а пересечением-НОК.

13. Докажите, что если равенство содержит буквы A,B,C,... и знаки $\cap$ и $\cup$ /и не содержит $\setminus$ /, и является тождеством, то равенство, получаемое из него заменой $\cap$ на $\cup$ и наоборот,также является тождеством.

14. Если равенство, содержащее A,B,C /только эти три буквы/ и знаки $\cap$ и $\cup$ /без $\setminus$ /, верно при C=A и C=B, то оно также верно при $C=A \cap B$ и $C=A \cup B$.

15. Сколько различных выражений можно составить из букв A и B с помощью знаков $\cup$, $\cap$ и $\setminus$? /Два выражения X и Y считаются равными, если $X=Y$ -тождество, т.е. если они равны при всех значениях A и B/

16. Та же задача, что в 15, только букв не 2 а n .

17. Лемма Крэйга. Пусть $R(A,B,C)$ -выражение, содержащее A,B,C, $\cup$, $\cap$, $\setminus$; $S(A,B,D)$ -выражение, содержащее A,B, D, $\cap$, $\cup$, $\setminus$. Пусть $R(A,B,C) \subset S(A,B,D)$,каковы бы ни были A,B,C,D . Доказать, что существует такое выражение $T(A,B)$ /содержащее A,B,$\cup$,$\cap$,$\setminus$/, что при всех A,B,C $R(A,B,C) \subset T(A,B)$ и при всех A,B,D $T(A,B) \subset S(A,B,D)$

ФУНКЦИИ /Дополнительные задачи/

1/. Пусть $f: A \to B$. Доказать, что следующие свойства а/ – в/ и г/ – е/ равносильны:

а/ f -вложение.

б/ Существует левый обратный, т.е. такая функция $g: B \to A$, что $g \circ f$ = тождественная.

в/ На f можно сокращать слева, т.е. если С-множество, $g_1: C \to A$ и $g_2: C \to A$ и $f \circ g_1 = f \circ g_2$, то $g_1 = g_2$

г/ f -наложение

д/ Существует правый обратный, т.е. такая функция $g: B \to A$, что $f \circ g$ =тождественная

е/ На f можно сокращать справа, т.е. если С-множество, $g_1: B \to C$ и $g_2: B \to C$ и $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ [redacted], то $g_1 = g_2$,

2/ Пусть $f: A \to B$, $g: B \to C$. Доказать:

а/ Если f, g -вложения, то $g \circ f$ - вложение.

б/ Если $g \circ f$ -вложение, то f -вложение.

в/ Верно ли, что если $g \circ f$ -вложение, то g -вложение?

г/ Если f, g -наложения, то $g \circ f$ наложение.

д/ Если $g \circ f$ -наложение, то g - наложение

е/ Верно ли, что если $g \circ f$ - наложение, то f -наложение?

3/ Сколько различных функции существует из множества $\{0, 1, 2\}$ в множество $\{5, 6, 7, 8, 9\}$

4/ Пусть А , В -множества.

а/ Наложение А на В существует тогда и только тогда, когда существует вложение В в А

б/ Получить утверждение пункта а , используя задачу 1.

*в/ Если есть наложение А на В и В на А , то существует взаимно-однозначное отображение А на В

*г/ Всегда существует либо наложение А на В, либо наложение В на А.

5/ Если $f: A \to A$ такова, что для всех $g: A \to B$ $g \circ f = g$, то f -тождественная функция.

6/ Рассмотрим символы $f_1, \dots, f_n \dots$ и будем составлять из них выражения с помощью знака $\circ$

/Например, $((f_1 \circ f_2) \circ (f_2 \circ f_1))$ и $(f_1 \circ (f_3 \circ f_2))$ -такие выражения/

Если выбрать какое-то множество А и в качестве $f_1, \dots, f_n$ выбрать какие-то функции $A \to A$, то каждое выражение будет выражать некоторую функцию из А в А /композицию соответствующих функций/.

