

А н а л и з I 7 в е к а ,

ИЛИ

Математические методы школьной механики

1. Производная, мгновенная скорость, касательная
2. Учимся дифференцировать
3. Зачем нужно дифференцировать?
4. Интегрирование
5. Интеграл в физике

...Исчисление бесконечно малых... было почти полностью создано в течение одного столетия, и вот уже около трёх веков постоянного применения не смогли притупить этот ни с чем не сравнимый инструмент.

Н. Бурбаки

Введение

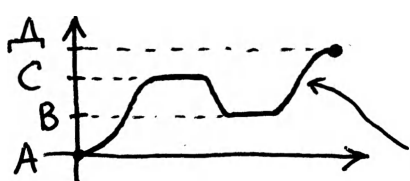
История развития математического анализа ("исчисления бесконечно малых") весьма своеобразна. Его основатели И. Ньютон (1643 - 1727) и Г. Лейбниц (1646 - 1716) жили в 17 - 18 веках, и к 19 веку здание математического анализа было уже весьма обширно. Однако лишь в 19 веке оно было снабжено прочным фундаментом. (Построение этого фундамента прежде всего связано с именем французского математика О. Коши (1789 - 1857).)

Обычно при изучении анализа начинают как раз с этого фундамента (теории действительных чисел, пределов и т.п.). Без него, конечно, не обойтись. Однако мы, следуя истории, начнем с изложения анализа в духе 17 века, отложив заботу о строгости на более позднее время. Если угодно, все нижеследующее можно воспринимать как часть курса физики.

I. Производная, мгновенная скорость, касательная.

А. Мировые линии.

Пусть точка движется по прямой, $x(t)$ - её координата в момент времени t . Это движение удобно изображать, рисуя график функции $t \mapsto x(t)$.



Автобус выезжает из А, останавливается в С, поворачивает обратно, стоит в В и наконец приезжает в Д.

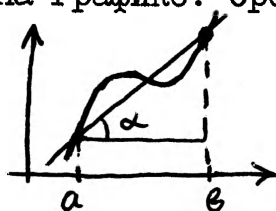
"мировая линия автобуса"

Часто такое изображение удобно.

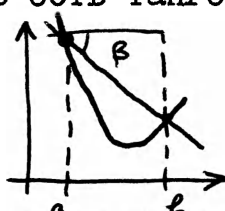
Б. Средняя скорость.

Пусть точка движется по прямой, $x(t)$ - её координата в момент t . Средней скоростью на отрезке $[a, b]$ называется отношение $(x(b) - x(a)) / (b - a)$

На графике: средняя скорость есть тангенс угла наклона секущей



средняя
скорость
= $\operatorname{tg} \alpha$



средняя
скорость
= $-\operatorname{tg} \beta$

Равномерное движение со скоростью v - такое движение, что на любом отрезке средняя скорость равна v . Записав $(x(t) - x(0)) / (t - 0) = v$, получим: $x(t) = x(0) + vt$. Нетрудно проверить, что при движении по этой формуле средняя скорость действительно равна v .

В. Мгновенная скорость.

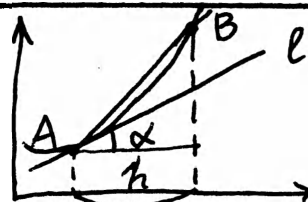
Пусть t - некоторый момент времени. Рассмотрим среднюю скорость на отрезке $[t, t+h]$. Она зависит от h . Будем уменьшать отрезок, приближая h к 0. Если при этом средняя скорость приближается к какому-то числу v , то это v называется мгновенной скоростью в момент t .

мгновенная скорость в момент t = предел $\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$ при $h \rightarrow 0$

Пример. Движение происходит по формуле $x(t) = t^2$. Найти мгновенную скорость в момент 1.

Решение. $(x(1+h) - x(1)) / h = ((1+h)^2 - 1) / h = 2 + h$; при малых h это близко к 2. Ответ: 2.

На рисунке: при $h \rightarrow 0$ секущая AB приближается к "касательной" l , а её угол наклона - к углу наклона α касательной. Поэтому:



мгновенная скорость = тангенс угла наклона касательной

Г. Производная.

Всё сказанное о функции x можно, разумеется, отнести к произвольной функции из \mathbb{R} в \mathbb{R} . Приходим к такому определению:

Пусть f - функция с действительными аргументами и значениями.

Производной функции f в точке a называется предел $[f(a+h) - f(a)] / h$ при $h \rightarrow 0$. Он обозначается $f'(a)$.

Таким образом, можно сказать, что мгновенная скорость есть производная координаты.

Функция $a \mapsto f'(a)$ называется производной функцией.

Д. Формула $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

Согласно определению, имеет место приближенное равенство $f'(a) \approx [f(a+h) - f(a)] / h$ (тем более точное, чем меньше h).
Другими словами

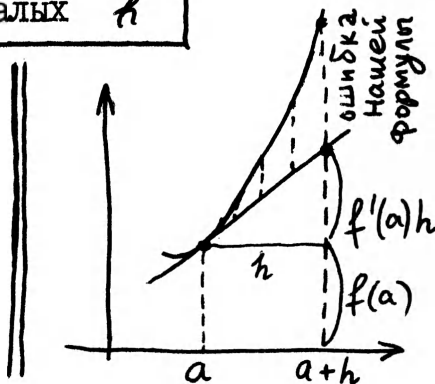
$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ при малых h

Можно, однако, записать и более простую приближенную формулу: $f(a+h) \approx f(a)$ при малых h . Чем наша формула лучше? Она более точна! В самом деле,
 $[f(a+h) - f(a)] / h = f'(a) + (\text{малое});$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + (\text{малое}) \cdot h$$

Таким образом, погрешность нашей формулы не просто мала при малых h (как для формулы $f(a+h) \approx f(a)$), но мала по сравнению с h , составляет малую долю h .

Это записывается так: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ где $o(h)$ означает "малое по сравнению с h ". (Сравните с $f(a+h) = f(a) + o(1)$ - здесь ошибка мала по сравнению с 1.)



Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{1.001}$.

Решение. При $f(x) = x^2$ имеем $(1+h)^2 = f(1+h) \approx f(1) + f'(1)h = 1 + 2h$. Поэтому если $(1+h)^2 = 1.001$, то $1+2h \approx 1.001$, откуда $h \approx 0.0005$. Ответ. $\sqrt{1.001} \approx 1.0005$

Наша формула может быть принята за определение:

число C - производная функции f в точке a ,
если $f(a+h) = f(a) + Ch + o(h)$

В самом деле, если это так, то $[f(a+h) - f(a)] / h = C + o(h)/h$, а $o(h)/h \approx 0$ по определению символа $o(h)$.

2. Учимся дифференцировать

Дифференцирование - нахождение производной. Мы продемонстрируем некоторые приемы дифференцирования на примерах.

А. Пусть f - константа: $f(x) = C$ для всех x . Тогда $[f(a+h) - f(a)]/h = 0$ и $f'(a) = 0$ для всех a .

