ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ. /обязательные задачи/

Определение. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется линейной, если существуют числа $a,b\in\mathbb{R}$ такие, что для всех $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=a\cdot x+b$.

Пример. Функция, всюду равная нулю и тождественная функция (из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$) – линейны.

Задача. I. Доказать, что линейная функция удовлетворяет условию
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y).$$

2/. Существует ли линейная функция, такая что:
а/. $f(0)=1;\ f(1)=2;\ f(2)=4$? б/. $f(1)=2;\ f(-1)=-2;\ f(2)=3$?

3/. Известно, что f -линейная. $f(0)=1;\ f(2)=4$ Чему равно $f(1)$?

4/. Доказать, что для всяких чисел a_1,a_2,b_1,b_2, причём $a_1\neq a_2$ существует и единственная линейная функция f такая, что $f(a_1)=b_1$ и $f(a_2)=b_2$

5/. /теорема/ Линейная функция однозначно определяет свои коэффициенты. Т.е., если $\forall x$ $f(x)=a_1x+b_1$ и $f(x)=a_2x+b_2$ для всех x, то $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

6/. Композиция линейных функций линейна.

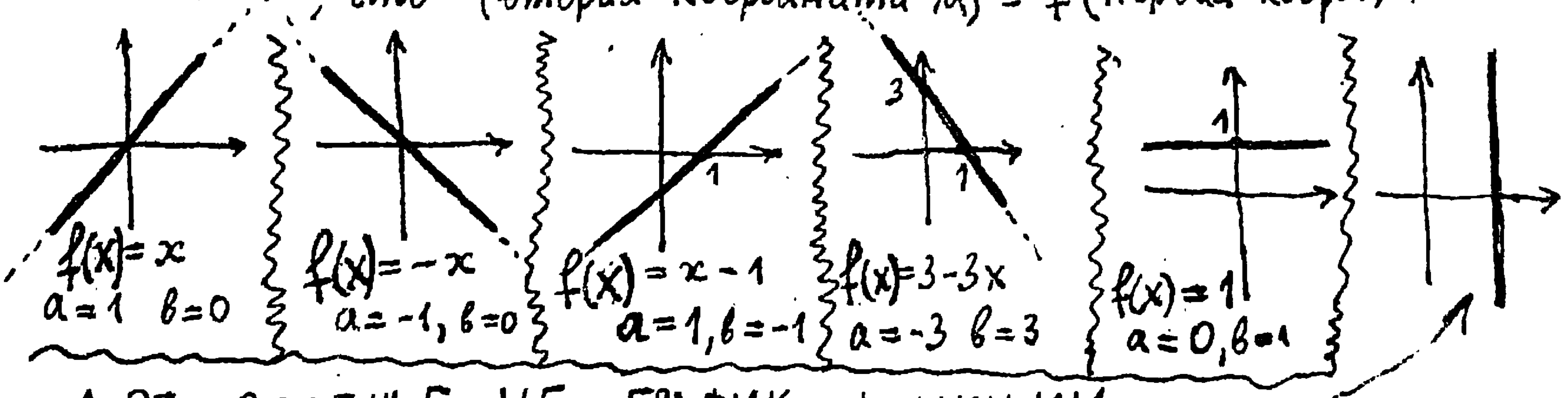
7/. Сумма линейных функций линейна.

8/. Теорема о решении линейных уравнений.
Пусть $f(x)=ax+b$. Тогда если $a\neq 0$, то $\{x\mid f(x)=0\}=\{-\frac{b}{a}\}$; если $a=0, b\neq 0$, то $\{x\mid f(x)=0\}=\varnothing$; если $a=0$ и $b=0$, то $\{x\mid f(x)=0\}=\mathbb{R}$.

9/. Теорема о знаке линейной функции.
Пусть $f(x)=ax+b$ -линейная функция, причём $a\neq 0$. $\{x\mid f(x)=0\}=\{\alpha\}$
Тогда а/. если $a>0$, то $\begin{cases} f(x)>0 & \text{при } x>\alpha \\ f(x)<0 & \text{при } x<\alpha \end{cases}$

б/. если $a<0$, то $\begin{cases} f(x)<0 & \text{при } x>\alpha \\ f(x)>0 & \text{при } x<\alpha \end{cases}$

Несколько типичных графиков линейных функций
(график функции f – множество всех таких точек M плоскости, что (вторая координата M) = f(первая коорд.)



