Математический анализ

Пределы

Определение предела. Число A называется пределом последовательности $a : a_0, a_1, \ldots$ (обозначения: $a \to A$, $\lim a = A$), если для всякого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, лежат в интервале $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon).$$

I. Доказать, что $a \to A$ тогда и только тогда, когда любой интервал, содержащий A, является ловушкой для последовательности a.

2. Сформулировать, что означает, что число A <u>не</u> является пределом последовательности (не используя слова "не").

3. Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности a найдется бесконечно много членов, по модуля меньших ε. Можно ли утверждать, что $a \to 0$?

4. Доказать, что число I является пределом последовательности $a_n = (n+1)/n$, а число 2 не является пределом этой последовательности.

5. Доказать, что никакое число не является пределом последовательности I, -I, I, -I,...

6. Доказать, что последовательность не может иметь двух различных пределов.

Последовательность, имеющая предел A, называется <u>сходящейся к</u> A; последовательность, имеющая какой-то предел, называется <u>сходящейся</u>.

7. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

8. Все члены сходящейся последовательности положительны. Можно ли утверждать, что ее предел положителен? Можно ли утверждать, что предел неотрицателен, если все члены неотрицательны?

9. Доказать, что если $|a_n| \leq b_n$ и $b \to 0$, то $a \to 0$.

I0. ("Теорема о двух милиционерах".) Известно, что $a_n \leq b_n \leq c_n$ при всех n и что a и c ("милиционеры") имеют общий предел A ("отделение"). Доказать, что b ("задержанный") имеет тот же предел

II. Сделаем несколько изменений в определении предела. Какие свойства последовательностей при этом получатся?

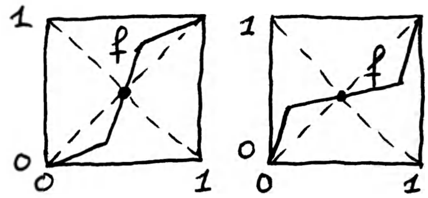
(I) $(\forall \varepsilon > 0)\ \forall N\ (\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$ (2) $\exists N\ (\forall \varepsilon > 0)(\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$

(3) $(\exists \varepsilon > 0)\ \forall N\ (\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$ (4) $(\exists \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall n > N)(|a_n - A| < \varepsilon)$

I2. Из сходящейся последовательности вычеркнули некоторые члены (возможно, бесконечное число), при этом осталась бесконечная последовательность (подпоследовательность исходной). Доказать, что она будет сходиться к тому же пределу.

I3. Последовательность a сходящаяся. Последовательность b получена из a перестановкой членов: $b_n = a_{f(n)}$, где f – взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Доказать, что b сходится к тому же пределу, что и a.

I4. Последовательность a состоит из неотрицательных чисел, причем $a_0 + \ldots + a_n \le 1$ для всех n. Доказать, что эта последовательность сходится к 0.



I5.* График функции f изображен на рисунке (I). При каких $a \in [0, I]$ последовательность $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots$ имеет предел? Тот же вопрос для рисунка (2).

I6.* Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена?

Арифметические операции

Назовем последовательность бесконечно малой, если она имеет 0 своим пределом.

I7. Доказать, что $(a_n \to A) \Leftrightarrow (b_n = a_n - A$ – бесконечно малая).

I8. Последовательности $a: a_0, a_1, \ldots$ и $b: b_0, b_1, \ldots$ – бесконечно малые. Доказать, что их сумма и разность $a+b: a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots$ и $a-b: a_0-b_0, a_1-b_1, \ldots$ – бесконечно малые.

I9. (Предел суммы и разности.) Доказать, что если $a \to A$ $b \to B$, то последовательность $a+b$ сходится к $A+B$, а последовательность $a-b$ сходится к $A-B$. (Сумма/разность сходящихся последовательностей – сходящаяся, и предел суммы/разности равен сумме/разности пределов.)

20. Известно, что последовательности a и b не сходятся. Можно ли утверждать, что $a+b$ – не сходящаяся?