Б. Пусть $f(x) = x$. Тогда $[f(a+h) - f(a)]/h = 1$ и $f'(a) = 1$ для любого a .

В. Пусть $f(x) = x^2$ (Мы уже дифференцировали эту функцию в точке 1.) Имеем: $[f(a+h) - f(a)]/h = [(a+h)^2 - a^2]/h = 2a+h \rightarrow 2a$ (при $h \rightarrow 0$). Поэтому $f'(a) = 2a$.

Другой способ: $f(a+h) = (a+h)^2 = \underbrace{a^2}_{f(a)} + \underbrace{(2a)}_{f'(a)} \cdot h + \underbrace{h^2}_{o(h)}$

Г. Пусть $f(x) = x^3$.

(1 способ) $f(a+h) = (a+h)(a+h)(a+h) = \underbrace{a^3}_{f(a)} + \underbrace{3a^2}_{f'(a)}h + \underbrace{(\text{что-то})}_{o(h)}h^2$

Ответ: $f'(a) = 3a^2$

(2 способ) Мы пользуемся тождеством $(y-x)(y^2+xy+x^2) = y^3-x^3$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{(a+h) - a} = a^2 + a(a+h) + (a+h)^2 \rightarrow 3a^2.$$

(3 способ) Знак приближенного равенства означает, что мы пренебрегаем членами, имеющими величину $o(h)$ (малыми по сравнению с h). $f(a+h) = (a+h)^2(a+h) \approx (a^2 + 2ah)(a+h) \approx a^3 + 2a^2h + a^2h + 2ah^2 \approx a^3 + 3a^2h$. Поэтому $f'(a) = 3a^2$.

Д. Функция $f(x) = x^n$.

(1 способ) $f(a+h) = (a+h) \dots (a+h) = \underbrace{a^n}_{f(a)} + \underbrace{na^{n-1}}_{f'(a)}h + \underbrace{(\text{что-то})}_{o(h)}h^2$.

Ответ: $f'(a) = na^{n-1}$.

(2 способ) Применим тождество $(y^n - x^n)/(y - x) = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^n - a^n}{(a+h) - a} = (a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + \dots + a^{n-1} \rightarrow na^{n-1}.$$

(3 способ) Докажем, что если $f(x) = x^n$, то $f'(a) = na^{n-1}$ индукцией по n (т.е. сначала для $n=1$, потом для $n=2$ и т.д.)

Пусть для $n=k-1$ это уже доказано. Пусть $f(x) = x^k$. Тогда $f(a+h) = (a+h)^k = (a+h)^{k-1}(a+h) \approx [a^{k-1} + (k-1)a^{k-2}h](a+h) \approx a^k + (k-1+1)a^{k-1}h$, что и требовалось.

Покажем, как дифференцировать функции, полученные из других с помощью сложения и умножения на число.

Е. Умножение на число. Пусть $f(x) = Cg(x)$ при всех x . (C - некоторое число). Тогда $f(a+h) = Cg(a+h) \approx C(g(a) + g'(a)h) = \underbrace{Cg(a)}_{f(a)} + \underbrace{Cg'(a)}_{f'(a)}h$. Отсюда $f'(a) = Cg'(a)$.

Другой способ: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = C \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \rightarrow C \cdot g'(a)$.

Ж. Сумма. Пусть $f(x) = g(x) + k(x)$. Тогда $f(a+h) = g(a+h) + k(a+h) \approx g(a) + k(a) + (g'(a) + k'(a))h$
 Отсюда $f'(a) = g'(a) + k'(a)$.

Теперь мы знаем достаточно, чтобы продифференцировать любой многочлен: согласно Ж, достаточно продифференцировать отдельно каждое слагаемое с помощью Д и Е.

З. Пример. Пусть $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ Найдем Дифференцируя функции $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$ и складывая их производные с соответствующими коэффициентами, находим: $f'(a) = 3a^2 + 2 \cdot 2a + 2 \cdot 1 + 0 = 3a^2 + 4a + 2$.

И. Пусть $f(x) = 1/x$. Найдем $f'(a)$.

(I способ, "физический"). Если $f(x) = x^n$, то $f'(x) = nx^{n-1}$; подставляя (незаконно!) $n = -1$, имеем $f'(a) = (-1) \cdot a^{-2} = -1/a^2$

(2 способ) $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a(a+h)} \rightarrow -\frac{1}{a^2}$

К. Какие еще функции мы знаем? По существу только одну: извлечение корня. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Найдем $f'(a)$.

(I способ) $[f(a+h) - f(a)]/h = [\sqrt{a+h} - \sqrt{a}]/h =$

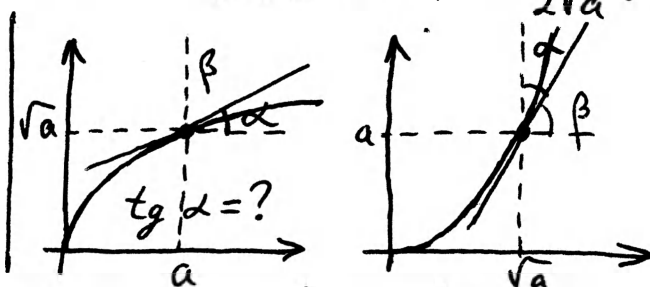
$$\frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{(a+h) - a}{h \cdot (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(2 способ, "физический") Мы доказали, что если $f(x) = x^n$, то $f'(a) = na^{n-1}$. Подставим (незаконно!) $n = 1/2$.

(3 способ) Пусть $\sqrt{a+h} \approx \sqrt{a} + Ch$; возводя в квадрат, имеем: $a+h \approx a + 2C\sqrt{a}h$, откуда $2C\sqrt{a} = 1$, $C = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

(4 способ)

Посмотрим на рисунок с графиком корня с другой стороны бумаги и увидим график функции $t \mapsto t^2$, про которую мы всё знаем: $\text{tg } \beta = 2\sqrt{a}$ (производная $t \mapsto t^2$ в \sqrt{a} равна $2\sqrt{a}$), $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.



Приведем теперь несколько более сложных правил для отыскания производной.

Л. Производная произведения. Пусть $f(x) = g(x) \cdot k(x)$. Тогда $f'(a) = g'(a)k(a) + g(a)k'(a)$. В самом деле, $f(a+h) = g(a+h)k(a+h) \approx [g(a) + g'(a)h][k(a) + k'(a)h] \approx g(a)k(a) + [g'(a)k(a) + g(a)k'(a)]h$ (член с h^2 , как всегда выбрасываем: он мал по сравнению с h).

С помощью этого правила можно заново найти производную

Функции $g(x) = 1/x$. В самом деле, пусть $k(x) = x$; тогда $f(x) = g(x) \cdot k(x) = 1$. Применяя правило, получаем, что

$$0 = f'(a) = g'(a)k(a) + g(a)k'(a) = g'(a) \cdot a + \frac{1}{a} \cdot 1,$$

откуда $g'(a) = -1/a^2$.

