Определение. Многочленом называется выражение

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad (a_0, a_1 \ldots \in \mathbb{R} - \text{любые})$$

/Это определение, честно говоря, не вполне ясно: а если мы напишем $a_n x^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0$ – это многочлен? Тот же ли это многочлен? А если написать $a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n$? Это многочлен? Тот же ли это многочлен? И что такое выражение? Точный ответ таков: многочленом называется бесконечная последовательность действительных чисел /коэффициентов/ $a_1, a_2, \ldots$ в которой лишь конечное число членов $\neq 0$; это требование нужно для того, чтобы $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ было многочленом, а не бесконечным рядом/. Многочлены можно складывать и умножать. При этом действуют обычные законы сложения, умножения: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$

Каждое число α можно считать многочленом /состоящим только из одного свободного члена $a_0 = \alpha$/.

Определение. Степенью ненулевого многочлена $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ с $a_n \neq 0$ называется число n. [redacted]. Многочлены степени 0 – ненулевые числа. Для нулевого многочлена степень не определяется / иногда её условно полагают $= -\infty$ /.

Задачи. 1/. $\text{Степ}(PQ) = \text{Степ}(P) + \text{Степ}(Q)$

2/. $\text{Степ}(P + Q) \leq \max(\text{Степ}(P), \text{Степ}(Q))$

3/. Верно ли, что $\text{Степ}(P+Q) = \max(\text{Степ}(P), \text{Степ}(Q))$?

Дальнейшее изложение будет проведением аналогий между множеством целых чисел и множеством многочленов. Мы научимся делить многочлены, находить НОД и НОК и т. д. Кроме того, мы изучим вопрос, не имеющий аналогов в $\mathbb{Z}$, – о корнях многочленов.

Определение. Многочлен P делится на многочлен , если существует такой, что

Задачи. 4/. Делится ли мн-н $x + 1$ на многочлен x^2 ? /см. задачу 1/

5/. Делится ли мн-н $1 + x^2$ на многочлен x ?

/Указание. Если бы он делился, то, поскольку $x^2 \vdots x$, было бы $1 \vdots x$ а это.../

Как видно из этих примеров, не так легко проверить, делится ли один многочлен на другой. Однако мы скоро дадим некоторый общий метод проверки.

6/. Докажите: $P \vdots Q,\ R \vdots Q \Rightarrow P + R \vdots Q,\ P - R \vdots Q$

7/. Докажите: $PQ = 0 \Rightarrow P = 0$ или $Q = 0$

8/. Используя 7, докажите, что если $R \neq 0$, а $PR = QR$, то $P = Q$.

9/. Верно ли, что $PQ = RS$ и $P \vdots S \Rightarrow R \vdots Q$?

Метод проверки делимости одного многочлена на другой.

10/. Докажите лемму: если $P \vdots R$, то $Q \vdots R \Leftrightarrow Q - P \vdots R$

Пример. Проверить, делится ли $x^2 + 1$ на $x + 1$.

Решение. $x^2 + 1 \vdots x + 1 \underset{\text{лемма}}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 - x(x+1) \vdots (x+1) \Leftrightarrow -x + 1 \vdots x + 1$

$\underset{\text{лемма}}{\Leftrightarrow} (-x + 1) + (x + 1) \vdots x + 1 \Leftrightarrow 2 \vdots x + 1$. Но $2 \not\vdots\, x + 1$, т.к. $0 = \text{Степ}(2) < \text{Степ}(x + 1) = 1$

11. Докажите, что если ~~на~~ степ $P <$ степ Q, то $P \not\vdots Q$

12. Проверьте, делится ли x^3+1 на $x+2$.

13. Проверьте, делится ли x^4+1 на x^2+1

Наш пример можно представить в удобной форме, напоминающей деление уголком:

$$
\begin{array}{l|l}
\overset{\text{делимое}}{x^2+0\cdot x+1} & x+1 \leftarrow \text{делитель} \\
\cline{2-2}
\underline{x^2+\ x\qquad} & x-1 \leftarrow \text{частное} \\
\quad -x+1 & \\
\quad \underline{-x-1} & \\
\qquad 2 \leftarrow \text{остаток} &
\end{array}
$$

Это дает способ делить многочлены с остатком: $(x^2+1)=(x+1)(x-1)+2$

Определение. Разделить многочлен P (делимое) на ненулевой многочлен S (делитель) означает найти такое Q /частное/ и такой R /остаток/, что:
1/ $P = S\cdot Q+R$ 2. Степ. $R <$ Степ. S /или $R=0$/

14. Докажите, что частное и остаток определяются однозначно. Указание. Пусть $P=Q_1\cdot S+R_1 = Q_2\cdot S+R_2$ Тогда $R_1-R_2 \vdots S$ /почему?/, но, с другой стороны, Степень (R_1-R_2) /если только $R_1-R_2\neq 0$/ $<$ Степ. (S) /почему/ и, поэтому..