2I. Тот же вопрос, если a сходится, а b – нет.

22. Известно, что последовательности $a+b$ и $a-b$ сходятся. Можно ли утверждать, что последовательности a и b сходятся?

23. Стороны прямоугольника, каждая из которых не превышает 5 м, измерили с точностью до I см. Затем результаты измерений перемножили. Может ли полученное число отличаться от истинной площади прямоугольника более чем на (I) I см^2; (2) I м^2?

24. Доказать, что если a – бесконечно малая последовательность, а b – ограниченная, то последовательность $a \cdot b$: $a_0 \cdot b_0$, $a_1 \cdot b_1, \ldots$ – бесконечно малая.

25. (Предел произведения.) Доказать, что если $a \to A$, $b \to B$, то $ab \to AB$. (Произведение сходящихся последовательностей сходится, и предел произведения равен произведению пределов.)

26. Что неверно в следующем рассуждении ($\lim a_n$ – предел последовательности a): $1 = \lim 1 = \lim (1/n \cdot n) = \lim 1/n \cdot \lim n = 0 \cdot \lim n = 0$?

Говорят, что последовательность a стремится к бесконечности (запись $a \to \infty$), если для всякого C все члены последовательности, начиная с некоторого, по модулю больше C :

$\forall C \; \exists N \; (\forall n > N) \; (|a_n| > C)$.

27. Доказать, что если a стремится к бесконечности и все члены a отличны от 0, то последовательность $1/a$: $1/a_0$, $1/a_1, \ldots$ стремится к 0. Доказать, что если a стремится к 0 и все члены a отличны от 0, то последовательность $1/a$ стремится к бесконечности.

28. Дать разумные определения понятий " $a \to +\infty$ " и " $a \to -\infty$ ". Что можно сказать про суммы и произведения таких последовательностей?

29. Известно, что последовательность $a_0, a_1, \ldots$ сходится к A, причем $A \neq 0$. Доказать, что почти все (все, кроме конечного числа) члены последовательности a отличны от 0 и что последовательность $1/a_0$, $1/a_1, \ldots$ сходится к $1/A$. (Конечное число её членов не определено, но это несущественно.)

30. (Предел частного.) Доказать, что если $a \to A$, $b \to B$ причем $B \neq 0$, то последовательность a/b стремится к A/B.

Мы увидим впоследствии, что теоремы о пределе произведения, частного, суммы и разности можно коротко сформулировать так: арифметические операции непрерывны.

31. Что можно сказать о произведении последовательностей, если одна из них имеет ненулевой предел, а другая стремится к бесконечности?

32.* Доказать, что если последовательность a сходится, то и последовательность b, n-ый член которой есть среднее арифметическое первых n членов последовательности a, сходится к тому же пределу. Можно ли утверждать, что a сходится, если известно, что сходится b ?

33. Последовательность a сходится. Доказать, что последовательность b, для которой $b_n = a_{n+1} - a_n$, сходится к 0. Верно ли обратное?

Классические пределы

34. Доказать, что последовательность $a: 1^k, 2^k, \ldots$ $(a_n = n^k)$ при любом целом $k > 0$ стремится к бесконечности, а при любом целом $k < 0$ сходится к 0.

35. Доказать, что последовательность $a: a_n = 0.01n^3 - 1000n^2 - 1$ стремится к бесконечности.

36. Пусть P – произвольный многочлен степени $k > 0$: $P(x) = c_k x^k + \ldots + c_0$, причем $c_k \neq 0$. Доказать, что последовательность $P(0), P(1), \ldots$ стремится к бесконечности.

37. (Продолжение.) Доказать, что последовательность $P(n)$ стремится к бесконечности "с той же скоростью, что ее старший член", т.е. что отношение $P(n)/c_k n^k$ сходится к I.

38. Что можно сказать о последовательности $P(n)/Q(n)$ если P и Q – два многочлена?

39. Доказать, что последовательность $a_n = \sqrt{n}$ стремится к бесконечности.