М. Производная функции $1/g$. Пусть $f(x) = 1/g(x)$.
(1 способ) Если $f(x) = 1/g(x)$, то $f(x)g(x) = 1$. Согласно правилу дифференцирования произведения, $0 = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, откуда $f'(a) = -f(a)g'(a)/g(a) = -g'(a)/(g(a))^2$.

(2 способ) Пусть $f(x) = 1/g(x)$. Тогда

$$f(a+h) = 1/g(a+h) \approx 1/(g(a) + g'(a)h)$$

Производную для функции $t \mapsto 1/t$ мы знаем; используя это, можно написать:

$$\frac{1}{c+q} \approx \frac{1}{c} + \left(-\frac{1}{c^2}\right)q \quad \text{при малых } q;$$

при $c = g(a)$ и $q = g'(a)h$ (что действительно мало!) имеем

$$f(a+h) \approx \left(1/g(a)\right) + \left(-1/(g(a))^2\right) \cdot g'(a)h = f(a) + \left[-g'(a)/(g(a))^2\right]h. \quad \text{Отсюда } f'(a) = -g'(a)/(g(a))^2$$

Н. Производная частного. Если $f(x) = g(x)/k(x)$, то

$$f'(a) = \frac{k(a)g'(a) - k'(a)g(a)}{(k(a))^2}$$

Эта формула получается комбинацией двух предыдущих: представим

$$f(x) \text{ как } g(x) \cdot [1/k(x)]$$

О. Производная композиции. Пусть $f = g \circ k$, то есть $f(x) = g(k(x))$. Тогда $f(a+h) = g(k(a+h)) \approx g(k(a) + k'(a)h)$.

Воспользуемся формулой $g(c+q) \approx g(c) + g'(c) \cdot q$

при $c = k(a)$, $q = k'(a)h$. Получим

$$f(a+h) = \dots \approx g(k(a)) + g'(k(a)) \cdot k'(a)h.$$

$$\text{Отсюда } f'(a) = g'(k(a)) \cdot k'(a).$$

П. Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x^3+5}$. Тогда $f(x) = g(k(x))$, где $k(x) = x^3 + 5$, $g(t) = \sqrt{t}$. По формуле для производной композиции

$$f'(a) = g'(k(a)) \cdot k'(a) = \frac{1}{2\sqrt{k(a)}} \cdot k'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^3+5}} \cdot (3a^2).$$

Последовательно применяя наши правила, можно продифференцировать практически любую функцию, заданную формулой.

3. Зачем нужно дифференцировать?

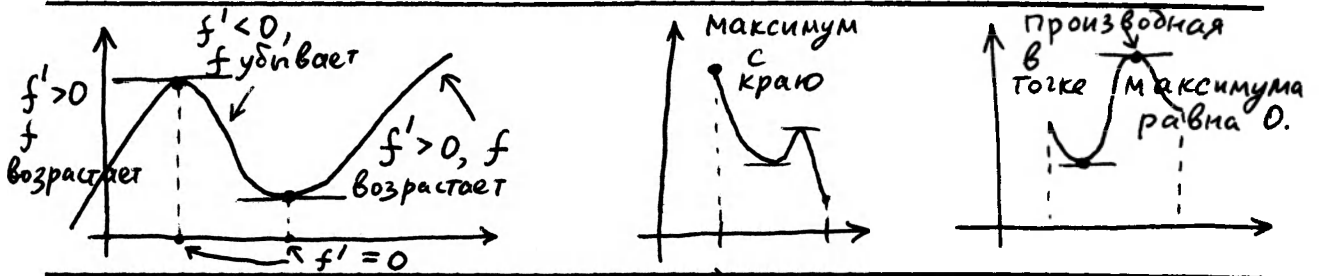
А. Основные правила.

Производную можно использовать для отыскания максимумов и минимумов, а также для диагностики возрастания и убывания функций. Это делается с помощью следующих правил:

Правило 1. Функция f возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда её производная в каждой точке этого отрезка неотрицательна (соответственно неположительна). (Напомним: возрастание функции f означает, что из $x < y$ следует $f(x) \leq f(y)$.)

Правило 2. Если f' положительна (отрицательна) на отрезке $[a, b]$, то функция f строго возрастает (соответственно убывает) на нем (т.е. из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$).

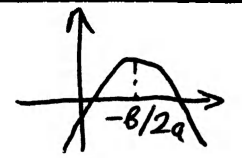
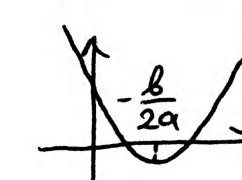
Правило 3. Пусть функция f на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее значение в точке $c \in [a, b] : f(c) \geq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда либо $f'(c) = 0$, либо c - один из концов отрезка. (Аналогично для наименьшего значения.)



Поскольку мы сейчас изображаем из себя физиков, то правила 1 - 3 сформулированы не точно, и их истинный ^(СМЫСЛ) можно понять лишь наблюдая за тем, как опытные люди их применяют. Поэтому приведем несколько примеров.

Б. Исследование квадратного трехчлена.

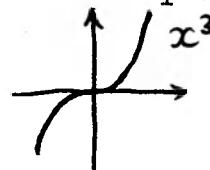
Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f'(x) = 2ax + b$. Видно, что $f'(x) = 0$ при $x = -\frac{b}{2a}$; если $a > 0$, то f' в этой точке меняет знак с - (слева) на + (справа), если $a < 0$, то наоборот. Согласно нашим правилам, получаем:

при $a < 0$: f строго возрастает на $]-\infty, -b/2a[$ строго убывает на $] -b/2a, +\infty[$ в $-b/2a$ - максимум	
при $a > 0$: f строго убывает на $]-\infty, -b/2a[$ строго возрастает на $] -b/2a, +\infty[$ в $-b/2a$ - минимум	

Это полностью согласуется с результатами, которые можно получить обычным способом (выделяя полный квадрат).

В. Многочлены третьей степени.

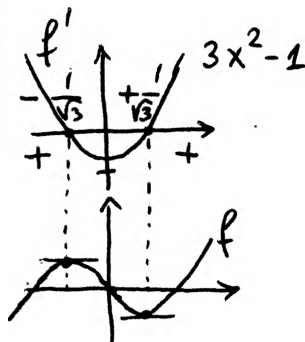
Проанализируем с помощью наших правил функцию $f(x) = x^3$. Её производная в точке x равна $3x^2$ т.е. всюду неотрицательна и равна 0 в точке 0. Следовательно, функция f возрастающая. Будет ли она строго возрастающей? Правило 2 применить нельзя, так как $f'(0) = 0$. Но тем не менее это так. Чтобы убедиться в этом, применим правило 2 отдельно к промежуткам $]-\infty, 0]$ и $[0, +\infty[$; наша функция строго возрастает на обоих промежутках, а значит, и всюду.



Еще один пример исследования многочлена

3-ей степени: $f(x) = x^3 - x$. Дифференцируем:

$f'(x) = 3x^2 - 1$. Таким образом, на $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ и $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$ наша функция (f) возрастает, а на $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ - убывает.