А ЭТО ВООБЩЕ НЕ ГРАФИК ФУНКЦИИ

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ /дополнительные задачи/

1. Найти необходимое и достаточное условие на числа a, b, c для того, чтобы существовала линейная функция f такая, что
   а/. $f(0)=a;\ f(1)=b;\ f(2)=c.$
   б/. $f(0)=a;\ f(2)=b;\ f(3)=c.$
2. Доказать, что если λ и μ – вещественные числа, такие что $\lambda+\mu=1$, то $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$. ($f$ – линейная функция).
3. Пусть λ и μ два вещественных числа, таких что $\lambda+\mu=1$. Функция f такая, что $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$. Доказать, что f – линейна.
*4. Условие $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$ не является достаточным для линейности функции f.

5. Функция вида $X \xrightarrow{F} C\times X$, где C – некоторое постоянное вещественное число, удовлетворяет, очевидно, условиям:

$$1.\ F(X+Y)=F(X)+F(Y) \qquad 2.\ F(\lambda\times X)=\lambda\times F(X)\quad(\lambda\in\mathbb{R})$$

Докажите /это очень просто/, что любая функция, удовлетворяющая условиям 1 и 2 имеет вид $X \to C\,X$ при некотором C. Иногда только такие функции называют линейными, а те, которые называем линейными мы, называют аффинными. Этой терминологии мы в этом пункте / но только в нем / и будем придерживаться.

Итак, рассмотрим множество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и в нем введем "сложение" и "умножение" формулами:

$$\langle x_1, x_2\rangle \text{"+"} \langle y_1, y_2\rangle = \langle x_1+y_1, x_2+y_2\rangle;\quad C\text{"}\times\text{"}\langle x_1, x_2\rangle=\langle C\times x_1, C\times x_2\rangle$$

/Обратите внимание : умножаются не 2 элемента $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, а элемент $\mathbb{R}$ на элемент $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$/

Назовем функцию $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ линейной, если она удовлетворяет условиям 1 и 2, где $X, Y\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. /Как понимаются знаки + и $\times$?/. Докажите, что функция линейна тогда и только тогда, когда существуют такие $C_1, C_2\in\mathbb{R}$, что для всех пар $\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $F(\langle x,y\rangle)=C_1x+C_2y$

Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для ф-ий

$$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

КАК ДАТЬ В ЭТИХ СИТУАЦИЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АФФИННОЙ ФУНКЦИИ?

КВАДРАТНАЯ ФУНКЦИЯ.

Определение. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется квадратной, если существуют такие $a, b, c \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$.

I. Существует ли такая квадратная функция, что $f(0)=0$; $f(1)=1$; $f(2)=4$; $f(-1)=2$.

2. Существует ли такая квадратная функция, что $f(0)=0$; $f(1)=1$; $f(2)=2$?

3. Всякая линейная функция является квадратной.

4. Существует ли квадратная функция, не являющаяся линейной?

5. Докажите, что если квадратная функция f удовлетворяет условию $f(x+y)=f(x)+f(y)$, то она линейна.

6. Композиция (квадратная∘линейная) – [redacted] КВАДРАТН. Ф-ИЯ

7. Сумма двух квадратных функций – квадратная функция.

8. Верно ли, что композиция двух квадратных функций – квадратная функция?

9. Докажите, что если b_1, b_2, b_3 – три произвольных вещественных числа, то существует квадратная функция f такая, что $f(0)=b_1$; $f(1)=b_2$; $f(2)=b_3$.

I0. Докажите, что если a_1, a_2, a_3 – три различных вещественных числа, то существует квадратная функция f такая, что $f(a_1)=0$; $f(a_2)=0$; $f(a_3)=\lambda$, /где λ – некоторое действительное число/.

II. Докажите, что если a_1, a_2, a_3 – три различных действительных чисел, то существует квадратная функция f такая, что $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$, $f(a_3)=b_3$, где $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

I2. Докажите, что такая функция /см. №II / единственна. (ЕСЛИ ЭТО ДОКАЗАТЬ НЕ УДАЕТСЯ, ОТЛОЖИТЕ ЭТОТ ВОПРОС ДО РЕШЕНИЯ п. 15)

I3. Квадратная функция однозначно определяет свои коэффициенты. /сформулировать точно и доказать/.

I4. Пусть f – квадратная функция $f(x)=ax^2+bx+c$ и $a \neq 0$. Доказать, что существуют $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такие, что для всех x $f(x)=\alpha(x-\beta)^2+\gamma$.

I5. Теорема о решении квадратного уравнения.

Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, причём $a \neq 0$, тогда

I/. Если $D=b^2-4ac>0$, то $\{x \mid f(x)=0\} = \left\{\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$;

2/. если $D=b^2-4ac=0$, то $\{x \mid f(x)=0\} = \{-b/a\}$;

3/. если $D<0$, то $\{x \mid f(x)=0\} = \varnothing$.

I6. Теорема Виета.

Пусть $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$, где α, β – действительные числа. Тогда $\{x \mid f(x)=0\} = \{\alpha; \beta\}$ /если $\alpha=\beta$, то это значит, что $\{x \mid f(x)=0\} = \{\alpha\}$.

I7. Пусть p, q – различные корни уравнения $x^2+ax+b=0$

Составить уравнение, корнями которого были бы

а/. $2p$ и $2q$ $(\{x \mid f(x)=0\} = \{2p; 2q\}$.

б/. p^3 и q^3 $(\{x \mid f(x)=0\} = \{p^3; q^3\}$.

Коэффициенты нового квадратного уравнения выразить через a и b.

I8. Пусть p, q – различные корни уравнения $x^2+ax+b=0$. Выразить через a, b p^2+q^2; $(p-q)^2$; (p^3+q^3).

19. Теорема о знаке квадратного трёхчлена.

Пусть $f(x)$-квадратный трёхчлен с $D>0$, α, β - его корни и тогда а/. если $a>0$, то $\begin{cases} f(x)>0 & \text{при } x<\alpha \text{ и } x>\beta \\ f(x)<0 & \text{при } \alpha<x<\beta \end{cases}$

б/. если , то $\begin{cases} f(x)<0 & \text{при } x<\alpha \text{ и } x>\beta \\ f(x)>0 & \text{при } \alpha<x<\beta \end{cases}$ *)

20. Теорема о монотонности квадратного трёхчлена.

<u>Определение.</u> Пусть f определена на некотором множестве $M\subset\mathbb{R}$ и $Q\subset M$. Говорят, что f возрастает на Q /убывает на Q /, если $\forall q_1; q_2\in Q \;\; q_1\le q_2 \Rightarrow f(q_1)\le f(q_2)$ / $f(q_1)\geqslant f(q_2)$/.

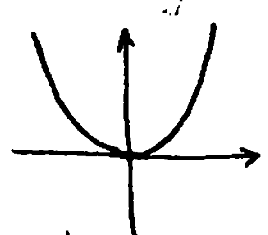
/Теорема/. Если $a>0$ $(a<0)$, то f убывает (возрастает) на множестве $\{x \mid x<-\frac{b}{a}\}$ и возрастает (убывает) на множестве $\{x \mid x>-\frac{b}{a}\}$.

Замечание. Здесь $M=\mathbb{R}$, а $Q_1=\{x \mid x<-\frac{b}{a}\}$, $Q_2=\{x \mid x>-\frac{b}{a}\}$

---

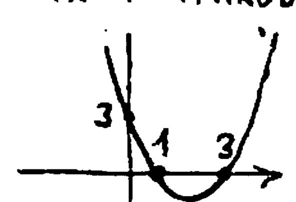
*) ОТСЮДА СЛЕДУЕТ (КАК?) ТОТ ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ФАКТ, ЧТО ЕСЛИ F - КВАДРАТНАЯ, $F(A)<0$ И $F(B)>0$, ТО НА ОТРЕЗКЕ $[A,B]$ СУЩЕСТВУЕТ КОРЕНЬ X ФУНКЦИИ F : $X\in[A,B]$, $F(X)=0$.