40. Доказать, что последовательность $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ сходится к 0.

4I. Найти предел последовательности $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$.

42. Доказать, что при $\alpha > 1$ последовательность $a_n = \alpha^n$ стремится к бесконечности. (Указание. Если $\alpha = 1 + h$, $h > 0$, то $\alpha^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$.)

43. Доказать, что при $|\alpha| < 1$ последовательность $a_n = \alpha^n$ сходится к 0.

44. Доказать, что при $\alpha > 1$ последовательность α^n/n стремится к бесконечности. (Эта задача показывает, что стремится к бесконечности "существенно быстрее" n.) (Указание. Воспользуйтесь биномом Ньютона: $(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 (\text{sic!}) + \ldots$)

45. (Продолжение.) Доказать, что α^n растет быстрее всех степеней n: последовательность α^n/n^k $(\alpha > 1,\ k \in \mathbb{N})$ стремится к бесконечности. (Указание. $\alpha^n/n^k = [(\sqrt[k]{\alpha})^n/n]^k$)

46. Последовательность положительных чисел a такова, что последовательность $b: b_n = a_{n+1}/a_n$ сходится к α. Доказать, что если $\alpha > 1$, то a стремится к бесконечности, а если $\alpha < 1$, то a стремится к 0.

47. (Продолжение.) Используя это, докажите, что $\alpha^n/n^k \to \infty$ при $\alpha > 1$, $k \in \mathbb{N}$

48. (Продолжение.) Что можно сказать, если $\alpha = 1$? (Может ли a стремиться к бесконечности? иметь конечный предел? сходиться к 0? не иметь предела вовсе?)

49. (Непрерывность корня.) Доказать, что если $a_n \to A$, a_n неотрицательны, то $\sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$

50. Найти пределы: $(2^n + 3^n + 4^n)/(1^n + 5^n)$, $(2n^2+3^n)/(4n^2+7\cdot 3^n)$

51. $\sqrt[n]{(2^n+3^n+4^n)}$

52. $\sqrt{n+1000}/n+1$, $(2\sqrt{n} + 3\sqrt[3]{n})/(3\sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n})$.

53. $100^n/n!$

54. Доказать, что (I) $n^2 > 1000n$; (2) $2^n > 1000n$; (3) $(1.01)^n > 1000n^{1000}$ (4) $n! > 1000^n$ при почти всех n.

55. Известно, что $a_n \to 1$ и $a_n \neq 1$ при всех n. Найти пределы: $n \longmapsto (2a_n - 1)/(a_n + 1)$.

56. ... $(a_n^2 + a_n - 2)/(a_n - 1)$.

57. ... $(a_n^{10} - 1)/(a_n - 1)$.

58. Найти предел a : $a_n = \sqrt[n]{2}$.

59.* Найти предел a : $a_n = \sqrt[n]{n}$.

60.* Последовательность a такова, что $a_{n+1} = 3 + a_n/2$ Доказать, что она сходится и найти её предел.

61.* Последовательность a такова: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$. Доказать, что она сходится и найти её предел.

62.* Известен следующий способ извлечения квадратного корня из числа $m > 0$: строится последовательность a, у которой $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + m/a_n)$. Доказать, что эта последовательность сходится к $\sqrt{a}$.

63.** Нельзя ли придумать чего-нибудь подобного для извлечения кубических корней?

64.* По кругу написано 1000 чисел. Рядом с каждым числом пишут среднее арифметическое его и следующего по часовой стрелке числа. Затем исходные числа стирают. Эту операцию проделывают многократно. Выберем некоторое место на круге и рассмотрим последовательность чисел, стоящих на этом месте после 0, I, 2... операций. Доказать, что эта последовательность имеет предел и он равен среднему арифметическому чисел, которые были вначале написаны на круге.

65.* Найти предел последовательности a : $a_n = \dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$

Метрические пространства.

Понятие предела имеет смысл не только для числовых последовательностей. Чтобы определить его по единой схеме для разных случаев (например, для последовательностей точек плоскости), введем понятие метрического пространства.