Пусть нам теперь нужно найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[-1, 2]$. Согласно правилу 3, их нужно искать среди концов отрезка и точек, где $f' = 0$. Так как $f(-1) = 0$, $f(-1/\sqrt{3}) = 2/3\sqrt{3}$, $f(1/\sqrt{3}) = -2/3\sqrt{3}$ и $f(2) = 7$, находим, что наибольшее значение равно 7 (в точке 2), а наименьшее равно $-2/3\sqrt{3}$ (в точке $1/\sqrt{3}$).

Г. Применения производной к отысканию максимумов, минимумов и доказательству неравенств.

Пример I. Какое наибольшее значение может принимать xy , если $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y = c$?

Решение. Нужно найти максимум функции $f: x \mapsto x(c-x)$ на отрезке $[0, c]$. Дифференцируя, находим, что $f'(x) = c - 2x$ и функция возрастает на $[0, c/2]$ и убывает на $[c/2, c]$. Максимум - в $c/2$, он равен $c^2/4$.

Впрочем, здесь мы имеем дело с квадратным трехчленом, так что дифференцирования можно было избежать. Эта задача по существу состоит в доказательстве неравенства $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$, извлекая корень, получаем $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$ (неравенство о среднем арифметическом и геометрическом).

Пример 2. Какое наименьшее значение может иметь $x+y$, если $x \geq 0$, $y \geq 0$, $xy = 1$?

Решение. Здесь речь идет о минимуме функции $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$ при $x > 0$. Дифференцируя ($f'(x) = 1 - 1/x^2$), убеждаемся,

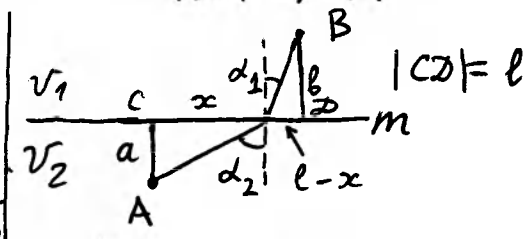
что на $]0, 1]$ она убывает, а на $[1, +\infty[$ возрастает. Следовательно, минимум достигается в 1 и равен 2.

Мы доказали неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (при $x > 0$); впрочем, оно следует из неравенства о среднем арифметическом и геометрическом.

Пример 3. Какое наименьшее значение принимает $x + y$, если $x^2 y = 1$, $x, y \geq 0$?

Решение. Дифференцируя функцию $f: x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$, находим, что $f'(x) = 1 - 2/x^3$, минимум - в точке $\sqrt[3]{2}$ и равен $\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{4}$. Эту задачу, впрочем, тоже можно свести к неравенству о среднем арифметическом и геометрическом с помощью искусственного приёма: условие $x^2 y = 1$ перепишем как $(x/2)(x/2)y = 1/4$; так как $\sqrt[3]{(x/2)(x/2)y} \leq (x/2 + x/2 + y)/3$, то $x/2 + x/2 + y \geq 3/\sqrt[3]{4}$ (что равно $\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{4}$, как легко проверить).

Пример 4 (закон Снеллиуса)
Найти самый быстрый путь из A в B, если скорость сверху от прямой m равна v_1 , а снизу v_2 .



Решение. Введя обозначения, указанные на рисунке, запишем время: $t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_2 + \sqrt{b^2 + (l-x)^2}/v_1$. Чтобы найти оптимальный путь, приравняем производную функции t нулю (правило 3):

$$0 = t'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{v_2} + \frac{-2(l-x)}{2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} \cdot \frac{1}{v_1}$$

Так как $x/\sqrt{a^2 + x^2} = \sin \alpha_2$, а $(l-x)/\sqrt{b^2 + (l-x)^2} = \sin \alpha_1$, получаем равенство, называемое "законом Снеллиуса", определяющее быстрейший путь:

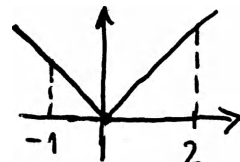
$$\boxed{\sin \alpha_1 / v_1 = \sin \alpha_2 / v_2}$$

(Снеллиус открыл его при изучении преломления света, который движется по быстрейшему пути.)

Д. Опасности.

Найдем минимум функции $f: x \mapsto |x|$ на отрезке $[-1, 2]$. Для этого продифференцируем её: при $x \geq 0$ имеем $f(x) = x, f'(x) = 1$, при $x \leq 0$ имеем $f(x) = -x, f'(x) = -1$. Поэтому производная в нуль не обращается и для отыскания минимума нужно сравнить значения на концах отрезка: $f(-1) = 1, f(2) = 2$. Ответ: наименьшее значение равно 1 и достигается в точке -1 .

Этот ответ, конечно, нелеп: на самом деле минимум в точке 0 и равен 0. В чем же дело?



Дело в том, что наша функция в точке 0 не имеет производной! Выражение $[f(0+h) - f(0)]/h$ равно + I при $h > 0$ и - I при $h < 0$ и предела при $h \rightarrow 0$ нет!

Мораль: при отыскании максимумов и минимумов нужно исследовать не только концы и точки, где производная равна 0, но и точки, в которых производной нет!

4. Интегрирование

Мы научились, зная зависимость координаты от времени, определять скорость. Теперь поставим обратную задачу. Пусть мы знаем скорость в любой момент времени; как определить координату?

Эта постановка задачи нуждается в небольшом уточнении. Зная только скорость, мы не можем определить координату: движение могло начаться в любой точке. Можно определить лишь изменение координаты за какой-то промежуток времени. Это мы и постараемся сделать.

А. Равномерное и равноускоренное движения.

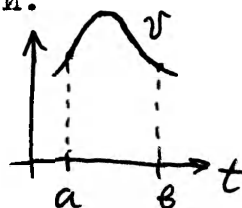
Пусть скорость постоянна и равна v . Нетрудно догадаться, что в этом случае изменение координаты за время t равно vt : $x(t) = x(0) + vt$. Дифференцируя функцию, заданную этой формулой, мы убеждаемся в том, что скорость действительно равна v . Так как $x(0)$ может быть произвольным, можно записать ответ в виде $x(t) = vt + c$, где c - произвольная константа.

Пусть теперь скорость не постоянна, а меняется пропорционально времени: $v(t) = at$. Как найти $x(t)$? Чему равно $x(t)$, если $x'(t) = at$? Вспомним, что при $x(t) = t^2$ мы имели $x'(t) = 2t$. Чтобы получить at вместо $2t$, надо умножить t^2 на $a/2$. Получаем $x(t) = \frac{at^2}{2}$ или (вспоминая, что движение может начаться в любом месте) $x(t) = at^2/2 + c$.

В этом примере нам повезло - мы вспомнили функцию, имеющую подходящую производную. А что делать, если это не удалось? Или если зависимость v от t задана не формулой, а, например, графиком?

Б. Перемещение - площадь под графиком скорости.

