ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Данный набор задач является введением в линейную алгебру / теорию размерности линейных пространств/. Он состоит из 4 параграфов:

1. Линейные системы
2. $\mathbb{R}^n$ и его свойства
3. Метод Гаусса
4. Размерность и ее применения.

§ 1. Системы линейных уравнений.

Пусть дана система с n неизвестными, имеющая вид:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = \alpha \\ b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n = \beta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad / \text{ к уравнений } /$$

Такая система называется системой линейных уравнений или линейной системой. / В этих задачах не будет других систем, поэтому под системой мы будем всегда понимать линейную систему /.
Таблица из коэффициентов системы называется матрицей системы.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Если система имеет n неизвестных и k уравнений, то в этой таблице будет k строк из n чисел и n столбцов по k чисел в каждом.

Столбец $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{vmatrix}$ называется правой частью системы. Как известно, набор из n чисел называется решением системы, если при подстановке этих чисел вместо неизвестных равенства верны.

1. Показать, что система $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ есть система 2-х линейных уравнений с 3 неизвестными. Записать матрицу этой системы и ее правую часть.
2. То же для системы $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

3. Написать матрицу и правую часть системы 3 уравнений с двумя неизвестными, у которой любой набор чисел - решение.

4. Написать матрицу и правую часть системы 3 уравнений с двумя неизвестными, у которой нет решений.

5. Та же задача для системы из 2 уравнений с 3 неизвестными.

6. Та же задача с дополнительным условием: правая часть системы равна 0 / то есть состоит из 0/

7. Написать систему из 3 уравнений, равносильную системе задачи 1. Ответ дать в виде матрицы и правой части.

8. Написать систему из 1 уравнения, равносильную системе задачи 1.

9. Найте все решения системы линейных уравнений с матрицей $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ и правой частью $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Система называется однородной, если ее правая часть равна 0.

10. Всегда ли однородная система имеет хоть одно решение ?

11. Докажите, что если наборы

$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ и $y = \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$ являются решениями однородной системы с n неизвестными, то набор $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ также является ее решением. Словами: сумма 2 решений однородной системы - снова ее решение.
Иначе: множество решений однородной системы замкнуто относительно сложения.

12. Докажите, что если набор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ -решение однородной системы, а $\lambda \in \mathbb{R}$, то набор $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ - также ее решение.

Словами: множество решений линейной однородной системы замкнуто относительно умножения на действительные числа. Выведите отсюда, что у однородной системы всегда либо 1 решение, либо бесконечно много решений.

13. Выведите из задач 11 и 12, что если x, y -решения однородной системы, а λ, μ - действительные числа, то $\lambda x + \mu y$ -решение той же системы.

14. Известно, что $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ -решения однородной системы. Следует ли отсюда, что $\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$ -ее решение ?

15. А что $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ -ее решение ?

16. А что $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ -ее решение ?

17. Могут ли в матрице этой системы /см. задачу 14/ быть ненулевые числа ?

18. Пусть x, y -2 решения системы /не обязательно однородной/. Докажите, что $y - x$ -решение однородной системы с той же матрицей / и нулевой правой частью/.

19. Пусть имеется некоторое решение x системы. Докажите, что если к x прибавлять всевозможные решения однородной системы с той же матрицей, то мы получим все решения исходной системы и только их. Иногда этот факт выражают следующей туманной фразой: "Общее решение неоднородной системы равно частному решению неоднородной плюс общее решение однородной".

20. Докажите, что если система имеет 2 разных решения, то однородная система с той же матрицей имеет ненулевое решение.

21. Докажите, что если однородная система имеет ненулевое решение, то исходная система имеет по крайней мере 2 решения.

22. Пусть дана <u>матрица</u>. Будем рассматривать системы с этой матрицей и всевозможными правыми частями. Назовем /только в этой задаче/ правую часть <u>хорошей</u>, если система с ней имеет решение. Докажите, что сумма хороших правых частей есть хорошая правая часть.

23. Известно, что для системы из 2 уравнений $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ -хорошие правые части. Будет ли любая правая часть хорошей ?

24. Докажите, что 0 всегда есть хорошая правая часть и что если мы умножим хорошую правую часть на число, то получим снова хорошую правую часть.

* 25. Известно, что $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ - решения системы /не обязательно однородной/.

Можно ли утверждать, что $\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$ -тоже ее решение? А про $\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$?
А про $\begin{vmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{vmatrix}$?