Пусть R_1 и R_2 -два выражения. Равенство $R_1 = R_2$ назовем А-тождеством, если какие бы функции из А в А ни взять в качестве $f_1, \dots f_n$, левая и правая часть будут равны.

Докажите:

1. Если А -подмножество В , то все В-тождества являются А-тождествами. /но не наоборот/
2. Если существует биекция А на В , то все А-тождества являются В-тождествами и все В-тождества являются А -тождествами. /Биекция = взаимно-однозначное отображение/
3. Равенство [redacted] называется абсолютным тождеством, если оно является А-тождеством для всех множеств А. Равенство $R_1 = R_2$ является абсолютным тождеством тогда и только тогда, когда R_1 и R_2 отличаются лишь расстановкой скобок /например, $R_1 = ((f_1 \circ f_2) \circ (f_3 \circ f_2))$, $R_2 = (((f_1 \circ f_2) \circ f_3) \circ f_4)$ /
4. Если равенство не является абсолютным тождеством, то оно не является тождеством на [redacted] множестве $\mathbb{N}$. /Таким образом, $\mathbb{N}$ "характеристическое" множество , то есть если равенство есть $\mathbb{N}$ -тождество, то оно есть и абсолютное тождество/

5/. Если равенство не является абсолютным тождеством, то оно не является А-тождеством для некоторого конечного А.

6/. Тождества на конечных множествах. Докажите:

а/ На одноэлементном множестве все равенства суть тождества.

б/. Если А-двухэлементное, то не все равенства суть А-тождества, однако существуют А-тождества, не являющиеся абсолютными тождествами. /например, $f \circ f \circ f \circ f = f \circ f$ /.

7/. Вопрос /мы не знаем ответа/: существует ли характеристическое конечное множество, т.е. такое конечное множество А, что всякое равенство, не являющееся абсолютным тождеством, не является и А-тождеством?

В частности, является ли характеристическим множеством трехэлементное множество?

7/. Доказать, что каждое отображение из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}$ / $\mathbb{Q}$ =множество рациональных чисел/ можно представить в виде суммы трех взаимно-однозначных отображений, т.е. каково бы ни было $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, существуют функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, такие, что для всех рациональных r имеется соотношение:

$$\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r)$$

8/. Пусть $f: A \to B$, если $A_1 \subset A$, то образ A_1 обозначают $f(A_1)$. Если $B_1 \subset B$, то прообраз B_1 обозначают $f^{-1}(B_1)$.

Доказать:

а/. Если $f(x) \notin f(A)$, то $x \notin A$

б/. Если f-вложение и $f(x) \in f(A)$, то $x \in A$.

в/. Если $f(A) \subset B$, то $A \subset f^{-1}(B)$.

г/. Пусть $f: A \to A$. Докажите, что

I. $A \supset f(A) \supset f(f(A)) \supset f(f(f(A))) \supset \dots$

II. Если $B = A \cap f(A) \cap f(f(A)) \cap f(f(f(A))) \cap \dots$, то $f(B) \subset B$.

Можно ли утверждать, что $f(B) = B$

Можно ли это утверждать, если f-вложение?

9/. Обозначим через 2^A множество всех подмножеств множества А. Функция $f: 2^A \to 2^A$ называется монотонной, если $X \subset Y \subset A \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$.

/ $f(X)$ -не образ X при отображении f, а значение f на элементе $X \in 2^A$ /.

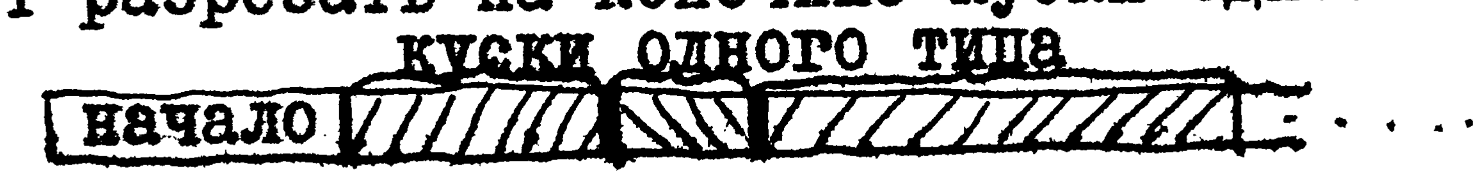
а/. Доказать, что если $\varphi: A \to A$, то функция $X \mapsto$ образ X при φ — монотонна.