Пусть нам задан график зависимости скорости от времени. Нас интересует, какой путь прошло тело (точнее, насколько изменилась его координата) с момента $t = a$ до $t = b$.



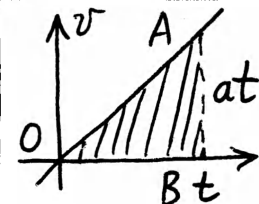
Чтобы определить это, будем считать, что скорость меняется не непрерывно, а скачками - но очень малыми: сначала в течение t_1 она равнялась v_1 , затем в течение t_2 она равнялась v_2 , ..., в течение t_n она равнялась v_n . Тем самым задача сводится к случаю равномерного движения: надо найти путь за каждый из отрезков времени и сложить их. Получится $v_1 t_1 + \dots + v_n t_n$.



Помня, что площадь прямоугольника со сторонами v_i и t_i равна $v_i \cdot t_i$, получаем, что пройденное расстояние равно площади под графиком скорости. Поскольку ступеньки можно выбрать сколь угодно малыми, это справедливо не только для ступенчатого изменения скорости, но и в общем случае.

Пройденный путь от $t = a$ до $t = b$ равен площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком скорости и вертикальными прямыми $t = a$ и $t = b$

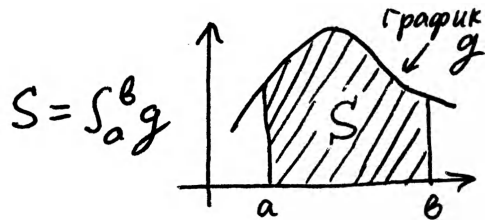
Для случая равноускоренного движения $v(t) = at$ и путь, пройденный к моменту t , равен площади треугольника OAB , т.е. $\frac{t \cdot at}{2} = at^2/2$.
Получаем тот же ответ, что и раньше.



В. Интеграл.

Все, что мы говорили о координате и скорости, можно сказать о любой функции и её производной.

Будем называть площадь фигуры, изображенной на рисунке, интегралом функции g по отрезку $[a, b]$ и обозначать её $\int_a^b g$

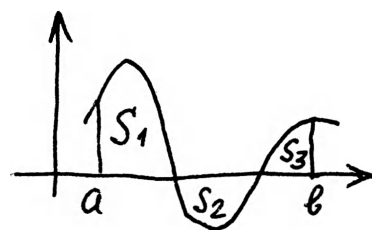


Тогда утверждение предыдущего пункта можно записать так:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'$$

Эта (важнейшая) формула называется формулой Ньютона - Лейбница.

Мы неявно предполагали, что функция g положительна. Если g принимает значения разных знаков, то интеграл нужно определить как сумму площадей с соответствующими знаками: $\int_a^b = S_1 + S_3 - S_2$ (см. рис.)



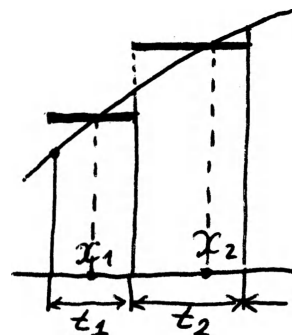
При таком определении интеграла формула Ньютона - Лейбница останется верной.

Г. Как найти интеграл?

Мы свели отыскание пути к нахождению площади под графиком скорости. Но как найти эту площадь? Можно вырезать нужную нам фигуру из (как можно более однородного) листа бумаги и взвесить её. Можно также воспользоваться уже известным нам приёмом.

Желая найти $\int_a^b f$, разобьём отрезок от a до b на много маленьких отрезков длиной t_1, \dots, t_n , в каждом из них выберем по точке x_i и будем считать, что на i -ом отрезке функция f постоянна и равна $f(x_i)$. Мы приходим к равенству

$$\int_a^b f \approx \sum f(x_i) \cdot t_i$$



которое можно сделать сколь угодно точным, уменьшая отрезки разбиения. Его правая часть называется интегральной суммой для стоящего слева интеграла.

Пример. Снова вернемся к равноускоренному движению. Пусть $g(t) = at$. Надо вычислить $\int_0^t g$. Разбивая $[0, t]$ на n равных частей $[0, t/n], [t/n, 2t/n], \dots$ и беря в качестве x_i левый конец соответствующего отрезка, получаем, что

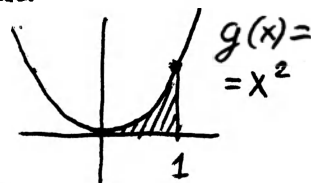
$$\sum f(x_i) \cdot t_i = (a \frac{0}{n} t + a \cdot \frac{1}{n} t + \dots) \cdot t/n = (at^2/n^2)(0+1+\dots+(n-1)) = (at^2/n^2)(n(n-1)/2) = \frac{at^2}{2} (1 - 1/n).$$

При больших n эта сумма примерно равна числу $at^2/2$, которое и есть точное значение интеграла.

Д. Отыскание площадей с помощью формулы Ньютона - Лейбница.

Мы можем с пользой применить формулу Ньютона - Лейбница и "в обратную сторону".

Пример. Найти заштрихованную на рисунке площадь под параболой, т.е. $\int_0^1 g$, где $g(x) = x^2$.



Решение. Так как $g = f'$ при $f: x \mapsto \frac{x^3}{3}$, то по формуле Ньютона - Лейбница $\int_0^1 g = \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 1/3$.

Таким образом, для нахождения площади под графиком функции g достаточно отыскать ее "первообразную", т.е. такую функцию f , что $f' = g$, и затем применить формулу Ньютона - Лейбница.

Это, в частности, легко сделать для любого многочлена: если $g(t) = a_n t^n + \dots + a_0$, то $f(t) = a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \dots + a_0 t$. Так находится площадь под графиком многочлена.

5. Интеграл в физике.

Мы приведем 3 примера применения интеграла в физике.

А. Рычаг.

Напомним два физических принципа, относящихся к рычагу.

1 (Равенство моментов) Для равновесия рычага на рисунке необходимо, чтобы $m_1 z_1 = m_2 z_2$.

2 (Аддитивность) Чтобы уравновесить два груза одновременно, нужно взять гирю, равную сумме гирь, необходимых, чтобы уравновесить каждый из них: $C = A + B$.

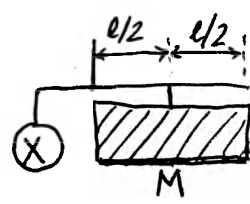
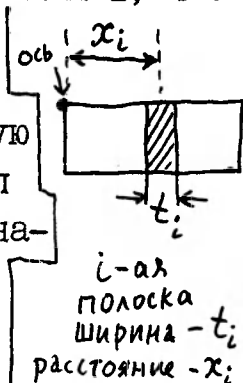
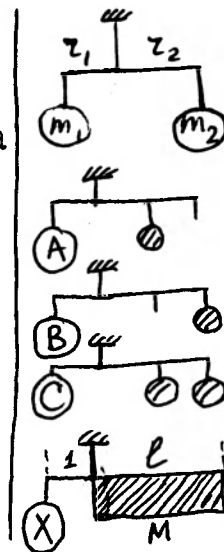
Пусть теперь к рычагу привешен однородный прямоугольник массы M со стороной l (вторая сторона, как мы увидим, не играет роли). Какой груз надо подвесить к другому плечу рычага на расстоянии l , чтобы его уравновесить?