Пусть M – некоторое множество. Функция ρ, сопоставляющая с каждой парой x, y элементов M некоторое число, называется функцией расстояния или метрикой, есои выполнены такие свойства: (I) $\rho(x,y)$ всегда неотрицательно; $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,y)>0$ при $x \neq y$; (2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ при всех x, $y \in M$; (3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ при всех x, y, z (неравенство треугольника). Метрическим пространством называется множество с заданной на нем метрикой. (Задавая разные метрики на одном и том же множестве, получаем разные пространства.) Число $\rho(x,y)$ называют расстоянием между x и y.

66.* Будут ли следующие множества и заданные на них функции образовывать метрические пространства? (I) $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=x-y$; (2) $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=(x-y)^2$; (3) M = плоскость, $\rho(x,y)$ = расстояние между проекциями точек x и y на ось абсцисс; (4) M = множество всех точек г. Москвы, $\rho(x,y)$ = наименьшее время, необходимое для проезда из x в y; (5) ...для проезда из x в y и обратно; (6) M = поверхность бублика, $\rho(x,y)$ – длина кратчайшего пути из x в y по поверхности бублика.

67.* (Основные примеры метрических пространств.) (I) Доказать, что $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$ – метрическое пространство. Его мы будем называть "метрическое пространство $\mathbb{R}$". (2) Доказать, что множество всех точек плоскости с метрикой $\rho(x,y)=|xy|$ (длина отрезка xy) – метрическое пространство. Его мы будем кратко называть плоскостью.

68.* Доказать, что в любом метрическом пространстве справедливо "неравенство четырехугольника":

$$\rho(x,t) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)+\rho(z,t)$$

69.* Доказать, что на любом множестве можно ввести дискретную метрику: $\rho(x,y)$ = (если $x=y$ то 0 иначе 1).

70.* Доказать, что если ρ – метрика на M, то функция ρ': $\rho'(x,y)=\min(1,\rho(x,y))$ – тоже метрика.

71.* На плоскости наряду с обычной метрикой $\rho(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle) = ((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2)^{1/2}$ ($\langle x_1,x_2\rangle$ и $\langle y_1,y_2\rangle$ – координаты x и y) можно определить и метрики $\rho_1(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ и $\rho_\infty(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle)=\max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$. Проверить, что это действительно метрики.

72.* Определим на множестве всех последовательностей длины n расстояние так: $\rho(\langle x_1 \ldots x_n\rangle, \langle y_1 \ldots y_n\rangle)$ = (число тех i, при которых $x_i \neq y_i$). Доказать, что это – метрика (называемая метрикой Хемминга).

73.* Определим на множестве всех бесконечных последовательностей натуральных чисел функцию $\rho(x,y)$, равную 0, если $x = y$, и равную 2^{-n}, если $x \neq y$ и n – наименьшее число, для которого $x_n \neq y_n$. Проверить, что это метрика. (Возникающее пространство называется пространством Бэра.)

74.* Пусть M_1 и M_2 – два метрических пространства, ρ_1 и ρ_2 – метрики. Определим на множестве пар $M_1 \times M_2 = \{\langle m_1, m_2\rangle \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ метрику по формуле $\rho(\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2)$. Проверить, что это метрика. Возникающее пространство называется <u>произведением</u> пространств M_1 и M_2.

Пусть M – метрическое пространство, $x \in M$, $r > 0$. Назовем открытым [замкнутым] шаром с центром x радиуса r множество всех точек y, для которых $\rho(x,y) < r$ [$\rho(x,y) \leqslant r$].

75.* Доказать, что если открытые шары радиуса I/2 с центрами x и y пересекаются, то $\rho(x,y) < 1$. Верно ли обратное (в произвольном метрическом пространстве)?

76.* Доказать, что если $\rho(x,y) < 1$, то открытый шар с центром x радиуса I содежится в открытом шаре с центром y радиуса 2.

