<u>Введение в анализ: подготовительные задачи</u>

I. Ученик называется хорошим, если по каждому предмету он либо не имеет двоек, либо имеет хотя бы две пятерки. Какой ученик называется плохим (точнее, нехорошим)?

2. Можно ли разменять I5 коп. двумя монетами, одна из которых – не пятак?

3. Верно ли, что не всякое действительное число, меньшее 3, имеет квадрат, не больший 9 ?

4. При каких c верны такие утверждения:
(I) для всякого $x\in[0,1]$ найдется такое $y\in[0,2]$, что $x+y>c$;
(2) для всякого $x\in\,]0,1[$ найдется такое $y\in\,]0,2[$, что $x+y>c$?

5. Пусть A – свойство, которым могут обладать (или не обладать) натуральные числа. Доказать, что утверждения

(I) существует такое k, что все n, большие k, обладают свойством A ;

(2) множество тех n, которые не обладают свойством A, конечно, –

равносильны. Если они верны, говорят, что "свойство A <u>выполнено для почти всех натуральных чисел</u>".

6. (Продолжение.) Как переформулировать утверждение "неверно, что свойство A выполнено для почти всех натуральных n", не употребляя отрицания?

7. Построить такую последовательность положительных целых чисел, чтобы для любого целого положительного N было справедливо утверждение: "почти все члены последовательности делятся на N ".

8. Число x называется наименьшим элементом множества M, если (I) $x\in M$ и (2) $x\le y$ для любого $y\in M$. Имеют ли наименьший элемент множества (I) $[0, 1]$ (2) $]0, 1[$
(3) $\{x\in\mathbb{R}\mid x^3\ge 2\}$ (4) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^3\ge 2\}$

9. Даны числа a и b. Известно, что если некоторое число x меньше a, то оно меньше b : $\forall x\ ((x<a)\Rightarrow(x<b))$
Следует ли отсюда, что (I) $a<b$; (2) $a\le b$?

IO. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ называется <u>ограниченной сверху числом</u> C, если $a_i\le C$ при всех i. Последовательность называется <u>ограниченной сверху</u>, если есть число, которое ограничивает её сверху. Не употребляя слова "не", дать определение не ограниченной сверху последовательности.

II. Дать разумное определение ограниченной снизу последовательности.

<u>Ограниченной</u> называется последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

I2. Может ли ограниченная последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена (a_n - наибольший/наименьший член, если $a_n \geq a_k$ / $a_n \leq a_k$ при всех k)?

Множество M называется <u>ловушкой</u> для последовательности a , если почти все ее члены лежат в нем, т.е. если множество тех n , при которых $a_n \notin M$, конечно. Множество M называется <u>кормушкой</u> для последовательности, если оно содержит бесконечно много её членов, т.е. если множество тех n , при которых $a_n \in M$, бесконечно.

I3. Последовательность a такова: I, -I, I, -I,... Какие множества являются её (I) ловушками; (2) кормушками?

I4. Известно, что множества A и B являются ловушками для последовательности a . Можно ли утверждать, что $A \cap B$ - её ловушка?

I5. Известно, что множества A и B являются кормушками для последовательности a . Можно ли утверждать, что $A \cap B$ - её кормушка?

I6. Известно, что отрезок [I, 3] является ловушкой для последовательности a . Можно ли утверждать, что хотя бы один из отрезков [I, 2] и [2, 3] является её ловушкой?

I7. Известно, что отрезок [I, 3] является кормушкой для последовательности a . Можно ли утверждать, что хотя бы один из отрезков [I, 2] и [2, 3] является её кормушкой?

I8. Существует ли последовательность, для которой каждой отрезок положительной длины - кормушка?

I9. Известно, что $|a_n| \leq 1$ при всех n . Доказать, что существует отрезок длины 0.00I, являющийся кормушкой для последовательности a .

20. Известно, что $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ и $a_i \leq 1$ при всех i . Доказать, что существует отрезок длины 0.00I, являющийся ловушкой для последовательности a .

2I. Доказать, что свойства (I) последовательность ограничена; и (2) существует отрезок, являющийся её ловушкой, - равносильны.

Пусть $a = a_0, a_1, a_2, \ldots$ – произвольная последовательность. Вычеркнем из нее какие-то члены так, чтобы осталась бесконечная последовательность. Получаемые таким образом последовательности называются <u>подпоследовательностями</u> последовательности a. Например, у последовательности 0, I, 2,... есть подпоследовательность I, 3, 5, 7,... (но нет подпоследовательности I,I,2,3... или 3, I, 5, 7,...).

22. Существует ли такая последовательность a целых чисел, что любая последовательность целых чисел является подпоследовательностью последовательности a ?

23. Доказать, что из всякой последовательности можно выбрать (бесконечную) монотонную (т.е. неубывающую или невозрастающую) подпоследовательность.

24. Существует ли такое множество интервалов на действительной прямой, что пересечение всех интервалов из этого множества есть [0, I[?

25. Существует ли такое множество интервалов на действительной прямой, что объединение всех интервалов из этого множества есть [0, I[?

26. Тот же вопрос, что и в задачах 24 и 25, но интервалы заменены отрезками.

З а ч е т н ы е   з а д а ч и

I. Множество M называется ограниченным сверху, если существует такое c, что $x \leqslant c$ для любого $x \in M$. Не употребляя отрицания, сформулировать, что значит " M не ограничено сверху".

2. Существует ли последовательность, для которой отрезок $[1,2]$ является ловушкой, а отрезок $[3,4]$ – кормушкой?

3. Известно, что $[1,2]$ – ловушка для последовательности   . Может ли последовательность   (I) иметь члены, большие I000; (2) иметь бесконечно много отрицательных членов; (3) быть не ограниченной снизу?

У ч е т   р е ш е н н ы х   з а д а ч

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	20	2I	22

23	24	25	26