б/. Доказать, что если f монотонна, то существует такое $X \in 2^A$, что $f(X) = X$ /X называется неподвижной точкой для f /.

Дополнительные задачи по теме "множества и функции"

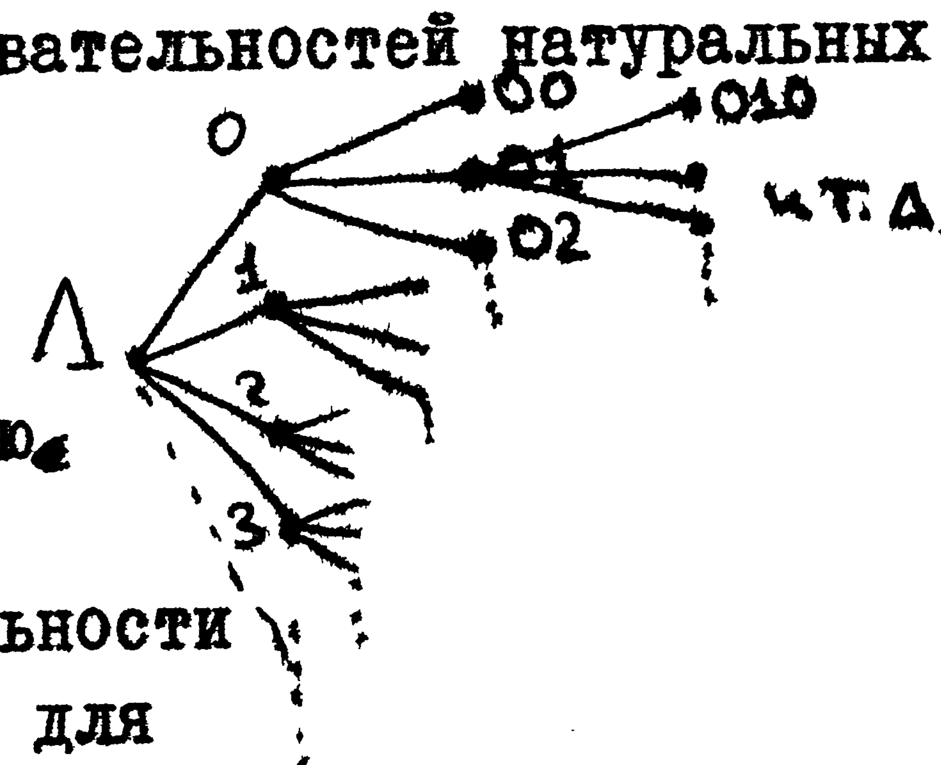
I/. Лемма Кёнига №I.

Пусть все конечные последовательности из 0 и I разделены на два типа, и дана бесконечная последовательность из 0 и I. Доказать, что от неё можно отрезать некоторое начало и после этого оставшийся бесконечный хвост разрезать на конечные куски одного типа



2/. Лемма Кёнига №2.

Рассмотрим множество Q всех конечных последовательностей натуральных чисел. /для наглядности расположим их, как показано на рисунке/ Λ-пустая посл. Подмножество [redacted] S множества Q называется "деревом", если вместе со всякой конечной последовательностью оно содержит все её начала. Пусть S -дерево, содержащее сколь угодно длинные последовательности и имеющее конечный порядок разветвления/т.е. для всякой последовательности $a_1 \cdots a_n \in S$ существует только конечное число k таких, что посл. $a_1 \cdots a_n k \in S$/. Доказать, что S содержит бесконечную ветвь, т.е. что существует такая бесконечная посл. натуральных чисел, что все её начала принадлежат S. Покажите, что если отбросить условие конечного порядка ветвления, то утверждение неверно/бесконечной ветви может и не быть/.