Для решения этой задачи разобьем прямоугольник на полоски шириной t_1, \dots, t_n , уравновесим каждую из них (принцип 1) и сложим полученные веса (принцип 2). Расстояние от оси рычага до i -ой полоски обозначим x_i . (Разумеется, оно определено лишь с точностью до t_i , т.к. можно по-разному выбирать точку прикрепления i -ой полоски. Но мы считаем

t_i очень малым, так что это все равно.) Масса i -ой полоски равна $(t_i/l)M$, расстояние от оси x_i . Чтобы её уравновесить, необходим (на расстоянии l) груз $x_i t_i M/l$, а общий груз должен быть равен $(M/l) \sum x_i t_i$

Сумма $\sum x_i t_i$ представляет собой интегральную сумму для интеграла от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0, l]$. Поэтому при мелком разбиении она равна $\int_0^l f = l^2/2$

Получаем ответ: нужен груз в $(M/l) \cdot l^2/2 = Ml/2$. Как часто бывает в физике, получив простой ответ, можно отыскать и его простое объяснение. В самом деле, представим себе, что наш прямоугольник не прикреплен к рычагу, а подвешен на ниточке за середину. Тогда груз массы M прикреплен на расстоянии $l/2$ и для его уравновешивания нужна гиря массы $Ml/2$ (подвешенная на расстоянии l).



Б. Объем конуса.

Конус имеет высоту H и радиус основания R .
Нужно найти его объем.

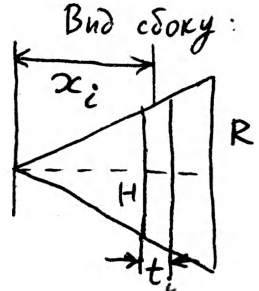
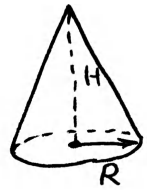
Разобьем конус на части плоскостями, параллельными основанию. Найдем объем каждой части и сложим их.

Пусть t_i - толщина i -ой части, а x_i - её расстояние от вершины конуса. (Оно, конечно, определено не однозначно, а с точностью до но мы считаем части тонкими!) Каждая часть представляет собой почти цилиндр высотой t_i

и с основанием радиуса $\frac{x_i}{H} R$. Объем цилиндра равен произведению площади основания и высоты. Площадь круга радиуса r равна πr^2 , поэтому объем i -ой части равен $\pi (\frac{x_i}{H} R)^2 t_i$, а общий объем $(\pi R^2 / H^2) (\sum x_i^2 t_i)$

Сумма $\sum x_i^2 t_i$ есть интегральная сумма для интеграла функции $f: x \mapsto x^2$ по отрезку $[0, H]$, поэтому она равна (при "бесконечно малой" толщине слоёв) числу $\int_0^H f = H^3/3$

Получаем, что объем равен $\pi R^2 \cdot (H/3)$ (т.е. $1/3$ произведения площади его основания на высоту).



В. Сила давления.

Прямоугольный (параллелепипедальный?) бассейн высоты H заполнен водой. Найти силу давления на его боковую стенку площади S .

Напомним, что на глубине h давление воды равно $\rho g h$. (Здесь ρ плотность воды, g - ускорение свободного падения.)

Для нахождения силы разобьем боковую стенку на полоски шириной t_1, \dots, t_n ; пусть x_i - расстояние от верха до i -ой полоски (определенное, как всегда, с точностью до t_i).

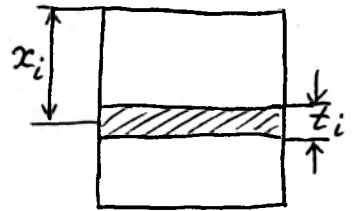
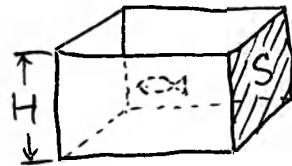
Сила давления на i -ую полоску равна произведению $(\rho g x_i)$ на её площадь, которая равна $(t_i/H) S$

Поэтому общая сила давления равна $\sum \rho g x_i (t_i/H) S = (\rho g S/H) \sum t_i x_i$

Заменяя, как обычно, интегральную сумму $\sum t_i x_i$ на интеграл от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0, H]$ (который равен $H^2/2$) получаем ответ: $\rho g H S / 2$

Таким образом, сила такова, как если бы вся площадь стенки находилась бы на глубине $H/2$.

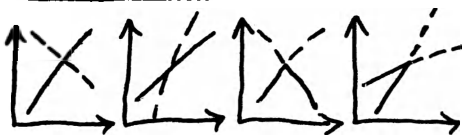
Множество подобных рассуждений Вас ожидает в физике.



Задачи по анализу

I. Производная, мгновенная скорость, касательная.

I.1. На рисунках показаны мировые линии двух автомобилей. Какие дорожно-транспортные происшествия изображены?



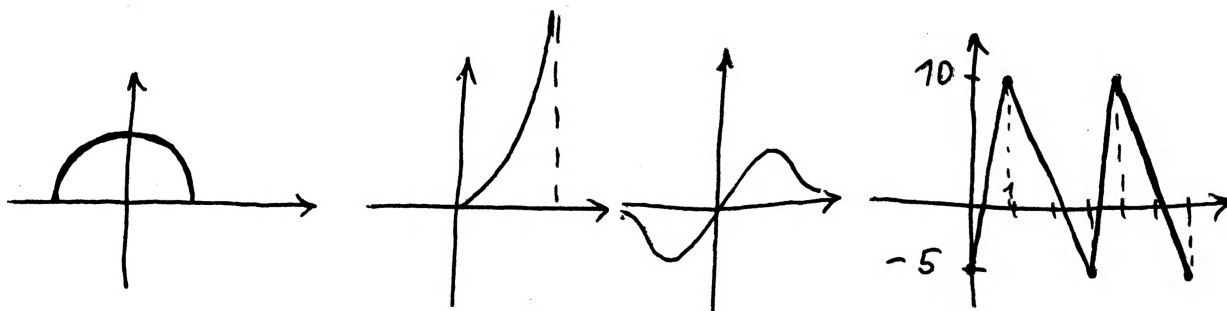
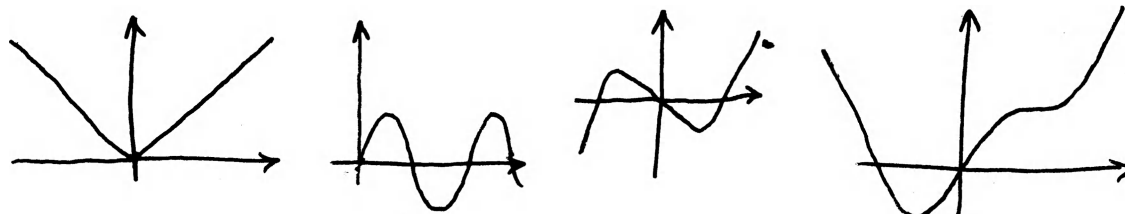
I.2. Из Нью-Йорка в Гавр в 12 ч. ежедневно отправляется пароход и через 7 дней прибывает в Гавр. Сколько пароходов встретит на своем пути пароход, отправляющийся в 18 часов (того же времени) из Гавра в Нью-Йорк?