* 26. Докажите, что однородная система, где неизвестных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.
/Эта задача будет основным результатом § 3/

<u>§ 2. $\mathbb{R}^n$ и его свойства.</u>

А. Через $\mathbb{R}^k$ обозначается множество всех наборов из k действительных чисел. /Так, например, $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ и т.д./

При каждом k в $\mathbb{R}^k$ вводится сложение: если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ то $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_k + y_k \end{pmatrix}$ и умножение на действительные числа: если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$.

Б. Теперь задача решения системы с m неизвестными и n уравнениями может быть сформулирована следующим образом.

$$\left.\begin{matrix} a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = \alpha \\ b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m = \beta \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} n$$

Рассмотрим функцию $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ определенную так:

$$\varphi: \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m \\ b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m \\ \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

и правую часть $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{pmatrix}$ /она $\in \mathbb{R}^n$ /; теперь ясно, что $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix}$ решение системы тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = A$. Таким образом, решить систему – значит найти прообраз A при φ.

В. Заметим, что функция φ определяется матрицей системы и не зависит от ее правой части. Функцию, соответствующую матрице M, будем обозначать φ_M.

1. Найти $\varphi_M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, если а/ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
б/ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ в/ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Слева и справа написаны утверждения ; надо найти все пары эквивалентных между собой утверждений из левой и правой части.

Л1. Система с матрицей M и правой частью A имеет решение
Л2. Система с матрицей M имеет решение при любой пр.части
Л3. Ни при какой правой части не может быть 2 решений
Л4. При любой правой части есть ровно 1 решение.
Л5. Однородная система с матрицей M не имеет ненулевых решений.

П1. φ_M взаимно-однозначна
П2. φ_M -вложение
П3. A принадлежит образу $\mathbb{R}^m$ при φ_M
П4. Прообраз $\{0\}$ есть $\{0\}$ /Где лежат эти 0 ?/
П5. φ_M -наложение.

Функция $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется линейной, если она соответствует некоторой матрице. Контрольный вопрос: сколько строк и столбцов может быть в этой матрице ?

3. Докажите, что если $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ -линейная функция, то
$$\left.\begin{matrix} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \end{matrix}\right\} (*)$$ что означают + и · в этих формулах?
4. Выведите из $(*)$, что $f(0) = 0$
5. Определите вычитание в $\mathbb{R}^k$ и докажите, что $f(x-y) = f(x) - f(y)$
*6. Докажите, что всякая функция, удовлетворяющая условию $(*)$, является линейной, так что условие $(*)$ можно считать определением линейной функции.

Теперь решения задач § 1 могут быть записаны короче, чем раньше. Например, решение задачи № 11 записывается так: по условию $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(y) = 0$, тогда $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$, что и требовалось.

7. Запишите таким образом решения задач 13,19,22 из § 1.
8. Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$. A называется подпространством, если:
1) $\forall x, y \in A$ верно $x + y \in A$
2) $\forall x \in A$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ верно $\lambda x \in A$

Докажите, что если A -подпространство и $x, y \in A$, то $x+2y$, $x-y$, $-x$, $y-3x$ все принадлежат A.

9. Пусть $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Докажите, что образ f /образ $\mathbb{R}^m$ при f / и ядро f /прообраз $\{0\}$ при f / являются подпространствами. (f - линейная)

10. Докажите, что если A и B -подпространства, то $A \cap B$ и $A \cup B$ -подпространства.

11. Говорят, что $x \in \mathbb{R}^k$ линейно выражается через $y_1 \dots y_s \in \mathbb{R}^k$, если существуют такие $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{R}$, что

$$x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_s y_s$$

Докажите, что если $A \subset \mathbb{R}^k$ -подпространство, а x линейно выражается через $y_1 \dots y_s \in A$, то $x \in A$.