3/а. Бактерия, помещённая в питательную среду, начинает размножаться и образует колонию. /размножение происходит делением, некоторые бактерии время от времени погибают/. Доказать, что в бактериальном государстве /если только колония будет жить вечно/ можно организовать монархию и назначать королей так, чтобы:

а/. Всегда был ровно один король /для бактерий король = королева/

б/. Каждый следующий король был одной из двух бактерий, получившихся при делении предыдущего

3/б. Если человечество будет существовать вечно, то существует /в настоящее время/ человек, у которого в каждом последующем поколении будет потомок мужского пола.

4/а. Существует множество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что ни одно из множеств A и $\mathbb{N} \setminus A$ не содержит никакой бесконечной арифметической прогрессии.

4/б. Однако для всякого множества $A \subset \mathbb{N}$ либо A, либо $\mathbb{N} \setminus A$ содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии /Ван дер Варден/.

5. /Рамсей/ Пусть имеется бесконечное множество A точек, и каждые две соединены красной или синей линией. Доказать, что можно выбрать

такое бесконечное подмножество $A'' \subset A$, что все точки A'' соединены между собой линиями одного цвета.

<u>Точная формулировка.</u> Пусть A – бесконечное множество и множество B всех двухэлементных подмножеств A есть объединение двух непересекающихся множеств $B_1 \cup B_2$. Доказать, что существует бесконечное подмножество $A' \subset A$ такое, что либо все пары $\{a_1 a_2\} (a_1 a_2 \in A')$ принадлежат B_1, либо все пары $\{a_1 a_2\} (a_1 a_2 \in A')$ принадлежат B_2.

6/. Обобщение.

а/. Сформулируйте и докажите задачу 5/. , если цветов не 2, а n /соответственно $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ и $B_1, \cdots B_n$ попарно непересекаются/

б/. Сформулируйте и докажите задачу 5/. , если на два типа поделено не множество 2-х элементных подмножеств A, а множество к-элементных подмножеств A.

в/. Сделайте одновременные обобщения а/ и б/.

7/. Пусть $A_1 \cdots A_n \cdots$ конечные, а через $N(X)$ обозначается число элементов X. Докажите: $N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$

Составьте аналогичную формулу для $N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Составьте аналогичную формулу для n множеств. Применяя её, докажите, что число натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n равно $n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$, где $p_1 \cdots\cdots p_r$ – все простые делители n.

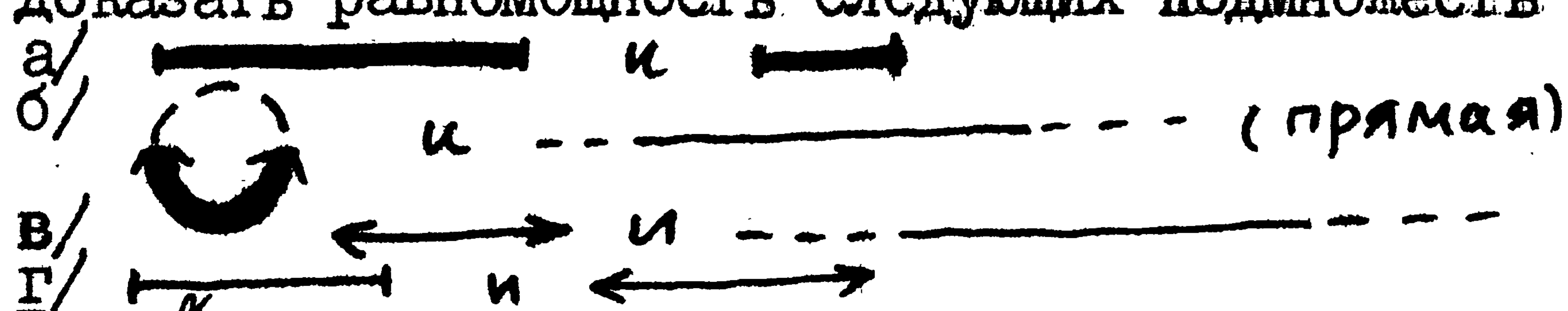
8/. Существует ли последовательность натуральных чисел $a_1 \cdots a_n \cdots$ такая, что всякое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из этой последовательности.

РАВНОМОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ.

Опр. Два множества A и B называются равномощными, если существует взаимно-однозначное отображение $f: A \to B$

Определение. A -счетно , если A равномощно $\mathbb{N}$

Задачи. 0. A равномощно A
I. Если A равномощно B , то B равномощно A.
2. Если A равномощно B и B равномощно C , то A равномощно C .
3. Показать, что:
 а/ множество $\{a, b, c, d\}$ равномощно $\{0, 1, 2, 3\}$
 б/ множество $\{a, b, c\}$ не равномощно $\{d\}$
4. Доказать равномощность следующих подмножеств плоскости:



5. Доказать равномощность:
 а/ множества всех четных натуральных чисел и множества всех натуральных чисел
 б/ множества всевозможных слов / не обязательно осмысленных, т.е. любых конечных последовательностей из русских букв / и $\mathbb{N}$.
 в/ множества всех бесконечных последовательностей из 0 и I и множества всех бесконечных последовательностей из 0,I,2,3.
 г/ множества , элементами которого являются все пары вида (α, β) , где α и β -бесконечные последовательности 0 и I , и множества всех бесконечных последовательностей из 0 и I
6. $\mathbb{Z}$ счетно / $\mathbb{Z}$ =(множество всех целых чисел)/
7. Конечное объединение счетных множеств счетно.
8. Объединение счетного числа счетных множеств счетно.
9. Множество рациональных чисел счетно.
I0. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
II. Пусть A - бесконечное множество.
 а/ A $\cup$(любое конечное) равномощно A
 б/ A $\cup$(любое счетное) равномощно A
I2. Бесконечное подмножество счетного множества счетно.
I3. Множество конечных подмножеств счетного множества счетно.
I4. Множество подмножеств $\mathbb{N}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей из 0 и I.
I5. Пусть дано некоторое множество непересекающихся интервалов, вложенных в отрезок $[0, 1]$. Доказать, что это множество счетно.
16. Если существует наложение счетного множества A на множество B, то множество B конечно или счетно.
17. Очень важный пример несчетного множества.
 Множество всех бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно /доказать/
 <u>Указание. /желающие решать задачу сами не должны его читать/</u>
 Представим себе, что это множество счетно и что мы занумеровали все последовательности: первая, вторая, третья,...
 Как теперь построить последовательность, которую мы пропустили? Постройте последовательность, которая отличается от i -ой на i -ом месте !
18. Пусть A равномощно A_1 , B равномощно B_1 .
 Следует ли отсюда, что:
 А/ $A \cup B$ равномощно $A_1 \cup B_1$
 Б/ $A \cap B$ равномощно $A_1 \cap B_1$
 В/ $A \setminus B$ равномощно $A_1 \setminus B_1$
19. Пусть множества A и B не пересекаются, множества A_1 и B_1 тоже не пересекаются, A равномощно A_1 , B равномощно B_1 . Следует ли отсюда, что $A \cup B$ равномощно $A_1 \cup B_1$?

<u>РАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА7</u> /дополнительные задачи/.

I.I. Мы говорим, что последовательность натуральных чисел a_n мажорирует /major англ.= больший/ последовательность b_n, если для всех n, кроме конечного числа, $a_n \geqslant b_n$. Докажите, что если дано счётное множество последовательностей, то существует последовательность, которая их все мажорирует.

2.I. Последовательность натуральных чисел a_n растёт быстрее, чем последовательность натуральных чисел b_n, если для всех натуральных k $a_n \geqslant k \cdot b_n$ для всех n, кроме конечного числа. Доказать:

а/. Для всякой последовательности существует последовательность, которая растёт быстрее неё.