77.* Шары с радиусами R_1 и R_2, где $R_1/R_2 = 10$, пересекаются. Радиусы шаров увеличили вдвое, не меняя центров. Доказать, что один из полученных шаров содержится в другом.

78.* Могут ли в метрическом пространстве существовать 2 таких шара разных радиусов, что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса и не совпадает с ним? (Центры шаров могут быть различны.)

79.* (I) Сколько элементов содержит замкнутый шар радиуса I в пространстве последовательностей n нулей и единиц с метрикой Хемминга? (2) Доказать, что если дано несколько непересекающихся шаров радиуса I, то их число не превосходит $2^n/n+1$. (3) Написано несколько последовательностей нулей и единиц длины n, причем любые две из них отличаются по крайней мере в 3 местах. Доказать, что их число не превосходит $2^n/n+1$.

Пусть $x_0, x_1, \ldots$ – последовательность точек метрического пространства. Говорят, что точка a – её <u>предел</u>, если для всякого $\varepsilon > 0$ шар с центром a и радиусом ε содержит почти все её члены: $(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall n > N)\ (\rho(x_n, a) < \varepsilon)$.

При $M = \mathbb{R}$ получаем обычное определение предела.

80.* Доказать, что a есть предел последовательности точек $x_0, x_1, \ldots$ тогда и только тогда, когда (числовая) последовательность $\rho(x_0, a), \rho(x_1, a), \ldots$ сходится к 0.

81.* Пусть $x_0, x_1, \ldots$ – последовательность точек плоскости. Доказать, что сходится к точке a (в обычной метрике) тогда и только тогда, когда последовательность их первых координат сходится к первой координате точки a, а последовательность вторых координат – ко второй.

82.* Доказать, что последовательность не может иметь двух разных пределов.

83.* Известно, что $x_0, x_1, \ldots \to a$ и $y_0, y_1, \ldots \to b$. Доказать, что (числовая) последовательность $\rho(x_i, y_i)$ сходится к $\rho(a, b)$.

84.* Доказать, что если последовательность сходится и предел её лежит внутри открытого шара, то почти все её члены лежат внутри этого шара.

85.* Какие последовательности являются сходящимися (I) в дискретной метрике? (2) в метрическом пространстве с конечным числом точек? в пространстве Бэра ?

Точка a называется предельной точкой последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ шар радиуса ε с центром a содержит бесконечно много членов последовательности.

86.* Может ли существовать последовательность действительных чисел, имеющая несколько предельных точек? ...для которой предельными точками являются числа I, I/2, I/3, I/4,... и только они?

87.* Может ли существовать последовательность действительных чисел, для которой любое число является предельной точкой? ... последовательность точек плоскости, для которой любая точка плоскости является предельной?

88.* Доказать, что следующие свойства равносильны: (I) a – предельная точка последовательности x; (2) существует подпоследовательность последовательности x, сходящаяся к a. (Напомним, что подпоследовательностью называется любая бесконечная последовательность, получающаяся из исходной выбрасыванием некоторых членов.)

Открытые и замкнутые множества.

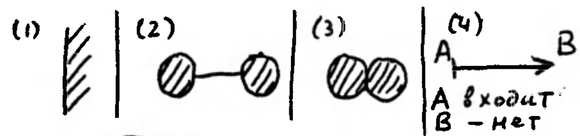
Точка x называется внутренней точкой множества A точек метрического пространства M, если некоторый шар положительного радиуса с центром в x целиком содержится в A . Множество называется открытым, если все его точки являются для него внутренними.

89.* Доказать, что открытый шар – открытое множество.

90.* Доказать, что пересечение конечного числа и объединение любого числа открытых множеств открыты.

91.* Доказать, что множество всех точек любого множества A открыто. (Это множество обозначается $\mathrm{Int}(A)$ и называется внутренностью A .)

92.* Нарисовать внутренности для таких подмножеств плоскости:



93.* Можно ли утверждать, что (I) $\mathrm{Int}(A\cap B)=\mathrm{Int}\,A\cap \mathrm{Int}\,B$; (2) $\mathrm{Int}(A\cup B)=\mathrm{Int}\,A\cup \mathrm{Int}\,B$ для любых множеств A и B ?

