Рациональные числа.

Определение. Действительное число x называется рациональным, если существуют целые m и n такие, что $n \neq 0$ и $x = m/n$
Если таких чисел не существует, то число называется иррациональным.
Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

1. Доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Доказать или опровергнуть: /2-8/

2. $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y,\ x-y,\ x\cdot y,\ x/y \in \mathbb{Q}$ 3. $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \notin \mathbb{Q}$
4. $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x\cdot y \notin \mathbb{Q}$ 5. $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \notin \mathbb{Q}$
6. $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \in \mathbb{Q}$ 7. $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x\cdot y \notin \mathbb{Q}$
8. $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x\cdot y \in \mathbb{Q}$

9. Покажите, что существует иррациональное положительное число, меньшее 0,0001

10. Покажите, что в любом интервале $]\alpha, \beta[$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ найдется рациональное число.

11. Покажите, что в любом интервале $]\alpha, \beta[$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ найдется иррациональное число.

12. Докажите, что если натуральное число не является точным квадратом, то корень из него - иррациональное число.

13. Могут ли числа 0, 1, $\sqrt{2}$ быть членами / не обязательно соседними/ одной арифметической прогрессии?

14. То же о числах 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

15. Могут ли числа 2,3,5 быть членами одной геометрической прогрессии / не обязательно соседними/ ?

16. То же о числах $\sqrt{2}$, 3, 5

17. Пусть дано уравнение с целыми коэффициентами:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z})$$

Покажите, что все рациональные корни этого уравнения являются целыми, то есть что у него нет рациональных, но не целых корней.

18. Покажите, что все целые корни этого уравнения являются делителями его свободного члена

19. Найти все рациональные корни уравнения

$$x^6 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$$

20. Получите из задачи 17 утверждение задачи 1 /рассмотрев уравнение /

21. Аналогично выведите из 17 задачу 12.

22. Действуя аналогично 21, покажите, что если натуральное число не является точным кубом, то кубический корень из него иррационален.

23. Докажите, что если p/q -несократимая дробь , являющаяся корнем уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad /a_0, \ldots, a_n \text{ -целые}/,$$

то q делит a_n, а p делит a_0 .

24. Выведите отсюда результаты задач 17 и 18.

25. Действительное число называется <u>алгебраическим</u>, если оно является корнем некоторого уравнения вида

$$a_n x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами / причем не все коэффициенты = 0 /. Докажите, что всякое рациональное число - алгебраическое.

26. Докажите, что $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ -алгебраические числа.

27. Докажите, что если $x > 0$ -алгебраическое, то $-x$, $1/x$ и $\sqrt[n]{x}$ -алгебраические числа.

28. Докажите, что если x и y -алгебраические, то $x+y$ и $x\cdot y$ -алгебраические числа.

29. Докажите, что множество алгебраических чисел счетно.

30. Докажите, что существует действительное число, не являющееся алгебраическим.

31. /Теорема Лиувилля/. Покажите, что число

$$0,\underbrace{01}_{1!}\underbrace{00}_{2!}1\underbrace{000000}_{3!}1\underbrace{00\ldots000}_{4!}1\underbrace{0\ldots0}_{5!}1\underbrace{0\ldots0}_{6!}\ldots$$

-не алгебраическое

Действительные числа.

Напоминаем обозначения: интервал $]\alpha, \beta[= \{x \mid \alpha < x < \beta\}$
отрезок $[\alpha, \beta] = \{x \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$, аналогично $[\alpha, \beta[$ и $]\alpha, \beta]$

1. При каких x существует $y \in]1,2[$ и существует $z \in]3,4[$ такие, что $z - y > 1 + x$
2. При каких x для всех $y \in]1,2[$ существует $z \in]3,4[$ такое, что $z - y > 1 + x$
3. Существует ли такое множество интервалов, что пересечение всех интервалов из этого множества есть $]0,1]$
4. В задаче 3 слово "пересечение" заменить на "об"единение"
5. Существует ли такое множество отрезков, что пересечение всех отрезков из этого множества есть $]0,1]$
6. В задаче 5 слово "пересечение" заменить на "об"единение"
7. Доказать, что следующие свойства равносильны:
   а/ множество М является об"единением некоторого множества интервалов;
   б/ для всякого $m \in M$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset M$
   Множества, для которых выполнены эти свойства, называются **о т к р ы т ы м и**. Пустое множество также считается открытым.
8. Какие из следующих множеств открыты?/дайте обоснованный ответ/
   а) $[0,1[$ б) $[1,1]$ в) $\{x \mid x > 1\}$ г) $]0,1[$ д) $\{x \mid x \geq 1\}$
   е) $\mathbb{Q}$ (рац. числа) ж) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ з) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и) $\{1,2\}$ к) $\varnothing$
9. Докажите, что пересечение и об"единение конечного числа открытых множеств открыто.
10. Верно это или нет, если рассматривать не только конечные пересечения и об"единения, а любые ?
11. Множество, дополнение которого открыто, называется замкнутым. Какие из множеств задачи 8 замкнуты ?/дать обоснованный ответ/.
12,13. См. задачи 9,10 , где слово "открытые" следует заменить на "замкнутые".
14. Докажите , что всякое замкнутое ограниченное множество является пересечением некоторого множества"двуотрезков" / "двуотрезок"- множество , являющееся об"единением двух отрезков/.Напоминаем также, что множество М называется ограниченным, если оно содержится в некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, то есть
    $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall m \in M \ \alpha \leq m \leq \beta$
15. Следующие условия на $x \in \mathbb{R}$ и $M \subset \mathbb{R}$ эквивалентны:
    А. Любой интервал, содержащий x , пересекается /=имеет непустое пересечение/ с M
    Б. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{R}$ такое, что $|m - x| < \varepsilon$
    Если эти условия выполнены, то говорят, что точка x касается /= является точкой прикосновения для/ M .
16. Если $x \in M$, то x касается M
17. Если M замкнуто, а x касается M , то $x \in M$
18. Если $M_1 \subset M_2$ и x касается M_1 ,то x касается M_2
19. Обозначим через $\overline{M}$ множество $\{x \mid x \text{ касается } M\}$
    Докажите, что $M \subset \overline{M}$ и что если M замкнуто, то $\overline{M} = M$
20. Докажите, что каково бы ни было M , $\overline{M}$ -замкнуто.
21. Найдите $\overline{M}$, если
    а) $M =]0,1[$ | в) $M = \{0,1\}$ | д) $M = \varnothing$ | ж) $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
    б) $M = \mathbb{R}$ | г) $M = [0,1]$ | е) $M = \mathbb{Q}$
    / дать только ответ/
22. Доказать, что $\overline{M}$ -наименьшее замкнутое множество, содержащее M /это значит, что $\overline{M}$ замкнуто, $\overline{M} \supset M$ и всякое замкнутое множество , содержащее M , содержит $\overline{M}$ /
23. Творческая задача. Развить теорию, аналогичную 15-22, заменив замкнутость на открытость, а " x касается M " на "x - внутренняя точка М," что означает, что существует интервал $]\alpha, \beta[$ такой, что $x \in]\alpha, \beta[\subset M$ Аналог16: $x \notin M \Rightarrow x$ - не внутренняя точка M