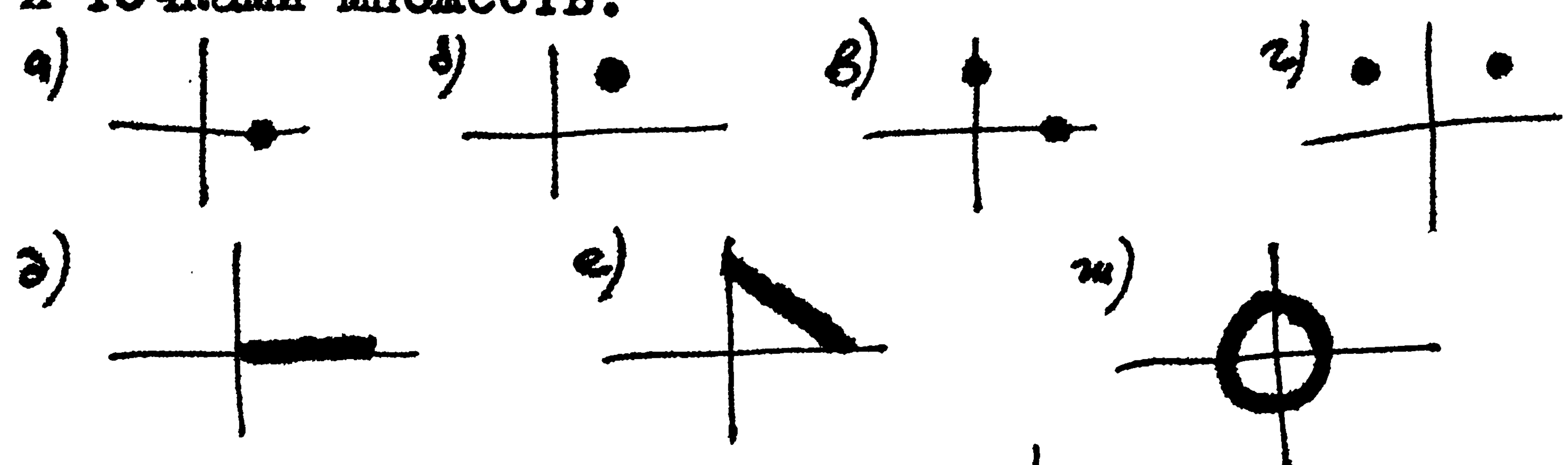
12. Выражается ли $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

13. Выражается ли $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$?

14. Пусть $M \subset \mathbb{R}^k$. Линейной оболочкой множества M называется множество всех $y \in \mathbb{R}^k$, которые линейно выражаются через элементы M. Докажите, что линейная оболочка любого множества есть подпространство.

15. Обратное к задаче 11 утверждение таково: если x содержится в любом подпространстве, содержащем $y_1 \dots y_s$, то x линейно выражается через $y_1, \dots y_s$. Верно ли это ?

16. Как известно, пары чисел можно изображать точками на плоскости. Поэтому плоскость можно считать наглядным изображением Нарисуйте линейные оболочки изображенных на рисунках жирными линиями и точками множеств.



17. Покажите, что если в $\mathbb{R}^k$ взять элементы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

то линейная оболочка их совпадает со всем $\mathbb{R}^k$. /Это значит, что любой элемент $\mathbb{R}^k$ через них линейно выражается/.

* 18. Может ли линейная оболочка $k-1$ векторов в $\mathbb{R}^k$ /по традиции элементы $\mathbb{R}^k$ называют векторами/ быть равна $\mathbb{R}^k$? Таким вопросам будет посвящен § 4 о "размерности".

19. Покажите, что если $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ -линейна, $y_1 \dots y_s \in \mathbb{R}^m$ и нам известны $\varphi(y_1) \dots \varphi(y_s)$, то мы можем найти значение $\varphi(x)$ для любого x, линейно выражающегося через $y_1 \dots y_s$.

20. Элементы /или, как иногда говорят, вектора/ $x_1 \dots x_s \in \mathbb{R}^k$ называются линейно независимыми, если ни один из них не выражается через другие. Докажите, что это равносильно тому, что не существует таких чисел $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{R}$, что 1) $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s = 0$ 2/ не все из $\lambda_1 \dots \lambda_s$ равны 0.

* 21. Могут ли $k+1$ элементов /векторов/ в $\mathbb{R}^k$ быть линейно независимыми ?

22. Докажите, что если $y_1 \dots y_k$ линейно независимы, то любой элемент линейной оболочки $y_1 \dots y_k$ однозначно представляется в виде $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k$.

23. Придумайте систему из m линейно независимых векторов /элементов/ в $\mathbb{R}^m$.

24. Если y линейно выражается через $x_1 \dots x_k$, то линейные оболочки у систем $x_1 \dots x_k$ и $y, x_1 \dots x_k$ равны.