I.3*. Тело движется по прямой и за каждую секунду проходит 1 метр. Можно ли утверждать, что оно движется равномерно?

I.4. При движении по формуле $x(t) = t^2$ найти мгновенную скорость в любой момент времени t .

I.5. (Продолжение.) Дать другое решение предыдущей задачи, использующее то, что касательная к параболе имеет с ней одну общую точку.

I.6. Нарисовать графики функции f для следующих функций f :



I.7. Найти производную функции f' , если $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

I.8. Для каких функций формула $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ точна?

I.9. Найти приближенно $\sqrt{4.001}$

2. Учимся дифференцировать.

- 2.1. Найти производную функции $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$.
 2.2. Найти производную функции $x \mapsto 1/x^2$.
 2.3. Найти производную функции $x \mapsto \sqrt{x}$.
 2.4. Известно, что $f(x) = g(x+1)$.*) Чему равно $f'(a)$?
 2.5. Известно, что $f(x) = g(2x)$.*) Чему равно $f'(a)$?
 2.6. Известно, что $f(x) = g(-x)$.*) Чему равно $f'(a)$?
 2.7. Функция f четна ($f(x) = f(-x)$). Как связаны $f'(a)$ и $f'(-a)$? чему равно $f'(0)$?
 2.8. Тот же вопрос для нечетной функции ($f(x) = -f(-x)$).
 2.9. Верно ли, что если f' нечетна, то f четна?
 Найти производную функции f , если $f(x)$ равно *)
 2.10. $3 - 2x$. 2.11. $(x+2)^3$. 2.12.* $x\sqrt{x^3}$.
 2.13.* $(x^2+1)(\sqrt{x}+1)$. 2.14.* $(x+1)^{100}$ 2.15.* $(2x+1)^{100}$
 2.16.* $\sqrt{2-3x}$. 2.17.* $\sqrt{1-x^2}$. 2.18.* $[g(x)]^n$, где
 g - функция, производная которой известна.

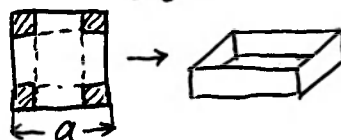
3. Зачем нужно дифференцировать?

- 3.1. Доказать, что если функция f строго возрастает на $[a, b]$ и $[b, c]$, то она строго возрастает на $[a, c]$.
 3.2. Найти промежутки возрастания и убывания для функции $x \mapsto x^3 - 3x^2$ и ее наибольшее и наименьшее значения на $[-1, 2]$.
 3.3.* Нарисовать на плоскости множество тех $\langle p, q \rangle$, при которых функция $x \mapsto x^3 + px^2 + qx$ возрастает на всём \mathbb{R} .
 3.4. Найти наибольшее значение xy , если $2x+3y=1; x, y \geq 0$.
 3.5. Найти наибольшее значение xy^2 , если $2x+3y=1; x, y \geq 0$.
 3.6. Найти число корней уравнения $x^3 - x - a = 0$
 (в зависимости от a).

3.7. Найти максимум и минимум функции $x \mapsto x^2 - 3|x| + 2$ на отрезке $[-2, 1]$

3.8. Доказать, что уравнение касательной к окружности единичного радиуса с центром в начале координат, проходящей через точку $\langle x_0, y_0 \rangle$, имеет вид $xx_0 + yy_0 = 1$.

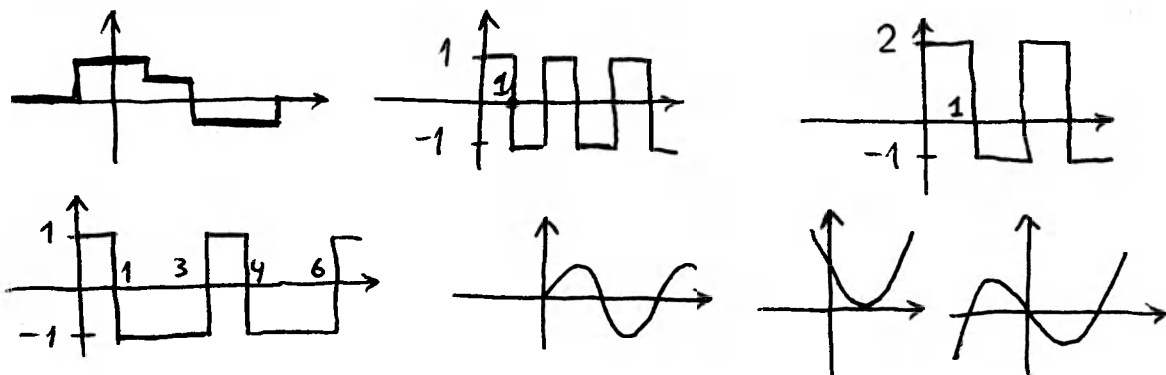
3.9. Каков максимальный объем коробки, которую можно сложить из квадратного листа $a \times a$ (см. рис.)?



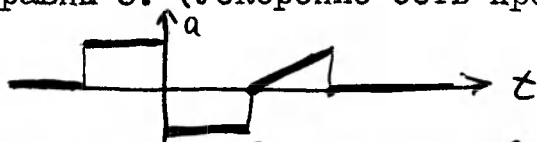
*) при всех x

4. Интеграл.

4.1. Построить по графику зависимости скорости от времени график зависимости, координаты от времени:



4.2. Построить по графику ускорения графики зависимости скорости и координаты от времени. При $t = 0$ скорость и координата равны 0. (Ускорение есть производная скорости: $a(t) = v'(t)$.)



4.3. Функция f нечетна: $f(-x) = -f(x)$. Чему равен $\int_{-a}^a f$?

4.4. Пусть g - некоторая функция. Определим f так:
 $f(a) = \int_0^a g$. Чему равно f' ?

4.5* Функция f имеет период 1 : $f(x+1) = f(x)$ при всех x . Доказать, что число $\int_a^{a+1} f$ не зависит от выбора a .

4.6. Найти $\int_a^b f$, если $f(x) = x^2 + x$.

4.7. Найти $\int_a^b f$, если $f(x) = \sqrt{x}$.

4.8* Найти $\int_a^b f$, если $f(x) = x\sqrt{x}$.

4.9. Найти $\int_0^1 f$, если $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(Указание. Площадь круга радиуса r равна πr^2 .)