15. Докажите, что $P \vdots S$ тогда и только тогда, когда остаток от деления P на S равен 0.

16. Разделить с остатком:
а) x^3+x+1 на x^2+2 б) $x+1$ на x^2+1 в) 0 на $x+7$ г) x^3 на $2x+7$.

Заметьте, что если делят на многочлен 1-ой степени, то в остатке /если только он не равен 0 / будет многочлен 0-й степени, т.е. число.

Далее следует текст, в котором доказывается, что для многочленов верны многие теоремы, верные для целых чисел / о НОД, НОК, о разложении на множители и т.д./. Если этот материал Вас не интересует или покажется слишком трудным, то его можно пропустить и перейти к вопросу о значениях и корнях многочленов.

Дадим определения НОК и НОД.
Определение. R называется НОК (P,Q), если:
1/ $R \vdots P$, $R \vdots Q$ 2/ если $R' \vdots P$, $R' \vdots Q$, то $R' \vdots R$

17. Дайте определение того, что R есть НОД (P,Q)

18. Докажите, что если R – НОК(P,Q), а $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ то αR также есть НОК (P,Q)

Таким образом, если для целых чисел у данной пары целых чисел было 2 НОК, отличавшихся знаком, то в случае многочленов их (НОК) бесконечно много, и они отличаются друг от друга лишь числом.

19. Докажите, что если R_1 и R_2 –НОК (P,Q), то R_1 и R_2 отличаются лишь числовым множителем: существует $\alpha \neq 0$, такое, что $R_2=\alpha R_1$. Указание. Докажите, что $R_1 \vdots R_2$ и $R_2 \vdots R_1$

20. Решите задачи 18, 19, заменив НОК на НОД.

Теперь попытайтесь развить теорию НОК и НОД для многочленов. Для этого есть 2 пути. Один / в случае чисел/ изложен в листке "Целые числа", другой – в листках "Алгоритм Евклида и теория целых чисел". Мы предоставляем Вам возможность заняться типичной работой математика: переносом знакомых результатов на другую область. Возьмите любой из листков по целым числам и начните изменять формулировки и доказательства основных теорем так, чтобы они стали пригодными для случая многочленов. Для сравнения мы приводим сводку результатов.

Сводка результатов : теория делимости для многочленов.

1. Для любых многочленов P и Q существуют НОК и НОД.
2. Многочлен P называется простым, если он не имеет делителей, кроме многочленов 0-й степени / то есть действительных чисел/, и многочленов, отличающихся от него действительным множителем.
3. Всякий многочлен разлагается в произведение простых.

4. Пусть есть два разложения многочлена Q на простые множители:
$$Q = P_1 \cdot \ldots \cdot P_m = R_1 \cdot \ldots \cdot R_n$$
/При этом мы предполагаем, что в числе множителей нет действительных чисел, иначе их можно было бы объединить с другими множителями/. Тогда: I/ число сомножителей одинаково; 2/ если их переставить, то можно добиться, чтобы P_i и Q_i отличались лишь числовым множителем.

5. Следующие свойства равносильны. Это понятие называется взаимной простотой многочленов P и Q.

А. P и Q не имеют общих делителей, кроме многочленов степени 0

Б. Могочлен I есть НОД многочленов P и Q.

В. У P и Q нет общих простых делителей степени I.

Г. В разложениях P и Q на простые множители нет общих простых многочленов / при этом мы считаем одинаковыми S и αS, если α -ненулевое действительное число/

Д. Существуют многочлены X и Y, такие, что $PX + QY = 1$

Е. PQ есть НОК (P, Q).

Значения и корни многочленов.

Теперь, наконец, мы приступим к изучению з н а ч е н и й и к о р н е й многочленов.

Каждому многочлену сопоставляется функция
$$x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$
Она обозначается обычно той же буквой. Так что если многочлен P имеет коэффициенты $a_0, a_1, \ldots$, то $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Определения суммы и произведения многочленов таковы, что если $R + S = T$, то при всех x верно $R(x) + S(x) = T(x)$, а если $R \cdot S = T$, то при всех x верно $R(x) \cdot S(x) = T(x)$.

Определение. Число a называется к о р н е м многочлена P, если $P(a) = 0$.

