МНОГОЧЛЕНЫ - 1

А. Многочлены, степень, делимость

Определение. **Многочленом** называется выражение $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ $(a_0,\ldots\in\mathbb{R})$ **Степенью** его называется число n /при условии, что $a_n\neq 0$; в противном случае она равна степени наибольшего члена с ненулевым коэффициентом/. Для нулевого многочлена степень не определяется, иногда говорят, что его степень равна $-\infty$.

1. Что является многочленами нулевой степени ? Первой? Второй ?
2. Докажите, что $\text{степ.}(PQ)=\text{степ.}P+\text{степ.}Q$
3. Докажите, что $\text{степ}(P+Q)\leq\max(\text{ст.}P,\text{ст.}Q)$. Всегда ли здесь имеет место равенство?

Говорят, что многочлен P **делится** на многочлен Q , если существует такой многочлен R , что $P=Q\cdot R$ (Запись: $P\vdots Q$)

4. Делится ли $x+1$ на x^2 /Указание. См. задачу 2/
5. Делится ли многочлен 7 на 2 ?
6. Докажите, что если $P\vdots R$, $Q\vdots R$ то $P+Q\vdots R$ и $P-Q\vdots R$.
7. Докажите, что если $PQ=0$, то $P=0$ или $Q=0$.
8. Докажите, что на ненулевой многочлен можно сокращать: если $PR=QR$, а $R\neq 0$, то $P=Q$.

Б. Проверка делимости. Деление с остатком.

1. Докажите следующую простую **лемму**: если мы хотим выяснить, делится ли P на R , а про Q мы знаем, что он делится на R , то вместо проверки делимости P на R мы можем проверить, делится ли $P-Q$ на R - ответ будет тот же. Короче: если $Q\vdots R$, то свойства $P\vdots R$ и $P-Q\vdots R$ равносильны.

Пример. Проверить, делится ли x^2+1 на $x+1$.
Решение. $x^2+1\vdots x+1 \Leftrightarrow$ (лемма) $x^2+1-x(x+1)\vdots x+1 \Leftrightarrow -x+1\vdots x+1 \Leftrightarrow$ (л.) $\Leftrightarrow (-x+1)+(x+1)\vdots x+1 \Leftrightarrow 2\vdots x+1$. Но $2\not\vdots\, x+1$, т.к. степ. $2<$ ст. $x+1$ $(0<1)$

2. Проверить, делится ли x^3+1 на $x+2$.
3. Провеить, делится ли x^4+1 на x^2+1 .

Наш пример /рассмотренный выше/ можно представить в удобной форме, напоминающей деление уголком:

"делимое" $x^2+0\cdot x+1$ | $x+1$ ← "делитель"
$x^2+1\cdot x$ | $x-1$ ← "частное"
$-x+1$
$-x-1$
2 ← "остаток"

Это дает способ "делить многочлены с остатком:
$x^2+1=(x+1)(x-1)+2$

Разделить многочлен P /**делимое**/ на ненулевой многочлен S /**делитель**/ означает найти такое Q /частное/ и R /остаток/, что: 1/ $P=QS+R$ 2/ степень R меньше степени S или $R=0$.

4. Разделите с остатком: а) x^3+x+1 на x^2+2 ; б) $x+1$ на x^2+1 ; в) 0 на $x+7$; г) x^3 на $2x+7$
5. Какой будет остаток при делении на многочлен 0-й степени ? Первой степени ?
6. Докажите, что частное и остаток определяются однозначно. Указание. Пусть $P=QS+R=Q'S+R'$. Тогда $R-R'\vdots S$ /почему?/ но, с другой стороны, степень $R-R'$ /если только $R-R'\neq 0$ /меньше степени S /почему?/ и, поэтому,...
7. Докажите, что $P\vdots Q$ тогда и только тогда, когда остаток от деления P на Q равен 0 .

В. Значения, корни, делимость.

Значением многочлена $P=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ в точке α называется число $P(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\ldots+a_n\alpha^n$. Число α называется **корнем** многочлена P , если значение P в точке α равно 0 : $P(\alpha)=0$.

1. Если $P\vdots Q$, то (множество корней Q) $\subset$ (множество корней P) . Верно ли обратное?
2. /теорема Безу/. Пусть многочлен P делят на многочлен первой степени $x-\alpha$. Тогда остаток будет числом /почему?/. Докажите, что это число равно $P(\alpha)$ /Вспомните определение деления с остатком/.
3. Используя теорему Безу, докажите, что если α - корень многочлена P , то P делится на $(x-\alpha)$. Верно ли обратное?

МНОГОЧЛЕНЫ - 2

В./продолжение/

4. Докажите, что если a, b – различные корни многочлена P, то P делится на $(x-a)(x-b)$.

5. Пусть P – многочлен второй степени со старшим коэффициентом 1 : $P = x^2+px+q$. Докажите <u>теорему Виета</u>: если a и b – корни
* было P, то $p = -(a+b)$, $q = ab$. Можно* и раньше доказать ее с помощью формул для корней квадратного уравнения, но теперь мы доказали ее безо всяких вычислений. Кроме того, мы получили возможность обобщить эту теорему.

6. Теорема Виета для кубического уравнения. Пусть P – многочлен 3-ей степени со старшим коэффициентом 1 : $P = x^3+px^2+qx+r$. Пусть a, b, c – 3 разных корня P. Выразите p, q, r через a, b, c.

7. Если P – многочлен, $a_1 \ldots a_m$ – различные его корни, то P делится на $Q = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m)$. Какова степень Q?

8. Докажите, что многочлен степени m не может иметь больше m корней. Может ли он иметь меньше m корней ?

9. Докажите, что не равный 0 многочлен не может иметь бесконечно много корней.

10. Докажите, что если два многочлена совпадают на бесконечном множестве, то их коэффициенты равны.

<u>Г. Интерполяция</u>.

1. Докажите, что если $a_1, \ldots, a_m$ – любые различные числа, то существует многочлен степени m, равный 0 в точках $a_1, \ldots, a_m$ и отличный от 0 во всех остальных точках.

2. Можно ли m в предыдущей задаче заменить на $m-1$?

3. Докажите, что если $a_1 \ldots a_m, a_{m+1}$ – любые различные числа, а $A \in \mathbb{R}$, то существует многочлен степени m, равный 0 в точках $a_1 \ldots a_m$ и равный A в a_{m+1}: $P(a_1) = \ldots = P(a_m) = 0$; $P(a_{m+1}) = A$. Указание. Ср.задачу 1

4. Докажите, что если $a_1, \ldots, a_{m+1}, b_1, \ldots, b_{m+1}$ – любые числа, причем все $a_1 \ldots a_{m+1}$ различны, то существует многочлен степени не выше m, такой, что $P(a_1) = b_1$, $P(a_2) = b_2$, $\ldots$, $P(a_m) = b_m$, $P(a_{m+1}) = b_{m+1}$

5. Докажите, что такой многочлен единственен.

6. Докажите, что при любых a, b, c, d система уравнений $(*)$ имеет единственное решение.

$$(*)\quad \begin{aligned} 1x + 1y + 1z + 1u &= a \\ 1x + 2y + 4z + 8u &= b \\ 1x + 3y + 9z + 27u &= c \\ 1x + 4y + 16z + 64u &= d \end{aligned}$$

Д. Многочлены и математический анализ.

1. Докажите, что любой многочлен непрерывен.

2. Найти пределы $\lim P(x)$ при $x \to +\infty$ и $-\infty$. /дать точные определения, сформулировать соответствующее утверждение и доказать его/

3. Доказать, что любой многочлен нечетной степени имеет корень.