б/. Если множество А последовательностей таково, что для всякой последовательности /не обязательно из А/ в А существует растущая быстрее последовательность, то А - несчётно.

3.I. Пусть $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Говорят, что f имеет строгий максимум в a, если существует такой интервал $(\alpha;\beta)$, что $a \in (\alpha;\beta)$ и для всех $x \in (\alpha;\beta)$ /кроме $x = a$ / имеем $f(x) < f(a)$. Доказать, что если f -любая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то множество $\{x | x$ есть строгий максимум $f\}$-счётно.

РАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА : дополнительные задачи /продолжение/.

1. А бесконечно тогда и только тогда, когда существует $B\subset A$, такое, что $B\neq A$ и В равномощно А.
2. Введем понятие "декартового произведения" множеств. Пусть А,В -множества; декартовым произведением $A\times B$ множеств А и В называется множество всех пар (a, b), где $a\in A$ и $b\in B$.
   Примеры. 1. Если $A=\{0,1\}$, $B=\{x,y,z\}$, то $A\times B$ содержит 6 элементов, а именно $(0,x)$ $(0,y)$ $(0,z)$ $(1,x)$ $(1,y)$ $(1,z)$
   2. Если В пусто, то $A\times B$ пусто.

   Доказать:
   1. Если А содержит а элементов, а В - в элементов, то $A\times B$ содержит $a\cdot b$ элементов.
   2. $A\times(B\times C)$ равномощно $(A\times B)\times C$
   3. Если А равномощно A_1, а В равномощно B_1, то $A\times B$ равномощно $A_1\times B_1$
   4. Если А и В -счетные, то $A\times B$ -счетно
   5. Если А и В - конечные или счетные, то $A\times B$ конечно или счетно.

   *6. Если А -произвольное бесконечное множество, то $A\times\mathbb{N}$ и $A\times A$ равномощны А

3. Если А и В -множества, то через A^B обозначается множество всех функций из В в А.
   Доказать:
   1. Если А содержит a элементов, а В - b элементов, то A^B содержит a^b элементов.
   2. Если А содержит 2 элемента /например, $A=\{0,1\}$/, то A^B равномощно множеству всех подмножеств В. Сравните с задачей № 14 из обязательных. Этот факт служит основанием для обозначения множества всех подмножеств В через 2^A
   3. Если А равномощно A_1 и В равномощно B_1, то A^B равномощно $A_1^{B_1}$.
   4. Если А и В-непересекающиеся, то $2^A\times 2^B$ равномощно $2^{A\cup B}$
   5. Более общо, ~~если С -любое, то~~ (а А и В - непересек.) $C^{A\cup B}$ равномощно $C^A\times C^B$
   6. $(C^A)^B$ равномощно $C^{A\times B}$, $(A\times B)^C$ равномощно $A^C\times B^C$

   *7. Если А и В -равномощные бесконечные множества, то $A\cup B$ равномощно A.
   8. Пусть M -счетное множество, А -множество некоторых его подмножеств. Может ли А быть несчетным, если:
      1. любые два множества $X,Y\in A$ имеют конечное пересечение
      2. любые два множества $X,Y\in A$ отличаются конечным числом элементов /это значит, что $X\setminus Y$ и $Y\setminus X$ конечны/
      3. каковы бы ни были $X,Y\in A$, имеет место $X\subset Y$ или $Y\subset X$.
   9. Восьмеркой на плоскости называется об"единение двух касающихся окружностей. Пусть на плоскости дано некоторое множество восьмерок. Известно, что любые две восьмерки из него не пересекаются. Доказать, что это множество конечно или счетно

НЕРАВНОМОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

1. Задача. Следующие три условия равносильны:
   а/ А равномощно некоторому подмножеству В
   б/ Существует вложение А в В
   в/ Существует наложение В на А

2. Определение. Если условия задачи 1 выполнены, то говорят: А не мощнее В и пишут: $A \leq B$

3. Задачи. А. Если А не мощнее В, а В не мощнее С, то А не мощнее С.
   Б. Если А равномощно В, то А не мощнее В.