21. Если $P \vdots Q$, (то множество корней Q) $\subset$ (множество корней P)

22. Верно ли обратное?

23. Пусть многочлен P делят на многочлен первой степени $x - a$. Тогда остаток будет ч и с л о м /многочленом нулевой степени или 0 /. Докажите, что это число равно $P(a)$. Указание. Пусть P делят на $x - a$ с остатком: $P = Q \cdot (x - a) + R$, тогда $P(x) = Q(x) \cdot (x - a) + R$. Подставьте $x = a$!

24. Выведите из предыдущей задачи, что если a -корень многочлена P, то P делится на $(x - a)$. Верно ли обратное?

25. Докажите, что если a, b -различные корни многочлена P, то P делится на $(x-a)(x-b)$.

26. Пусть P -многочлен второй степени со старшим коэффициентом I: $P = x^2 + px + q$. Докажите теорему Виета: если a и b -корни P, то $p = -(a+b)$, $q = a \cdot b$
Можно и раньше было доказать эту теорему с помощью формул для корней квадратного уравнения, но теперь мы доказали ее безо всяких вычислений! Кроме того, мы получили возможность обобщить эту теорему.

27. Теорема Виета для кубического уравнения. Пусть P -многочлен 3-ей степени со старшим коэффициентом I. $P = x^3 + px^2 + qx + r$, a, b, c -три разных корня P. Докажите, что
$$p = -(a + b + c), \quad q = ab + bc + ca, \quad r = -abc$$

28. Если P -многочлен, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ -различные его корни, то P делится на $Q = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$
Какова степень Q ?

29. Выведите из результата задачи 28, что многочлен степени m не может иметь больше чем m корней.

30. Докажите, что всякий многочлен степени m, имеющий m корней $a_1 \ldots a_m$, имеет вид $C\cdot(x-a_1)\ldots(x-a_m)$ где C -число.

31. Докажите, что не равный [redacted] нулю многочлен не может иметь бесконечно много корней.

Эта [redacted] задача решает, в частности, такую проблему:
[redacted] До сих пор мы разделяли многочлен / под которым мы понимали набор коэффициентов / и функцию, соответствующую этому многочлену. В принципе, вполне могло быть, что двум разным многочленам P, Q /многочленам с разными коэффициентами/ соответствовала одна и та же функция: при всех x $P(x)=Q(x)$! Но теперь - то мы знаем, что так не бывает: если P и Q соответствует одна функция, то при всех x верно равенство $(P-Q)(x) = P(x)-Q(x) = 0$, значит, $P-Q$ имеет все действительные числа корнями, следовательно, его / $P-Q$ / коэффициенты равны 0, поэтому [redacted] коэффициенты P равны коэффициентам Q.

32. Докажите, что существует не более одного многочлена степени m, принимающего в заданных $m+1$ точках заданные значения. Это значит, что если заданы $m+1$ точек $x_1, \ldots, x_{m+1}$ и $m+1$ значений $W_1, W_2, W_3, \ldots W_{m+1}$ то не может существовать двух разных многочленов P и Q, удовлетворяющих условиям: $P(x_i) = Q(x_i) = W_i$

Мы сейчас докажем, что один такой многочлен обязательно существует !

33. Докажите, что если $X_1 \ldots X_m, X_{m+1}$ -любые различные числа, то существует многочлен P, который равен 0 в точках $X_1 \ldots X_m$: $P(X_1)=\ldots=P(X_m)=0$ и не равен 0 в точке X_{m+1} : $P(X_{m+1}) \neq 0$

34. Докажите, что если $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}$ -любые различные числа, $A \in \mathbb{R}$, то существует многочлен степени m, такой, что он равен 0 в точках $X_1, \ldots, X_m$, а $P(X_{m+1}) = A$.

35. Докажите, что если $X_1 \ldots X_{m+1}$, $W_1, \ldots, W_{m+1}$ -любые числа, причем все $x_1, \ldots, x_{m+1}$ различны, то существует многочлен P такой, что $P(x_1) = W_1$, $P(x_2) = W_2, \ldots, P(x_{m+1}) = W_{m+1}$

36. Докажите, что такой многочлен единственен.

Указания к 34-36. Требуемый многочлен в 34 можно получить из многочлена задачи 33, умножая последний на число. В задаче 35 искомый многочлен можно получить путем сложения нескольких многочленов, полученных методом задачи 34. А 36 сравните с 32.

Для справок сообщим еще 2 результата, которые доказываются в анализе: всякий простой многочлен имеет степень I или 2, а всякий многочлен нечетной степени имеет по крайней мере I корень.