ВСТУПИТЕЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ

1. Найти $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$, если а/ $A = \{1,2,3\}, B = \{2,5\}$
   б/ $A = \varnothing$, $B = \{1\}$
2. Всегда ли $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$?
3. Сколько элементов содержит множество всех подмножеств множества $\{1, 2\}$
4. Сколько функции существует из множества $\{1, 2, 3\}$ в множество $\{1, 2\}$
5. Существует ли взаимно-однозначная функция, отображающая множество всех натуральных чисел на множество всех целых чисел ?
6. Смотри № 5, но вместо множества целых чисел рассмотрите множество всех пар натуральных чисел, т.е. множество всех пар (a, b) где a и b -натуральные числа.
7. Смотри № 5, но вместо множества целых чисел рассмотрите множество всех бесконечных последовательностей 0 и 1.
8. Доказать, что при $n > 5$ $n! > 2^n$
   Указание: использовать метод математической индукции.
9. Доказать, что если число А делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.
10. Найти все целые x и y, такие, что

$$5x + 3y = 2$$

МНОЖЕСТВА , ФУНКЦИИ : контрольная

1. Вычислить $A \cap B$ и $(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$, если $A = \{1,3,7,10\}$, а $B = \{1, \emptyset\}$

2. Пусть A и B – те же множества. Верно ли, что:
а/ $\emptyset \subset A$ б/ $\emptyset \in A$ в/ $\emptyset \subset B$ г/ $\emptyset \in B$

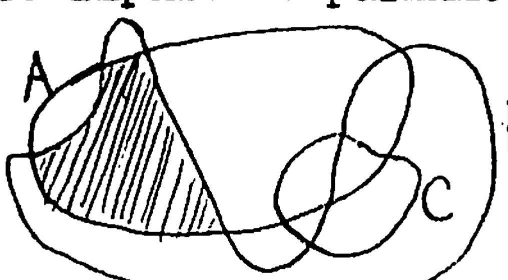
3. Заштриховать $A \cap (B \setminus C)$, если A,B,C – множества точек плоскости, находящиеся внутри соответствующих линий.

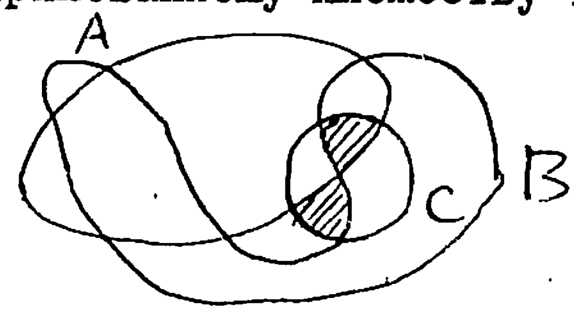
РИСУНОК СМ. ВНИЗУ ЛИСТА

4. Доказать или привести контрпример к равенству

$$(A \cup B) \setminus (C \cap D) = (A \setminus C) \cup (B \setminus D)$$

5. Придумать выражение, содержащее $A, B, C, \cap, \cup, \setminus$, так, чтобы если A,B,C – множества точек, находящиеся внутри соответствующих линий, то это выражение равнялось бы заштрихованному множеству точек.

а/


б/


6. Пусть A – множество целых чисел, B – множество натуральных чисел, $f: A \to B$ –функция , определенная формулой $f(n) = n^2 + 1$. Найти образ и прообраз множества $\{0,2,-2,3,7\}$

7. Пусть A=B=множеству целых чисел, а функция определяется той же формулой, что в задаче 6. Найти образ и прообраз того же множества.

8. Пусть f и g –функции , определенные так:
f : натуральные числа $\to$ натуральные числа, определенная формулой $f(n) = n + 3$
g : целые числа $\to$ целые числа, определенная формулой $g(n) = n^2 + 10$
Найти $f \circ g(7)$ и $g \circ f(3)$.

9. Та же задача, что в № 8 , но вместо первой функции рассматривается функция из целых чисел в целые, определенная той же формулой.

10. Указать вложения, наложения и взаимно-однозначные функции среди
а/ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n^2 + 1$
б/ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n - 1$
в/ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n + 1$ при $2 \le n \le 5$, $f(6) = 1$, $f(n) = n$ $(n > 6)$
г/ $f: \{0,1,2\} \to \{0,1,3\}$ $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$
д/ $f: \{0,1,2\} \to \{0,1,2,3\}$ $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$

11. Для тех функций из задачи 10, которые являются взаимно-однозначными, указать обратные.

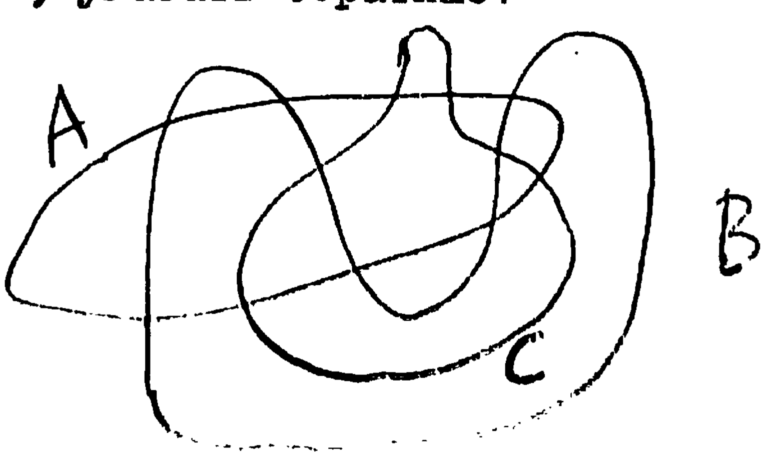


РИСУНОК К ЗАДАЧЕ N 3

РАВНОМОЩНОСТЬ И НЕРАВНОМОЩНОСТЬ : контрольная работа.