94.* Доказать, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде объединения произвольного числа открытых шаров.

95.* Какие открытые множества в $\mathbb{R}$ не содержат ни одной рациональной точки?

96.* Доказать, что всякое открытое множество на прямой или на плоскости есть счетное объединение открытых шаров.

97.* Какие множества открыты в дискретной метрике?

98.* Доказать, что следующие свойства метрического пространства M равносильны: (I) существует счетное множество, всюду плотное в M , т.е. пересекающееся с любым открытым шаром; (2) существует такое счетное семейство открытых множеств, что всякое открытое множество представимо в виде объединения некоторых множеств этого семейства. Если эти свойства выполнены, M называется сепарабельным.

99.* Доказать, что пространство, в котором любая последовательность имеет предельную точку, сепарабельно.

Точка x называется точкой касания множества A в метрическом пространстве M , если любой шар положительного радиуса с центром в x пересекается с A . Множество A замкнуто, если оно содержит все свои точки касания.

100.* Доказать, что (x касается A) $\Leftrightarrow$ (x не внутренняя для $M\setminus A$); (A замкнуто) $\Leftrightarrow$ ($M\setminus A$ открыто).

101.* Доказать, что множество предельных точек любой последовательности замкнуто.

Множество всех точек, касающихся A , называется замыканием A и обозначается $\bar{A}$.

102.* Доказать, что множество $\bar{A}$ всегда замкнуто. Чему равно замыкание $\mathbb{Q}$ (как подмножества $\mathbb{R}$)? Как связано замыкание A с внутренностью $M \setminus A$?

103.* Придумать такое множество A, чтобы A, $\operatorname{Int} A$, $\bar{A}$, $\operatorname{Int}(\bar{A})$, $\overline{\operatorname{Int}(A)}$ были бы попарно различны.

104.* Доказать, что всякое замкнутое множество на плоскости является замыканием некоторого счетного множества.

105.* (Нормальность метрических пространств.) Доказать, что если A_1 и A_2 – непересекающиеся замнутые подмножества метрического пространства, то существуют непересекающиеся открытые множества B_1 и B_2, их содержащие: $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$.

106.* Какие точки могут являться пределами последовательностей, все члены которых принадлежат некоторому множеству A ?

107.* На множестве M заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что следующие свойства равносильны: (1) всякое множество, открытое в одной из них, открыто в другой; (2) всякая последовательность, имеющая некоторый предел в одной из них, имеет тот же предел в другой. Если эти свойства выполнены, метрики называют <u>эквивалентными</u>. Приведите пример двух неэквивалентных метрик.

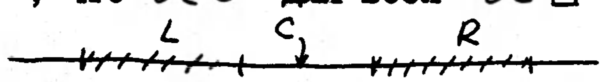
108.* Мальчик Петя вышел из дома и пошел в школу. На полпути он свернул к кинотеатру. На полпути к нему он повернул к катку. Не дойдя половину пути до катка, он решил, что нужно все-таки учиться и пошел в школу. На полпути он свернул к кинотеатру... Чем кончит мальчик Петя?

109.* Доказать, что всякое открытое множество метрического пространства может быть представлено в виде объединения счетного числа замкнутых множеств, а всякое замкнутое множество – в виде счетного пересечения открытых.

<u>Аксиома полноты</u>

Следующее свойство действительных чисел играет в анализе фундаментальную роль.

Пусть L и R – два непустых множества действительных чисел, причем любой элемент ℓ множества L не больше любого элемента r множества R. Тогда найдется <u>разделяющее</u> <u>число</u> c, т.е. такое c, что $\ell \le c$ для всех $\ell \in L$ и $c \le r$ для всех $r \in R$.