НЕСКОЛЬКО ТИПИЧНЫХ ГРАФИКОВ КВАДРАТНЫХ ФУНКЦИЙ



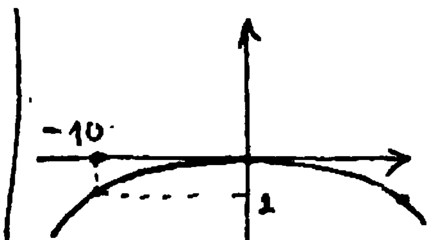
$f(x)=x^2$

$a=1$ $b=0$ $c=0$



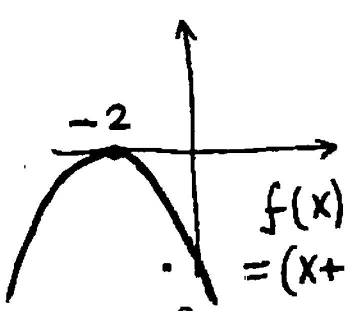
$f(x)=(x-1)\cdot(x-3)=$
$=x^2-4x+3$

$a=1$, $b=-4$, $c=3$

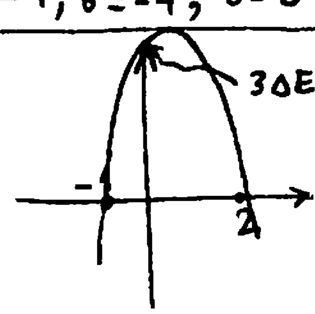


$f(x)=-\frac{1}{100}x^2$

$a=-\frac{1}{100}$ $b=0$ $c=0$

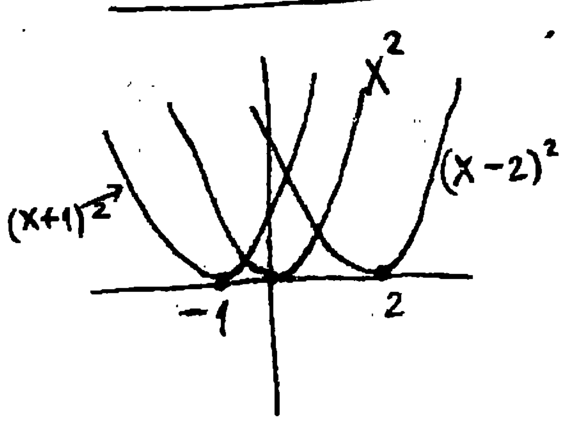


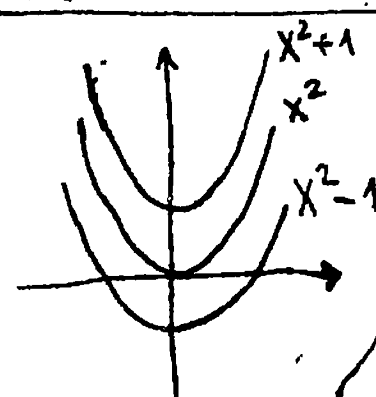
$f(x)=$
$=(x+2)^2=$
$=x^2+4x+4$

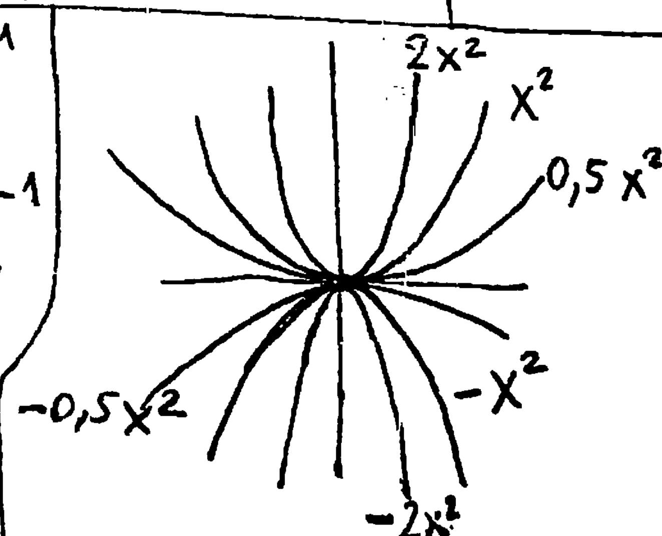


ЗДЕСЬ ДОЛЖНА БЫТЬ ТОЧКА С КООРД. (0, 6), НО МАСШТАБ НЕ УДАЛОСЬ ВЫДЕРЖАТЬ

$f(x)=-3(x+1)(x-2)$







КВАДРАТНЫЕ ФУНКЦИИ : дополнительные задачи

Этот цикл задач можно было бы назвать " Математический анализ в области квадратных функций". Здесь для случая квадратных функций сформулированы некоторые определения и теоремы, которые мы потом докажем в общем случае в курсе математического анализа. В скобках у задач даются названиях их прообразов в анализе. Всюду F -произвольная квадратная функция.

1./Теорема о промежуточных значениях/

Пусть $[a,b]$ -отрезок, $A=f(a)$, $B=f(b)$, $C\in[A,B]$ Тогда существует $c\in[a,b]$ такое, что $f(c)=C$

2. / Вторая теорема Вейерштрасса/

Пусть $[a,b]$ -отрезок. Тогда существует точка $c\in[a,b]$, в которой функция достигает максимума на этом отрезке, то есть такая точка $c\in[a,b]$, что для всех других $x\in[a,b]$ $F(x)\le F(c)$

Определение. Пусть $F(x)=ax^2+bx+c$. Производной функцией для функции F называется функция $F': x\mapsto 2ax+b$

3. Если на отрезке $[a,b]$ квадратная функция возрастает, то ее производная на этом отрезке неотрицательна.