4. Замечание. Пусть А и В –два множества. Возможны следующие случаи:
   1/ А равномощно В
   2/ А не равномощно В

   Случай 2 делится на 4 подслучая:
   а/ $A \leq B$ и $B \leq A$ /но А неравномощно В/
   б/ $A \leq B$ и $B \nleq A$
   в/ $B \leq A$ и $A \nleq B$
   г/ $B \nleq A$ и $A \nleq B$

5. Задача. Доказать, что всегда имеет место ровно 1 из случаев 1, 2а, 2б, 2в, 2г.

6. Задача. Пусть мы поменяли А и В местами / т.е. назвали множеством А то множество, которое раньше называлось В, и наоборот/
   Указать, какой случай перейдет в какой.
   /Например, $1 \longmapsto 1$, так как если А равномощно В, то В равномощно А/

7. ЗАДАЧА. Пусть множества А и В находились в одном из случаев 1,2а–2г. Доказать, что если A' равномощно А, а B' равномощно В, то множества A' и B' находятся в том же случае. /Отсюда следует, что при изучении того, в каком случае находится данная пара множеств, в этой паре множества можно заменять на равномощные/

8. Определение. Будем говорить, что в А меньше элементов, чем в В, и писать $A < B$, если имеет место случай 2б. /Соответственно, $B < A$, если имеет место случай 2в/

9. Задача. Верно ли:
   а) $A < B,\ B \leq C \Rightarrow A < C$
   в) $A < B \Rightarrow A \leq B$
   б) $A < B,\ C \leq B \Rightarrow A < C$
   г) $A \leq B,\ B < C \Rightarrow A < C$

10. Задача. Докажите:
    $A \leq B$, В счетно $\Rightarrow$ А конечно или счетно
    А –счетно, В бесконечно $\Rightarrow A \leq B$
    $A < B$, В счетно $\Rightarrow$ А конечно

11. Составить таблицу, указав, какой случай имеет место для пары А,В если А = ...,В=.... Дать доказательства.

B \ A	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\mathbb{N}$	МНОЖЕСТВО ВСЕХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬН. 0 и 1
$\varnothing$					
$\{1\}$					
$\{1,2\}$					
$\mathbb{N}$					
МН-ВО ВСЕХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТ. 0 и 1					

НЕРАВНОМОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ : продолжение

12. Используя предыдущие задачи, установить, какой случай имеет место для пары: A= множество всех четных целых чисел
B= множество всех бесконечных последовательностей 0,1,2

13. Доказать, что если одно из множеств A и B конечно или счетно, то случаи 2а/ и 2г/ невозможны.

14. Теорема без доказательства.
На самом деле 2а и 2г совсем невозможны, т.е. верна теорема

ТЕОРЕМА. 1. Если $A \leq B$ и $B \leq A$, то A равномощно B
2. Если A , B -множества то или $A \leq B$, или $B \leq A$ /может, одновременно $A \leq B$ и $B \leq A$, тогда пункт 1 говорит, что A равномощно B /

Эта теорема была доказана: пункт 1 -Кантором и Бернштейном, пункт 2 - Кантором. /Георг Кантор,1845-1918 - гениальный немецкий математик, создатель теории множеств/

15. Задача. Используя теорему пункта 14, доказать, что всегда имеет место ровно один из трех случаев:
1/ $A < B$ 2/ A равномощно B 3/ $B < A$
Доказать, что в первых двух случаях/и только в них/ $A \leq B$, в последних двух / и только в них/ $B \leq A$.

16. Применяя теорему п. 14, доказать равномощность любых двух из следующих 6 множеств:

1. Множество бесконечных последовательностей из 0 и 1
2. Множество бесконечных последовательностей из 0,1,2
3. Множество бесконечных последовательностей из 0,1,2,3
4. Множество всех бесконечных последовательностей из 0,1,2,3,4,5,6, 7,8,9
5. Множество всех действительных чисел x таких что $0 \leq x < 1$ /Принять без доказательства, что каждое такое число однозначно задается бесконечной десятичной дробью, не имеющей 9 в периоде/
6. Множество всех действительных чисел /Принять без доказательства, что каждое действительное число однозначно задается двумя данными : "целой частью" /это любое целое число/ и "дробной частью" /это любое действительное число из множества пункта 5//

НЕРАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА : дополнительные задачи

*1. Доказать теорему п.14 основного листка.

