Математическая индукция.

1. Принцип математической индукции. Пусть $A(n)$ - утверждение, зависящее от $n$ / например, $n^2+2>10n$ или "среди всех $n$ -угольников с периметром 1 правильный имеет максимальную площадь"/, где $n$ -натуральное число. Пусть доказано:

   1. $A(1)$
   2. Из $A(n)$ следует $A(n+1)$

   Тогда мы будем считать доказанным, что при всех $n$ $A(n)$.

2. Варианты принципа математической индукции.

   А. Если вместо 1 доказано $A(k)$ для некоторого $k$ и доказано 2, то $A(n)$ верно при всех $n \geqslant k$.

   Б. Пусть доказано $A(1)$ и при $n \geqslant 2$ $A(n)$ выведено в предположении, что верно $A(k)$ при всех $k<n$. Тогда $A(n)$ верно для любых $n$.

3. Упражнения. / В задачах, помеченных o, требуется тот уровень строгости, какого требуют от Вас на уроках геометрии/

Докажите: а/ $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $n$ -натуральное

б/ $1+q+\ldots+q^n=(q^{n+1}-1)/(q-1)$; $n$ -натуральное, $q$ -веществ.

в/ $(1+p)^n \geqslant 1+np$ $p$ -вещественное $>-1$, $n$ -натуральное

o г/ Сумма всех внутренних углов в $(n+2)$-угольнике равна $180^\circ \cdot n$

д/ $2^n \leqslant n!$ при $n \geqslant 5$ / $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ /

o е/ Длина ломаной между двумя точками больше отрезка, их соединяющего

o ж/ $n$ прямых на плоскости, никакие две из которых не параллельны и такие, что в каждой точке пересекается не более 2 прямых, делят плоскость на

$$1+\frac{n(n+1)}{2}$$ частей.

o з/ Если выпуклый многоугольник содержится в некотором другом /невыпуклом, может быть/, то периметр первого не превосходит периметра второго.

и/ Последовательность чисел формируется так: два первых выбираются произвольно, а каждое следующее берется равным сумме всех предыдущих. Доказать, что если два первых числа четны, то и все числа последовательности четны.

* к/ Пусть A -множество, $*$ -операция, которая каждым двум элементам $a_1$, $a_2$ сопоставляет $a_1 * a_2$. Пусть известно, что эта операция удовлетворяет закону ассоциативности: $(a_1*a_2)*a_3 = a_1*(a_2*a_3)$

Доказать, что тогда выполнен "обобщенный закон ассоциативности": если два выражения $x$ и $y$ отличаются лишь расстановкой скобок, то они всегда равны. /Например, всегда равны выражения

*) ЭТА ЗАДАЧА ЯВЛЯЕТСЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ

$R_1=((a_1*a_2)*(a_3*a_1))$; $R_2=(((a_1*a_2)*a_3)*a_1)$ /

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ : дополнительные задачи.

1. Доказать с использованием принципа математической индукции принцип "наименьшего натурального числа":

   Всякое непустое множество натуральных чисел M имеет наименьший элемент / т.е. такое число $m$, что: а/ $m \in M$ и б/ если $m_1 \in M$, то $m \leqslant m_1$/

2. Вывести варианты принципа математической индукции из основного принципа.

3. Показать, что из принципа наименьшего целого числа следует принцип математической индукции.

4. Введем на множестве пар натуральных чисел $\langle m, n \rangle$ /например, $\langle 0,1 \rangle$, $\langle 1,0 \rangle$, $\langle 0,0 \rangle$ –3 различных элемента такого множества/ такой "порядок":

   говорим, что $\langle m, n \rangle$ "меньше" $\langle m_1, n_1 \rangle$, если $m < m_1$ **или** $m = m_1$ и $n < n_1$.

   Например, $\langle 0,100 \rangle < \langle 1,0 \rangle$ и $\langle 1,7 \rangle < \langle 1,15 \rangle$, пара $\langle 0,0 \rangle$ меньше всех.

   Показать, что: а/ если а$<$в и в$<$с, то а$<$с.
   / а,в,с – пары натуральных чисел/

   б/ для любых а и в имеет место ровно одна из трех возможностей: а=в, а$<$в, в$<$а.

   в/ для этого множества справедлив принцип индукции в форме 2б основного листка:
   если известно $A(\langle 0,0 \rangle)$ и для всех а доказано $A(a)$ в предположении, что верно $A(в)$ для всех меньших в,

   то для всех пар а верно $A(a)$.