110. Докажите, что аналогичное свойство для множества $\mathbb{Q}$ неверно: если L – множество всех рациональных чисел, меньших

$\sqrt{2}$, а R – множество всех рациональных чисел, больших $\sqrt{2}$, то не существует разделающего их рационального числа.

Существуют различные утверждения, вытекающие из аксиомы полноты (многие из них эквивалентны ей). В этом разделе мы укажем некоторые из них.

Число c называется точной верхней гранью (т.в.г.) множества $A \subset \mathbb{R}$, если выполнены два условия: (I) $x \leq c$ для всякого $x \in A$; (2) для всякого $c_1 < c$ найдется $x \in A$, для которого $x > c_1$.

III. Доказать, что (c есть т.в.г. множества A) $\Leftrightarrow$ (c – наименьший элемент в множестве всех верхних границ для A). (Число u – верхняя граница для A , если $x \leq u$ для всех $x \in A$.)

II2. Дать разумное определение точной нижней грани.

II3. Сформулировать, что означает, что x не есть т.в.г. множества A .

II4. Доказать, что I есть т.в.г. множества всех рациональных чисел, меньших I.

II5. Может ли множество иметь две различные т.в.г. ?

II6. Доказать, что если множество имеет наибольший элемент, то он является его т.в.г.

II7. Вывести из аксиомы полноты такое утверждение: всякое ограниченное сверху множество имеет т.в.г. (Ограниченное сверху = имеющее верхнюю границу.) (Указание. Пусть L – данное множество, R – множество его верхних границ.)

II8.* Докажите, что из утверждения предыдущей задачи в свою очередь можно вывести аксиому полноты.

II9.* Доказать, что аксиома Архимеда является следствием аксиомы полноты.

I20.* Доказать, что аксиома существования корня является следствием аксиомы полноты.

I21. Используя аксиому полноты, доказать следующий принцип вложенных отрезков: если $I_0, I_1, \ldots$ – отрезки на прямой и $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, то существует точка x , принадлежащая всем отрезкам.

I22. Останется ли верным это утверждение, если отрезки заменить интервалами?

I23. Имеется последовательность отрезков, любые 2 из которых имеют общую точку. Доказать, что все они имеют общую точку.

I24. Используя аксиому полноты, доказать, что всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

Эта задача позволяет доказать существование предела, не зная его заранее.

I25. Дать новое доказательство того, что предел последовательности $a: a_n = q^n$ при $0<q<1$ равен 0. (Доказать сначала, что он существует.)

I26. Доказать существование и найти предел последовательности $\sqrt{6}$, $\sqrt{6+\sqrt{6}}$, $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, ...

Напомним, что a называется предельной точкой последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если при любом $\varepsilon>0$ интервал $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (шар радиуса ε с центром в a) содержит бесконечно много членов последовательности.

I27. Используя аксиому полноты, доказать, что <u>всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку</u>. (Указание. Если отрезок содержит бесконечно много членов последовательности, то одна из его половин также обладает этим свойством.)

Аксиома полноты позволяет строго доказать несчетность отрезка.

I28. Доказать, что если $x_0, x_1, x_2, \ldots \in [0,1]$, то существует точка $x \in [0,1]$, отличная от всех x_i. (Указание. Если дан отрезок и точка, то можно найти меньший отрезок, не содержащий этой точки.)

Последовательность действительных чисел называется <u>фундаментальной</u>, или <u>последовательностью Коши</u>, если для всякого $\varepsilon>0$ существует отрезок длины ε, являющийся её ловушкой.

I29. Доказать (не используя аксиому полноты), что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

I30. Используя аксиому полноты, доказать <u>критерий Коши</u>: <u>всякая фундаментальная последовательность сходится</u>. (Указание. Построить последовательность вложенных ловушек стремящейся к 0 длины.)

Семейство интервалов называется <u>покрытием</u> множества $A \subset \mathbb{R}$, если всякая точка A содержится хотя бы в одном из них.

I3I. Доказать следующую <u>лемму Гейне – Бореля</u>: <u>из всякого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие</u> (т.е. можно найти конечное число интервалов исходного покрытия, которые покрывают весь отрезок).