25. Если M_1 и $M_2 \subset \mathbb{R}^k$, $M_2 \subset$ (лин. оболочка M_1), то (лин. оболочка M_2) $\subset$ (лин. оболочка M_1).

26. Докажите, что если $x_1 \dots x_k \in \mathbb{R}^s$, то можно выбрать некоторое подмножество этих элементов так, чтобы:
1/ все элементы подмножества были линейно независимы
2/ все остальные элементы, не вошедшие в подмножество, линейно выражались через элементы подмножества.

Докажите, что из 1/ и 2/ вытекает
3/ линейные оболочки всего множества $x_1 \dots x_k$ и его выбранного подмножества равны.

27. Два элемента $\mathbb{R}^2$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

28. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ –линейное. Докажите, что свойства 1/ φ –вложение и 2/ прообраз $\{0\}$ есть $\{0\}$ –равносильны.

§ 3 . Метод Гаусса

Теперь вернемся к заброшенным нами системам уравнений. Материал этого параграфа, необходимый для дальнейшего, сводится к теореме:

Теорема. Если в однородной системе число уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет ненулевое решение.

Если Вы уже знаете ее доказательство, то можно переходить к §4. В данном параграфе эта теорема будет доказана. Кроме того, будет изложен практический метод решения линейных систем.

1. Докажите, что если вместо одного из уравнений системы написать то же уравнение, к которому прибавлено другое уравнение, умноженное на любое число $\lambda \in \mathbb{R}$, то новая система будет равносильна старой. Верно ли это при $\lambda = 0$?

/Например, система $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ равносильна $\begin{cases} ax + by = c \\ (d+\lambda a)x + (e+\lambda b)y = f + \lambda c, \end{cases}$ так как вторая система получена прибавлением к 2 уравнению 1-го, умноженного на λ /

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, к которой добавлен столбец правой части; например, система

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ имеет расширенную матрицу $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

Так вот, если в расширенной матрице к одной строке прибавить другую, умноженную на число, то получится расширенная матрица равносильной системы. Кроме того, при перестановке строк в расширенной матрице мы, очевидно, также получаем (эквивалентную) расширенную систему. Другими словами, справедлива следующая

> Основная лемма. При следующих действиях над расширенной матрицей: 1/ прибавление к одной строке другой, умноженной на число; 2/ перестановке строк –получается равносильная система. Эти действия называются элементарными преобразованиями расширенной матрицы.

Это позволяет решать системы линейных уравнений так: брать их матрицу и производить над ней элементарные преобразования до тех пор, пока не получится система, которую легко решить.

Пример. Решить таким методом линейную систему:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + y + 2z + t = 4 \\ 2x + y - z + t = 2 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу и результаты преобразований:

$$\left|\begin{matrix}1&1&1&1&3\\1&1&2&1&4\\2&1&-1&1&2\end{matrix}\right| \xrightarrow[\text{2-ую + /-1/·1-ая}]{\text{2-ая замен. на}} \left|\begin{matrix}1&1&1&1&3\\0&0&1&0&1\\2&1&-1&1&2\end{matrix}\right| \xrightarrow[\text{3-ью + -2·1-ая}]{\text{3-ья на}}$$

$$\left|\begin{matrix}1&1&1&1&3\\0&0&1&0&1\\0&-1&-3&-1&-4\end{matrix}\right| \xrightarrow[\text{2 и 3}]{\text{перестановка}} \left|\begin{matrix}1&1&1&1&3\\0&-1&-3&-1&-4\\0&0&1&0&1\end{matrix}\right|$$

или в обычной форме

$$\begin{cases} x+y+z+t=3\\ -y-3z-t=-5\\ z=1 \end{cases}$$

Отсюда видно, что можно выбрать t любым, при выбранном t остальные неизвестные определяются однозначно по формулам: $z=1$, $y=4-3z-t=1-t$; $x=3-y-z-t=3-(1-t)-1-t=1$.