5. Биномиальные коэффициенты.
   Числа $C_n^k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ; $0 \leqslant k \leqslant n$
   определяются соотношениями: при всех $n$ $C_n^0 = C_n^n = 1$
   при всех $n$ и при всех $k = 1, 2, \ldots n-1$ $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

   Доказать: 1. Эти соотношения определяют числа $C_n^k$ однозначно.

   2. При всех $n$ и $k$ $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

   3. При всех $a, b, n$ $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n a^0 b^n$
   /Что это за формулы при $n = 2$ и $n = 3$ ?/

   4. $C_n^k$ = число различных $k$ -элементных подмножеств $n$ -элементного множества

6. Доказать неравенство о среднем арифметическом и геометрическом.

   Если $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, то

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$$

## Аксиома полноты. /1/

Мы в своем изложении математического анализа до сих пор уклонялись от вопросов, связанных с так называемой аксиомой полноты. Это – некоторое свойство множества действительных чисел, чтоб его доказать, нужно детально знать, ч т о  т а к о е действительное число. Например, можно как следует развить теорию действительных чисел как теорию бесконечных десятичных дробей, определить сложение и умножение таких дробей и т.д. После этого это утверждение можно будет доказать. Вместо этого мы поступим иначе: мы примем это утверждение без доказательства и будем применять его при решении задач.

Аксиома полноты. Пусть $A$ и $B$ – 2 подмножества $\mathbb{R}$ и $A$ лежит "левее" $B$, то есть если $a \in A$ и $b \in B$, то $a \leq b$. Тогда существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что оно "разделяет" $A$ и $B$ : $A \leq \alpha \leq B$ в том смысле, что для всех $a \in A$ верно $a \leq \alpha$, а для всех $b$ из $B$ верно $\alpha \leq b$.

Оказывается, что в некоторых случаях мы можем доказать эту аксиому. В этом и состоят наши первые задачи.

I. Докажите, что если в условиях аксиомы полноты у А и В есть общий элемент, то этот общий элемент и будет требуемым "разделяющим" числом.

2. Докажите, что если в В есть наименьший элемент, то этот наименьший элемент и будет требуемым "разделяющим" числом.

3. Докажите, что если в А есть наибольший элемент, то этот наибольший элемент и будет требуемым "разделяющим" числом.

Таким образом, единственный случай, в котором мы не можем доказать аксиому полноты и вынуждены принимать её без доказательства,- это случай, когда А не имеет наибольшего элемента, а В не имеет наименьшего элемента.

Говоря содержательно, эта аксиома утверждает, что в множестве действительных чисел нет "дыр". Например, в множестве рациональных чисел эта аксиома неверна.

4. Докажите, что если в формулировке аксиомы полноты заменить /повсюду/ множество действительных чисел на множество рациональных чисел, то эта аксиома станет неверна. /Рассмотрите такие А и В: А – множество всех положительных рациональных чисел, квадрат которых меньше 2, В – множество всех положительных рациональных чисел, квадрат которых больше 2. Докажите, что если бы существовало разделяющее их р а ц и о н а л ь н о е число, то его квадрат был бы равен 2. А такого не бывает!

/Пока эта задача, вероятно, покажется трудной, вернитесь к ней после задач 5-8 /

Аксиома полноты : продолжение /2/

Напоминаем Вам , что до сих пор мы не доказали, что $\sqrt{2}$ существует. Это и не удивительно, ибо это доказательство требует использования аксиомы полноты. Сейчас мы приведем это доказательство, чтобы показать, как работает аксиома полноты. (В крайнем случае можно его пропустить и решать далее с № 11

Для этого рассмотрим такие множества: А – множество всех положительных действительных чисел, квадрат которых меньше 2 , В – множество всех положительных действительных чисел, квадрат которых больше 2.

5. Докажите , что выполнены условия аксиомы полноты: А лежит "левее" В.

Ясно, что множества А и В не пересекаются. Изучим вопрос о наименьших и наибольших элементах.

6. Докажите, что в множестве В нет наименьшего элемента. Указание. Пусть $b \in B$ , $b^2 > 2$ . Запишем $b^2 = 2 + p$, где $p$ – некоторое положительное число. Покажем, что если $\varepsilon$ –достаточно малое положительное число, то $b - \varepsilon$ также принадлежит В.