1. Следует ли из условия а/условие б/ и следует ли из условия б/ условие а/ , если а/ и б/ есть следующие условия:

   а/ A равномощно B   б/ $A \setminus B$ равномощно $B \setminus A$

2. Пусть A -множество всех натуральных чисел, в десятичной записи которых встречается цифра 9. Счетно ли A ? Счетно ли $\mathbb{N} \setminus A$?

3. Верно ли, что если A бесконечно, а B конечно, то

   $A \setminus B$ равномощно A ? /Ср.задачу 11 а основного листка/

4. Верно ли, что если A бесконечно, а B счетно, то

   $A \setminus B$ равномощно A ? /Ср. задачу 11 б основного листка/

5. Какой случай из числа 1, 2а-2г /см. листок "Неравномощность"/ имеет место, если A -множество всех четных натуральных чисел, а B - множество всех последовательностей из четных натуральных чисел ?

6. Счетно ли множество всех последовательностеи из натуральных чисел /например, 0,0,0,... и 1,2,3,4,... -такие последовательности/?

7. /Примечание. В этой задаче разрешается пользоваться всеми утверждениями, сформулированными в той или иной форме во всех обязательных и всех дополнительных листках/

   А. Равномощны ли множество задачи 6 и множество всех подмножеств множества целых чисел ?

   Б. Равномощно ли множество всех функций из множества действительных чисел в множество действительных чисел множеству всех подмножеств множества действительных чисел ?

Контрольная работа по теме "Принцип Дирихле"

1а. Четырём людям роздали орехи, причём каждый получил от одного до двух орехов. Докажите, что каким-то двум людям роздали одинаковое число орехов.

1б. Тот же вопрос, если людей было двое и было каждому роздано от одного до трёх орехов.

1в. Каждому из 500 человек роздано от 1 до 1000 орехов.

1г. Каждому из 500 человек роздано от 1 до 250 орехов.

2а. Из любых четырёх чисел всегда можно выбрать два, разность которых делится на три.

2б. Из любых ТРЕХ чисел всегда можно выбрать два, разность которых делится на 4.

2в. Из любых 100 чисел всегда можно выбрать два, разность которых делится на 500.

2г. Из любых 200 чисел всегда можно выбрать два, разность которых делится на 100.

3а. Если трём людям роздано 2 ореха, то у НЕКОТОРЫХ двух из них будет одинаковое число орехов.

3б. Тот же вопрос, но трём людям роздано три ореха.

3в. Трём людям роздано четыре ореха.

3г. Десяти людям роздано 80 орехов.

3д. Десяти людям роздано 30 орехов.

4а. Вы разрабатываете код Морзе для языка из пяти букв, т.е. каждой букве сопоставляете непустую последовательность из точек и тире. Докажите, что хотя бы одна буква будет закодирована не менее, чем тремя знаками.

4б. Язык состоит из семи букв. Вопрос тот же.

4в. Язык состоит из шести букв. Вопрос тот же.

4г. Язык состоит из 30 букв. Докажите, что хотя бы одна буква будет закодирована не менее, чем пятью знаками.

4д. Язык состоит из 40 букв. Вопрос тот же, что и в 4г.

4е. Язык состоит из 50 букв. Вопрос тот же, что и в 4г.

5а. Имеется несколько шаров, один из них радиоактивен. За одну проверку при помощи счётчика Гейгера можно узнать, имеется ли в данной куче шаров радиоактивный. Можно ли из десяти шаров за три проверки найти радиоактивный шар?

5б. А из 20-ти шаров за 5 проверок?

6а. На некотором футбольном турнире согласно регламенту каждая команда должна сыграть с каждой по одному разу. В турнире участвуют 18 команд. Доказать, что ~~[illegible]~~ найдутся три команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

(В ЛЮБОЙ МОМЕНТ ТУРНИРА)

Контрольная работа по теме "Принцип Дирихле" /продолжение/.

6б. Доказать, ~~что~~ [redacted] в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

7а. Доказать, что из 25-ти чисел, каждое из которых меньше 40 всегда можно выбрать два, отношение которых – степень числа 2.

7б. Из семи чисел, каждое из которых меньше I5 можно выбрать два отношение которых – степень числа 2.

* 8. Выпуклый I977-угольник разбит на I976 треугольников. Доказать, что найдётся линия, разрезая по которой, можно отрезаать один треугольник.

* 9а. Доказать, что если $A \subset \mathbb{R}$ – несчётное множество, то существуют два таких числа, $a_1; a_2 \in A$, что $a_2 - a_1$ -рационально.

* 9б. То же, но "$a_2 - a_1$ -рационально" заменить на "$a_2 - a_1$ -иррационально".

1а	1б	1в	1г	2а	2б	. . . .
						- - - -

1) В этой работе требуется дать ~~только ответы~~ в виде таблицы (см. рис.), где нижние клетки следует заполнить + и – :

Если в задаче спрашивается: "можно ли ..." то надо ставить "+", если можно, и "–", если нет.

Если написано: "Доказать, что ....", то надо ставить "+", если задача поставлена правильно, т. е. [redacted] предлагаемое для доказательства утверждение верно, и "–" иначе.

2) Трудность задач возрастает;

Помечены звездочкой задачи, требующие специальных знаний (из геометрии и теории множеств)