Ответ. t может быть любым, остальные определяются по формулам:
$z=1$, $y=1-t$, $x=1$

2. Решить системы уравнений с расширенными матрицами:

а/
$$\begin{matrix}3&-2&-5&1&3\\2&-3&1&5&-3\\1&2&0&-4&-3\\1&-1&-4&9&22\end{matrix}$$
б/
$$\begin{matrix}2&7&3&1&5\\1&3&5&-2&3\\1&5&-9&8&1\\5&18&4&5&12\end{matrix}$$
в/
$$\begin{matrix}4&-3&2&-1&8\\3&-2&1&-3&7\\2&-1&0&-5&6\\5&-3&1&-8&1\end{matrix}$$

Несмотря на то, что это весьма утомительная процедура, она все же несравненно проще школьного метода, когда X выражается через остальные, это подставляется во второе и т.д. Этот метод- один из самых распространенных при практическом решении уравнений на вычислительных машинах. Между прочим, при ручных вычислениях удобство [redacted] еще и в том, что не нужно писать неизвестных, а можно писать только матрицу коэффициентов.

Для того , чтобы описать этот процесс в общем виде, введем понятие ступенчатой матрицы.

Матрица называется ступенчатой,если в каждой следующей строке первый ненулевой элемент /если он есть, то есть если строка не нулевая/ находится строго правее первого ненулевого элемента предыдущей строки./Требуется, в частности, чтобы все строки, лежащие ниже нулевой, были нулевыми/.

3. Какие из следующих матриц являются ступенчатыми:

а/ $\begin{matrix}1&1&0\\1&1&2\\0&0&1\end{matrix}$ б/ $\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}$ в/ $\begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}$ г/ $\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&2\end{matrix}$ д/ $\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{matrix}$ е/ $\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{matrix}$

4.Докажите, что если в ступенчатой матрице строк больше , чем столбцов, то в ней есть нулевая строка.

5. На доске была написана матрица. Некоторые из чисел стерли и заменили звездочками. Могла ли матрица быть ступенчатой, если осталось:

а/
$$\begin{matrix}*&*&*&1\\0&*&1&*\\*&1&*&*\end{matrix}$$
б/
$$\begin{matrix}1&*&*&0\\*&*&0&*\\*&*&*&1\end{matrix}$$

6. Докажите, что какова бы ни была матрица, можно превратить ее в ступенчатую, применяя элементарные преобразования. /При этом, как мы знаем, система перейдет в равносильную./

7. Привести неступенчатые матрицы задачи 3 к ступенчатому виду.

8. Докажите, что однородная система со ступенчатой матрицей, в которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение. (Так как любая однор. система эквив. одн. сист. со ступ. матр., то основное утверждение §3 док-но

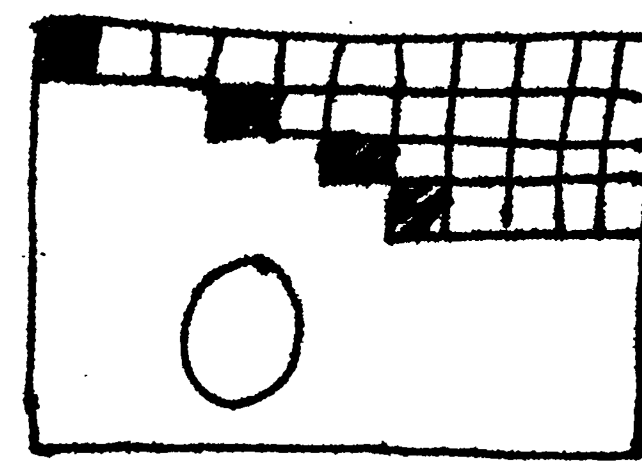
Если Вам удалось решить задачу 8 и Вас не интересуют дальнейшие рассмотрения метода Гаусса, то можно переходить к § 4. Если же нет, то учтите, что мы еще вернемся к этой задаче в № 15.

Таким образом, мы имеем общий метод решения систем линейных уравнений. Он состоит в следующем:надо привести расширенную матрицу к ступенчатому виду, получив равносильную систему со ступенчатой матрицей, которую решить уже нетрудно.

9. Докажите, что система со ступенчатой расширенной матрицей имеет решение тогда и только тогда, когда в ней нет строки, имеющей вид 0,0,...,0,X , где X /число в правой части/ не равно 0.

10. Пусть дана система со ступенчатой расширенной матрицей, имеющая решения. Докажите, что можно разделить все неизвестные на 2 группы : "независимые" и "зависимые" так, что для любых заданных значений независимых переменных значения зависимых определяютмя однозначно /существует и единственно решение системы с данными значениями независимых неизвестных/.

Указание. В качестве зависимых неизвестных можно взять неизвестные, соответствующие столбцам , в которых находятся первые ненулевые элементы строк. В качестве независимых - все остальные. Смотри рисунок.