4.10. Известно, что $f(x) = Cg(x)$. Чему равно $\int_a^b f$?
 (Ответ требуется выразить через интеграл от функции g .)

4.11. Известно, что $f(x) = g(x+1)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.12. Известно, что $f(x) = g(-x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.13. Известно, что $f(x) = g(2x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

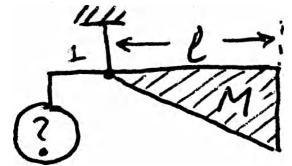
4.14. Известно, что $f(x) = g(x) + h(x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.15* Существует ли такая функция f , что $\int_a^b f = b - 2a$ при всех a и b ?

4.16. Как надо определить $\int_a^b f$ при $b < a$, если мы хотим, чтобы равенство $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ было верно всегда?

5. Интеграл в физике.

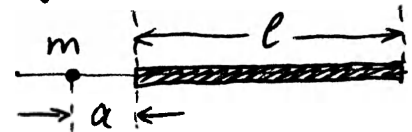
5.1. Какая гиря нужна, чтобы уравновесить однородный прямоугольный треугольник массы M с катетом l ?



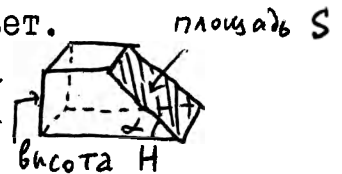
5.2. Найти объем шара радиуса r .

5.3. Найти площадь поверхности шара радиуса r .
(Указание. Если покрыть шар слоем краски толщиной h , то получится шар радиуса $r+h$.)

5.4* Закон всемирного тяготения утверждает, что массы m_1 и m_2 , находящиеся на расстоянии r , притягиваются друг к другу с силой $\gamma m_1 m_2 / r^2$ (γ - "гравитационная постоянная"). Найти силу притяжения однородного стержня массы M длиной l и маленького шара массы m , находящегося на расстоянии a от конца стержня. Что получится при $a=0$? Объясните бессмысленный ответ.



5.5. Найти силу давления, действующую на наклонную стенку сосуда (см. рисунок), заполненного водой.



5.6* Воздушный шар сначала 20 секунд поднимается со скоростью 2 м/с, а затем, выпустив часть газа, спускается с такой же скоростью. Над землей дует ветер, скорость которого пропорциональна высоте и равна 0.5 м/с на высоте 1 м. На каком расстоянии от точки старта приземлится шар?

Анализ: еще несколько задач

1.* Альпинист, вчера поднялся на вершину, а сегодня спустился. Доказать, что есть точка, в которой он был дважды в одно и то же время суток.

2.* Из города А в город Б ведут две дороги. Из А в Б по этим дорогам выехали две машины, связанные веревкой в 20 м, и приехали в Б, не порвав веревки. Доказать, что два круглых воза радиусом 11 м, едущих по этим дорогам навстречу друг другу, не смогут разъехаться.

3.* Улитка ползла в одном направлении 6 минут. За это время её наблюдали несколько человек, каждый наблюдал минуту и за эту минуту она проползла не более 1 м. Ни в один момент она не оставалась без наблюдения. Могла ли она проползти больше 6 м? Больше 12 м?

4.* Эскалатор движется со скоростью u . Нарисовать на плоскости те пары (v_1, v_2) , при которых человек, бегущий по эскалатору со скоростью v_1 , насчитает больше ступенек, чем бегущий со скоростью v_2 . (Не забудьте рассмотреть различные знаки у v_1 и v_2 .)

5.* Доказать, что абсцисса точки пересечения двух касательных к параболе (графику квадратного трехчлена) равна полусумме абсцисс точек касания.

6.** Система $x = y^2 + C_1, y = x^2 + C_2$ имеет единственное решение (x_0, y_0) . Доказать, что $x_0 y_0 = 1/4$.

7.* Найти производную функции $x \mapsto (\sqrt{x^3 + x}) / (2x + 1)^{10}$.

8.* Найти точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке $(-1, 2)$.

9.* Найти $f'(x)$, если $f(x)$ – длина кривой с уравнением (1) $y = |x|$ (2) $y = x + |x|$ между точками с абсциссами -1 и x .

10.* Найти уравнение касательной к кривой $x^2 + y^4 = 2$ в точке $(1, 1)$.

11.** Найти уравнение касательной к кривой $x^3 + x + y^3 + y = 1$ в точке $(1, 0)$.

12.* Найти расстояние от каждой из точек $(0, 4)$ и $(0, 6)$ до параболы $y = x^2/10$.

13.* Автомобиль движется с ускорением, не превышающим a по модулю. Какое наибольшее расстояние он может проехать за время t , если в конце пути он должен остановиться?

14.** Функция f такова, что при всех x и h погрешность $\alpha(x, h)$ в формуле $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$ (т.е. разность её левой и правой частей) не превосходит Ch^3 , где C - константа. Доказать, что f - линейная функция, т.е. при некоторых a и b равенство $f(x) = ax + b$ верно при всех x .

15.* Выпуклое множество M на плоскости имеет площадь S и периметр l . Доказать, что площадь множества всех точек, удаленных от M не более чем на r , равна $a + br + cr^2$, где a, b и c - константы, не зависящие от r . Найти a, b, c .

16.* Функция $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ удовлетворяет условиям $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$. Найти a_i .

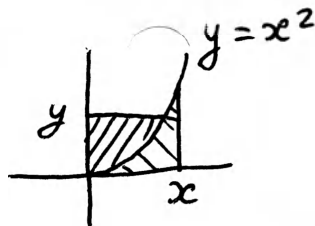
17.* (Продолжение.) Вычислить $f(1)$ с точностью 10%.

18.** (Продолжение.) Доказать, что $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ при всех x и y .

19.* Найти длину кривой $y = x^{3/2}$ между точками с абсциссами 0 и 1.

20.* Доказать, что интегралы от функции $f: x \mapsto 1/x$ по отрезкам $[a, b]$ и $[ca, cb]$ равны.

21.* Доказать неравенство:
 $xy \leq (x^3/3) + \frac{2}{3}y^{3/2}$ при $x, y \geq 2$
 (Указание. См. рисунок.) Когда это неравенство превращается в равенство?



22.* Функция f - убывающая. Доказать, что при $0 \leq \alpha \leq 1$ выполнено неравенство $\int_0^1 f \leq \alpha \int_0^1 f$

23.* Доказать, что если $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\int_a^b |f| \leq [(a-b)^2/4] \cdot \max \{ |f'(x)| \mid x \in [a, b] \}$$

24.** Доказать, что если $g(x) = f(x - 1/x)$, то интегралы $\int_0^\infty g$ и $\int_0^\infty f$ равны.

25.** Если функции f и g либо обе возрастают, либо обе убывают, то $\int_0^1 (f \cdot g) \geq (\int_0^1 f) \cdot (\int_0^1 g)$

26.** Функция f такова, что множество $\{ \langle x, y \rangle \mid y > f(x) \}$ выпукло (f' монотонно возрастает). Доказать, что

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) \quad (a < b)$$