Арифметические и геометрические прогрессии.

Определение. Последовательность $a_0, \dots, a_n$ называется арифметической прогрессией, если каждый ее член равен полусумме двух соседних. $(2a_i = a_{i-1} + a_{i+1})$

Определение. Последовательность $a_0, \dots, a_n$ называется геометрической прогрессией , если квадрат каждого ее члена равен произведению соседних.
$(a_i^2 = a_{i-1} \times a_{i+1})$

1. Какие из следующих последовательностейявляются арифметическими прогрессиями ?

   А.0,1,0,1 Б. 0,0,0,0 В. 1,0,0,0 Г. 0,1,1,1
   Д.0,-1,-2,-3 Е. 1,-1,-1,1 Ж. 1,-1,1,-1

2. Какие из последовательностей задачи 1 являются геометрическими прогрессиями ?

3. Докажите, что если $a_0, \dots, a_n$ и $b_0, \dots b_n$ -арифметические прогрессии, то $a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$ -арифметическая прогрессия.

4. Докажите, что если $a_0, \dots, a_n$ и $b_0, \dots, b_n$ -геометрические прогрессии, то $a_0 \cdot b_0, \dots, a_n \cdot b_n$ -геометрическая прогрессия

5. Докажите, что если $a_0, \dots, a_n$ -арифметическая прогрессия, то существует такое число d /"разность" прогрессии/,что $a_i = a_0 + i \cdot d \ (i = 0, \dots, n)$. Обратно, всякая такая последоват. – арифм. прогр.
6. Докажите, что если $a_0, \dots, a_n$ -геометрическая прогрессия, то существует такое число q /"знаменатель" прогрессии/, что $a_i = a_0 \cdot q^i \ (i = 0, \dots, n)$. Обратно, всякая такая последоват. – геометр. прогр.
7. Найдите разности /знаменатели/ тех последовательностей задачи 1, которые являются арифметическими / соответственно геометрическими/ прогрессиями.

8. Докажите, что если бесконечная последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_n \dots)$ такова, что при всяком n сумма ее первых n членов равна $3n^2$,
   $(a_1 + \dots + a_n = 3n^2)$
   то эта последовательность - арифметическая прогрессия.

9. Сумма арифметической прогрессии. Если $a_0, \dots, a_n$ - арифметическая прогрессия с разностью d, то
   $$a_0 + \dots + a_n = (a_0 + a_n) \cdot (n+1)/2$$
   Словесно: сумма арифметической прогрессии равна сумме ее первого и последнего члена, умноженной на число членов и деленной на 2.

10. Сумма геометрической прогрессии. Если $a_0, \dots, a_n$ - геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 1$, то
   $$a_0 + \dots + a_n = a_0 \cdot (q^{n+1} - 1)/(q-1)$$

Несколько задач типа, встречающегося на экзаменах / из книги Лидский В.Б и др. Задачи по элементарной математике; номера по этой книге в скобках/

11. /1/ Если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию.
12. /9/. Числа $x_1, \dots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию, если $x_1 + \dots + x_n = a$, $x_1^2 + \dots + x_n^2 = b^2$
13. /14/ Зная сумму S_n первых n членов геометрической прогрессии и сумму $\tilde{S}_n$ обратных величин этих членов, найти произведение Π_n первых n членов прогрессии.