В черных клетках не нули; зависимые: x_1, x_4, x_6, x_7.

11. Приведите пример системы, в которой возможно несколько способов деления неизвестных на зависимые и независимые.

12. В уравнениях 2а - 2в разберите, как надо делить неизвестные на зависимые и независимые.

13. Сколько зависимых и независимых неизвестных может быть в однородной системе из 3 уравнений с 3 неизвестными, если известно, что она не имеет ненулевых решений ?

14. Сколько зависимых и независимых неизвестных может быть в системе мз 3 уравнений с 4 неизвестными ? Докажите, что если такая системе имеет хоть 1 решение, то она имеет бесконечно много решений. Может ли решений не быть вовсе ?

15. Снова решайте задачу 8 , если она не вышла раньше.

16. Докажите, что если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она не имеет ненулевого решения.

Комментарий. Вообще говоря , при разных способах выбора [redacted]зависимых неизвестных их число может быть различным. При нашем способе их столько, сколько ненулевых строк в расширенной матрице после приведения к ступенчатому виду. Но, может быть, есть другие способы их выбора ! А кроме того, с чего мы взяли , что при разных способах приведения матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований получается одно и то же количество ненулевых строк ? Оказывается, что можно доказать, что число зависимых неизвестных одно и то же при любом способе их выбора. Отсюда следует, что при любом способе приведения матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований получается одно и то же число ненулевых строк. Перейдем теперь к средствам, которые применяются при этих доказательствах - к размерности. /Реально в § 4 мы докажем упомянутое следствие о строках в ступенчатых матрицах, а факт про [redacted] число зависимых неизвестных оставим на Вашу совесть./

§ 4 . Размерность и ее применения.

1. Любые $k+1$ элементов $\mathbb{R}^k$ линейно зависимы.

Указание. Это просто другая формулировка теоремы об однородных системах, где неизвестных больше , чем уравнений.

Определение. Пусть $A\subset\mathbb{R}^s$ -подпространство. Размерностью A называется максимальное возможное число линейно независимых векторов /элементов $\mathbb{R}^s$/ , принадлежащих A . /Так что если в A есть 2 линейно независимых вектора, а любые 3 вектора в нем линейно зависимы, то мы можем смело утверждать, что его размерность равна 2./

2. Докажите, что если $A=\mathbb{R}^s$, то размерность A есть s .

Указание. См. задачу 1.

3. Докажите, что если $A\subset\mathbb{R}^s$, размерность A есть k , $x_1,\dots,x_k$ -линейно независимы и принадлежат A , то всякий вектор A однозначно представляется в виде $\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_k x_k$.

4. Докажите, что если $x_1 .. x_k \in \mathbb{R}^s$ -линейно независимы, то их линейная оболочка имеет размерность k .

Указание. Пусть A -эта линейная оболочка, надо доказать, что не может быть $l > k$ линейно независимых векторов, ей принадлежащих. / k векторов там есть./ Пусть $y_1, \dots, y_l \in A$, $l > k$ надо доказать их линейную зависимость, то есть найти $\lambda_1 \dots \lambda_l$ так, чтоб $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_l y_l = 0$. Для этого выразим каждый из векторов $y_1 \dots y_l$ через $x_1 \dots x_k$:

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1k}x_k$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y_l = c_{l1}x_1 + c_{l2}x_2 + \dots + c_{lk}x_k$$

Мы ищем $\lambda_1 \dots \lambda_l$ так, чтобы $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_l y_l = 0$, или

$$\lambda_1 (c_{11} x_1 + \dots) + \dots + \lambda_l (c_{l1} x_1 + \dots) = 0$$

Перепишите это выражение, выделив коэффициенты при $x_1, x_2, \dots, x_k$ и покажите, что задача сводится к нахождению ненулевого решения некоторой однородной системы с k уравнениями и l неизвестными.

5. Докажите, что если $x_1, \dots, x_k$ -произвольные векторы в $\mathbb{R}^s$, то размерность их линейной оболочки меньше или равна k .

6. Пусть A -подпространство. Докажите, что размерность равна минимальному числу векторов из А , необходимому для того, чтобы их линейная оболочка была равна всему А.

7. Пусть A -подпространство, $x_1 \dots x_k \in A$. Набор векторов $x_1, \dots, x_k$ называется <u>базисом</u> подпространства, если 1/ эти вектора линейно независимы ; 2/ их линейная оболочка есть все A . Докажите, что во всяком подпространстве есть базис, что все базисы в одном подпространстве состоят из одинакового числа векторов, равного размерности подпространства.