Примечание. Первая часть теоремы /п.1/ не требует никаких новых методов, в то время как вторая часть требует так называемой "трансфинитной индукции".

Об этом см. подробнее N 6

2. Доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА /Г.Кантор/

Для всякого множества существует множество, содержащее больше элементов

/Если A -множество, то существует множество B ,такое,что $A<B$ /

Теорема следует из Леммы, которая утверждает, что

множество всех отображений из A в двухэлементное множество имеет мощность большую, чем A

Как вытекает из задачи № 3 листка дополнительных задач по теме "равномощные множества", лемму можно сформулировать иначе:

множество всех подмножеств множества A имеет мощность,большую множества A

Докажите лемму.Выведите из нее теорему.

Указание. Смотри задачу № 17 листка "РАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА"

*3. Пусть A и B -множества. Мы знаем /хотя и не умеем доказывать/, что либо $A \leq B$ либо $B \leq A$. [redacted]
Докажите следующую теорему:

ТЕОРЕМА7 Если A и B бесконечны, то $A \times B$ и $A \cup B$ равномощны тому множеству из двух множеств A и B , чья мощность больше. /Если мощности равны, то равномощны обоим/

Таким образом, операции об"единения и произведения не могут дать большую мощность, чем имели исходные множества. / Для операций пересечения и разности это совершенно очевидно/. Таким образом операция A^B - единственная известная нам операция, дающая множества большей мощности, чем были исходные !

*4. Существует теорема, обобщающая задачу 13 листка "РАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА".

Теорема. Если A -бесконечное множество, то множество всех конечных подмножеств A равномощно A .

/Задача 13 говорит это про счетные множества/. [redacted] Если Вам не удастся решить эту задачу [redacted] в общем случае, попробуйте решить ее для случая когда A равномощно множеству всех бесконечных последовательностей 0 и 1 /

5. Третья лемма Кёнига. Если $A_1<B_1$ и $A_2<B_2$, то $A_1 \cup A_2 < B_1 \times B_2$.
/ мы пишем $A<B$, если A имеет меньшую мощность, чем B/
Аналогично для n множеств: если $A_1<B_1, \dots, A_n<B_n$, то $A_1 \cup \dots \cup A_n < B_1 \times \dots \times B_n$

НЕРАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА /дополнительные задачи/продолжение.

6. К теореме Кантора-Бернштейна. (= теорема п. 14 осн. листка, пункт 1)
Теорема К.-Б. следует из леммы.

Лемма. Если $f: A \to B$ и $g: B \to A$ вложение, то A и B можно так представить в виде сумм [redacted] непересекающихся множеств $A = A_1 \cup A_2$; $B = B_1 \cup B_2$, что $f(A_1) = B_1$ и $g(B_2) = A_2$ / $f(A_1)$-образ A_1 при f, $g(B_2)$-образ B_2 при g /.
Вывести теорему К.Б. из леммы.
Докажите лемму. Указание: представим себе, что дано такое разбиение. Тогда мы кое про какие элементы A /соотв. B/ знаем, куда они принадлежат – в A_1 или A_2 /соотв. B_1 или B_2 /. Например, если $x \in A \setminus g(B)$, то x обязательно принадлежит A_1, а $f(x) \in B_1$!
Решите задачу "функции, дополнительные задачи, 8.г."

7. Докажите обобщённую теорему Кантора-Бернштейна.
Теорема о среднем.
Если $A \leq C \leq B$ и $A \subset B$, то существует C' такое, что C' равномощно C и $A \subset C' \subset B$. Выведите из неё теорему К.Б.
Указание: решите задачу "функции, дополнительные задачи, №9"