Этим мы установим, что $b$ – не наименьший. Нам надо:
$(b-\varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$ Покажите, что если $2b\varepsilon < p$ ,т.е. $\varepsilon < p/2b$ , то $(b-\varepsilon)^2 < 2$ .

7. Докажите, что множество $A$ не имеет наибольшего элемента. Указание. Пусть $a \in A$ , то есть $a^2 < 2$ . Докажите, что при малых $\varepsilon$ число $a + \varepsilon$ тоже принадлежит $A$ , то есть $(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$ . Установите, что если $2a\varepsilon < \frac{2-a^2}{2}$ и $\varepsilon^2 < \frac{2-a^2}{2}$ , то $(a+\varepsilon)^2 < 2$ . Почему можно найти положительное $\varepsilon$ , удовлетворяющее обоим неравенствам ?

Итак, мы знаем, что в нашем случае А и В не пересекаются, А не имеет наибольнего элемента, В не имеет наименьшего элемента. Так что доказать аксиому полноты в этом случае мы не можем и остается только применить ее без доказательства. Итак, пусть $\alpha$ –разделяющее число.

8. Докажите , что $\alpha > 0$ , $\alpha \notin A$ , $\alpha \notin B$ . Указание. $\alpha > 0$ получите из $A \leq \alpha$ . Если бы $\alpha \in A$ , то $\alpha$ было бы не наибольшим в А и существовало бы $a \in A$ такое, что $\alpha < a$ . Чему это противоречит ? Аналогично поступайте с В.

9. Докажите, наконец, что $\alpha^2 = 2$ . /Используйте 8/

10. Докажите, что существует $\sqrt{3}$ .

Получим теперь несколько теорем о действительных числах, доказательства которых используют аксиому полноты.

Аксиома полноты : продолжение /3/

II. Докажите, что всякое непустое множество А имеет <u>точную верхнюю границу</u> $x$. Это означает, что: I. А ограничено сверху числом $x$. 2. $x$ -минимальное из чисел, ограничивающих А сверху: если А ограничено сверху числом $y$, то $y \geqslant x$.

Указание. Обозначьте через В множество верхних границ для А /множество всех чисел, ограничивающих А сверху/. Примените аксиому полноты.

I2. Сформулируйте определение точной нижней границы и докажите аналогичную теорему для точных нижних границ.

I3. Возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет предел. Указанием. Этим пределом будет точная верхняя грань множества значений последовательности.

I3. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для убывающих последовательностей.

I4. Пусть $a$ -возрастающая последовательность, $b$ -убывающая последовательность, при всех $n$ имеет место неравенство: $a_n \leq b_n$.

Покажите, что существует $\alpha$ такое, что $a_n \leq \alpha \leq b_n$ при всех $n$.
Докажите, что если $b-a \to 0$, то $a \to \alpha$ и $b \to \alpha$.

I5. Пусть $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ -последовательность вложенных отрезков; докажите, что пересечение их всех непусто: $M_1 \cap M_2 \cap \ldots$ (бескон.) $\neq \varnothing$

Наконец, мы сформулируем две более трудные задачи:

I. /Теорема о компактности отрезка/. Пусть отрезок $I$ вложен в объединение семейства интервалов. Докажите, что из этого семейства интервалов можно так выбросить часть этого семейства, что останется конечное семейство интервалов, [redacted] объединение которого по-прежнему содержит весь отрезок.

2. /Критерий Коши/. Последовательность $a$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ |a_m - a_n| < \varepsilon$

Докажите, что сходящаяся последовательность фундаментальна /это просто/. Докажите, что фундаментальная последовательность сходится.

---

Краткий список различной литературы на эту тему.

А.А.Кириллов. Пределы /Библиотека физматшколы/. Элементарное введение; содержит много задач нашего типа с решениями, Умение решить все задачи /кроме помеченных звездочкой/ из этой книги является совершенно необходимым условием чтения любой другой. Очень рекомендуем купить!

Н.Виленкин, С.Шварцбурд. Математический анализ. Также разумная, не очень сложная книга, ее можно читать примерно подряд.

Г.Фихтенгольц К[redacted] Курс мат. анализа /3тома, т.I/. Толстая книга, в значительной степени отличается от нашей программы.

Тот же автор: Основы мат.анализа. Тоже существ. отличается.

У.Рудин. Основы м.а.. Очень современная книга, хороша для весьма квалифицированного читателя.