8. Пусть A, B -подпространства, $A \subset B$. Докажите, что размерность A меньше или равна размерности B .

9. Докажите, что если $x_1 \dots x_k$ линейно независимы и $\in A$, а $y \notin A$ /и, следовательно, $y \neq 0$ / , то $x_1, \dots, x_k, y$ -линейно независимы.

10. Докажите, что если A, B -подпространства, $A \subset B$, $A \neq B$, то размерность A строго меньше размерности B .

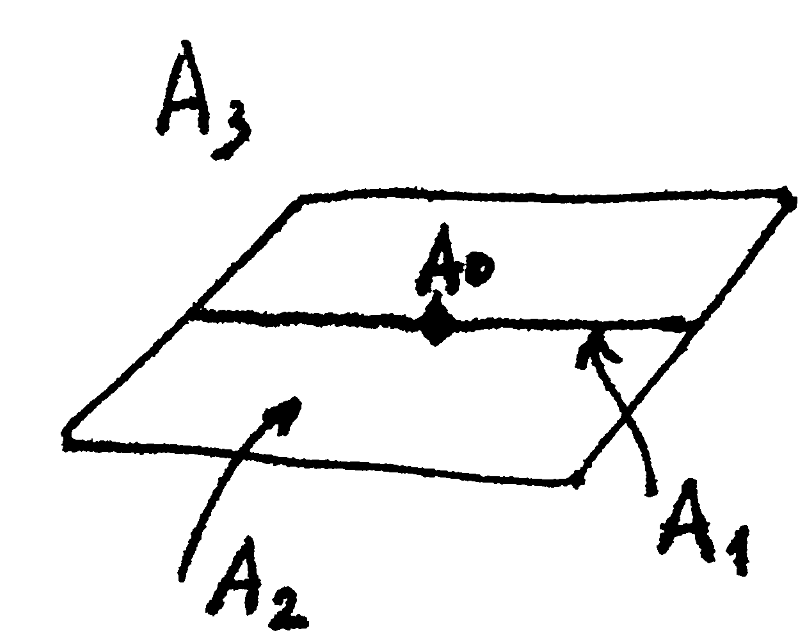
Указание. Используйте 9.

11. Покажите,что если $A \subseteq \mathbb{R}^s$ имеет размерность k , то можно построить последовательность подпрострасть

$$\{0\} = A_0 \subsetneqq A_1 \subsetneqq A_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq A_k = A$$

а если размерность меньше k , то такое последовательности не бывает.

12. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ -линейное отображение, $x_1 .. x_k \in \mathbb{R}^m$ линейно зависимы. Можно ли заключить из этого, что $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)$ -линейно зависимы ?



к 11

13. Замените в 12 всюду "линейно зависимы" на "линейно независимы".

14. Добавьте к 13 дополнительное предположение: φ -вложение, или, что равносильно, прообраз $\{0\}$ есть $\{0\}$.

15. Используя 12, покажите, что не существует линейного наложения $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^n$ при $m < n$

16. А при $m \geqslant n$?

17. Покажите, используя 14, что не существует линейного вложения $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ при $m > n$.

18. А при $m \leq n$?/17

Комментарий. Задача дает "новое" доказательство того, что однородная система с числом уравнений, большим числа неизвестных, имеет ненулевое решение. Но при нашем изложении ему, конечно, грош цена , потому что при построении теории размерности мы использовали задачу о системе,для решения которой развили метод Гаусса решения систем уравнений. Однако существует другое изложение теории размерности, в которой этот метод не применяется, и тогда наше "новое" доказательство становится новым безо всяких кавычек. В последних задачах мы покажем этот путь.

19. Проинтерпретируйте 15 в терминах систем линейных уравнений. Как доказать этот факт, применяя метод Гаусса ?

20. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, обозначим

$$\text{ядро } \varphi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0\} \qquad (\text{прообраз } \{0\})$$

$$\text{образ } \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \qquad (\text{образ } \mathbb{R}^n \text{ при } \varphi)$$

Как известно, ядро и образ - подпространства. Докажите, что сумма их размерностей равна n.

Указание. Выберите базисы в ядре и образе. Для каждого вектора базиса для образа рассмотрите какой-нибудь его прообраз. Покажите, что эти векторы дополняют базис в ядре до базиса во всем $\mathbb{R}^n$.