Если на отрезке квадратная функция убывает,то ее производная не положительна на этом отрезке.

4. /Обратная к п. 3 теорема/ Если на отрезке производная квадратной функции неотрицательна /неположительна/, то функция на этом отрезке возрастает /убывает/

5. /Теорема Ролля/. Между любыми корнями функции есть корень ее производной. /Функция, как и всюду на этом листе - квадратная/

6. Производная квадратной функции линейна. Производная линейной функции / наше определение пригодно и для этого случая, так как линейная функция - частный случай квадратной / - функция, всюду равная одному и тому же числу.

7. /Теорема Ферма/.

Пусть $[a,b]$ -отрезок, $x\in[a,b]$ -точка максимума функции f на $[a,b]$ Тогда $f'(x)=0$. Обратите внимание, что если x - не внутренняя точка, а $x=a$ или $x=b$, то это может быть и не верно.

8./Теорема Коши/

Всякая линейная функция имеет квадратную фукцию , являющуюся ее первообразной / т.е. такую квадратную функцию , производная от которой равна данной линейной/. Любые две первообразные данной линейной функции отличаются на константу.

9. /Формула Тейлора/

Если $x,x_0\in\mathbb{R}$, то

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

10. /Формула конечных приращений, частный случай/

Если производная квадратной функции на отрезке $[0,1]$ по модулю не превосходит 1, то $|f(1)-f(0)|\le 1$

11 /Формула конечных приращений = теорема Лагранжа/

Пусть $[a,b]$ - отрезок. Докажите, что существует $c\in[a,b]$ такое, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Докажите, что если $c(a+b+c)<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет решения.

2. Если $mp=2(n+q)$, то хотя бы одно уравнение из
$x^2+mx+n=0$
$x^2+px+q=0$ имеет решение.

3. Докажите, что одно из двух уравнений $(a^2+b^2)x^2+2acx+(c^2-b^2)=0$
$(2a)y^2+(2d)y+b=0$
имеет решение

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2+z^2+2ax=3a^2 \\ x+y=2a. \end{cases}$

т.е. $\forall a\in\mathbb{R}$ найти $\{\langle x,y,z\rangle \mid y^2+z^2+2ax=3a^2$ и $x+y=2a\}$.

5. а). $p_0;p_1;p_2\in\mathbb{R}$ такие, что $p_1>0$; $p_2>0$; $p_0>0$ и $p_1+p_2+p_0=1$; Известно, что уравнение $p_2x^2+(p_1-1)x+p_0=0$ имеет корень $x_0<1$. Доказать, что $p_1+2p_2>1$.

5. б). (см. 5а). Доказать, что если $p_1+2p_2>1$, то существует корень $x_0<1$.

6. Решить уравнение $8(x^4+y^4)-4(x^2+y^2)+1=0$.
т.е. найти $\{\langle x;y\rangle \mid 8(x^4+y^4)-4(x^2+y^2)+1=0\}$.

7. $\forall a\in\mathbb{R}$ найти $\{x \mid x^3-ax^2-2(1+a^2)x-2a=0\}$
Указание: $2x\cdot a^2+(x^2+2)\cdot a-(x^3-2x)=0$.

8. $\forall n$ решить уравнение $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=n(n-1)$

9. Решить уравнение $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

10. Найти все такие $a\in\mathbb{R}$, что система $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x-y=a \end{cases}$
имеет единственное решение.

11. $f(x)=x^2+x+a-2$
а). При каких $a\in\mathbb{R}$ уравнение $\overbrace{\text{уравнение}}^{f(x)=0}$ имеет корни?
б). При каких $a\in\mathbb{R}$ корни имеют разные знаки?
в). При каких $a\in\mathbb{R}$ в интервале $[-2;2]$ $(-2\le\alpha\le2)$ лежит ровно один корень?
г). При каких $a\in\mathbb{R}$ $f(x)>0$ выполнено при всех $x>2$?
д). При каких $a\in\mathbb{R}$ $f(x)<0$ имеет место хоть для одного $x\in[-2;1]$ $([-2;1]=\{\alpha \mid -2\le\alpha\le1\})$