21. Извлеките отсюда следствия о системах уравнений:

А. Если матрица системы с n уравнениями и n неизвестными такова, что однородная система имеет только нулевое решение, то эта система имеет решение при любой правой части.

Б. Обратно, если система из n уравнений с n неизвестными имеет решение при любой правой части, то это решение всегда единственно.

Такие матрицы /квадратные/ называют невырожденными. Как выглядят невырожденные матрицы после приведения к ступенчатому виду ?

22. Теперь и настала пора доказать тот факт, о котором мы говорили в конце § 3 : при приведении матрицы к ступенчатому виду число ненулевых строк в получившейся ступенчатой матрице не зависит от способа приведения.

Докажите, что если M -ступенчатая матрица, то число ненулевых строк равно размерности образа φ_M.

23. Докажите, что при элементарных преобразованиях матрицы M ядро φ_M не меняется.

24. Докажите, наконец, желаемый результат, используя 23, 22, 20.

Теперь наметим другой подход к изложению теории размерности, при котором нет необходимости рассматривать матрицы, элементарные преобразования и метод Гаусса. Прежде всего заметим, что рассмотрения в § 2 ничего такого не использовали. Далее изложение идет в таком порядке:

дается определение базиса /см. задачу 7/. Чтобы определить размерность, надо доказать, что все базисы имеют равное число элементов. Это будет следовать из основной в этой теории леммы.

<u>Лемма о замене.</u> Пусть $x_1, \dots, x_n$ -векторы, А -их линейная оболочка, $y_1, \dots, y_s$ принадлежат А и линейно независимы. Тогда среди $x_1 \dots x_n$ можно найти такие s векторов, что после выбрасывания их из системы и добавлении вместо них векторов $y_1 \dots y_s$ мы получим систему, имеющую ту же линейную оболочку, что и система $x_1, \dots, x_n$.

Прежде чем доказывать эту лемму, получим из нее утверждение про равенство чисел векторов в двух базисах. Пусть , например, в одном базисе 5 векторов, а в другом 6. Рассмотрим первые 5 векторов в 6-векторном базисе. Они линейно независимы и лежат в линейной оболочке 5-базиса, поэтому по лемме из 5-базиса можно выкинуть 5 векторов и вместо них поставить наши 5 так, что линейная оболочка не изменится. То есть линейная оболочка 5 первых векторов 6-базиса есть все подпространство. Но тогда 6-ой вектор 6-баз. выражается через 5 первых, что противоречит их линейной независимости

После того, как утверждение про число векторов в базисах доказано, вполне возможно уже решать задачи из § 4 , например, в таком порядке: 2,3,4,5,1,6 и т.д.

Теперь наметим план доказательства леммы о замене.

Рассмотрим сначала случай s =1. Мы должны один из векторов $x_1, \ldots, x_n$ выбросить, заменив его на y_1. При этом надо, чтоб линейная оболочка не изменилась. Какой же вектор надо выбросить? Ответ: чтобы узнать это, разложите как-нибудь y_1 по $x_1, \ldots, x_n$ /ведь он принадлежит их линейной оболочке/, в этом разложении есть ненулевой коэффициент /почему?/, так вот, выбросить можно любой вектор, при котором стоит ненулевой коэффициент. Проверьте это.

Пусть теперь s = 2. Нам надо выбросить 2 вектора и заменить их на y_1, y_2 так, чтоб линейная оболочка не изменилась. Сначала по доказанному заменим один из векторов системы $x_1 \ldots x_s$ на y_1. Получим новую систему. А к ней снова применим уже доказанный факт и заменим один из ее векторов на y_2. После чего получим требуемую замену.

Контрольный вопрос: в чем ошибка в этом рассуждении?
Ответ: а не может быть так, что при второй замене мы изымем из системы $x_1, \ldots, x_n$ только что помещенный в нее вектор ?

Указание по преодолению этой трудности: вспомните, что y_1 и y_2 линейно независимы. Поэтому должен быть хоть один ненулевой коэффициент при старых, не подвергавшихся замене векторах. Это спасает положение.

Рекомендуем Вам детально разобрать все эти рассуждения и убедиться, что на их основе можно построить теорию размерности, не прибегая к системам, ступенчатым матрицам и методу Гаусса.

В этом и состоит наша последняя, 25-ая задача.