I32. Останется ли лемма справедливой, если заменить интервалы отрезками или отрезок интервалом?

133.* Доказать, что лемма Гейне – Бореля останется справедливой, если заменить интервалы открытыми множествами, а отрезок – любым замкнутым ограниченным множеством действительных чисел

134. Будем говорить, что функция f локально ограничена, если для каждой точки x из её области определения найдется такой интервал I, содержащий x, на котором f ограничена (т.е. множество значений f в точках I, в которых она определена, ограничено). Доказать, что локально ограниченная функция, определенная на отрезке, ограничена (т.е. множество её значений ограничено).

135. Последовательность действительных чисел x_n такова, что $|x_{n+1}-x_n|\leq 2^{-n}$. Доказать, что она имеет предел.

136. Последовательность действительных чисел x_n такова, что $|x_n-x_k|<\frac{1}{n}+\frac{1}{k}$. Доказать, что она сходится. Что можно сказать, если $|x_n-x_k|<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k}$?

137.* Говорят, что множество $A\subset\mathbb{R}$ является <u>подгруппой группы</u> $\mathbb{R}$, если из $x,y\in A$ следует $x+y,\ x-y\in A$. Найти все подгруппы группы $\mathbb{R}$, являющиеся замкнутыми множествами.

Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что дробные части чисел $n\sqrt{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$, попадают в любой интервал, лежащий внутри $[0,1]$. (Указание. Рассмотреть подгруппу чисел вида $m+n\sqrt{2}$, $m,n\in\mathbb{Z}$ и её замыкание.)

138.* Доказать, что всякое открытое множество на прямой является объединением счетного множества <u>непересекающихся</u> интервалов.

139.* (1) Доказать, что множество $\mathbb{R}$ не может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств. (2) Какие подмножества $\mathbb{R}$ открыты и замкнуты одновременно?

(Продолжение.) Решить предыдущую задачу, заменив $\mathbb{R}$ на плоскость.

140.* Доказать, что если $A_i\subset\mathbb{R}$ – замкнутые множества и $A_0\cup A_1\cup\ldots=\mathbb{R}$, то хотя бы одно из A_i имеет внутреннюю точку.

141.* Можно ли представить множество $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ как объединение счетного числа замкнутых подмножеств $\mathbb{R}$? Можно ли представить $\mathbb{Q}$ как пересечение счетного числа открытых подмножеств $\mathbb{R}$?

142.* Можно ли представить $\mathbb{R}$ в виде счетного объединения попарно не пересекающихся замкнутых множеств?

143.** Доказать, что несчетное замкнутое множество на прямой имеет мощность континуума. Существенна ли замкнутость?

Ряды

Пусть дана последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots$ Говорят, что она суммируема, или что "ряд $a_0 + a_1 + \ldots$ сходится", если последовательность $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$ имеет предел. Этот предел называют суммой ряда, а S_n – n-ой частичной суммой.

I44. При каких x ряд $1 + x + x^2 + \ldots$ ("бесконечная геометрическая прогрессия") сходится? Найти его сумму.

I45. (Необходимое условие сходимости.) Доказать, что если ряд $x_0 + x_1 + \ldots$ сходится, то его члены стремятся к 0: $\lim x_n = 0$.

I46. (Продолжение.) Верно ли обратное?

I47. Доказать, что ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

I48. (Признак сравнения.) Если $0 \le a_n \le b_n$ при всех n и ряд $\sum b_n$ сходится, то и ряд $\sum a_n$ сходится.

I49. Доказать, что ряд $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ расходится. (Указание. $1/n+1 + \ldots + 1/2n \ge 1/2$.)

I50. Доказать, что ряд $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots$ сходится и найти его сумму. (Указание. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = ?$)

I5I. Доказать, что ряд $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots$ сходится. (Указание. Сравнить с рядом $\sum 1/n(n-1)$.)

I52.** Доказать, что сумма ряда предыдущей задачи равна $\frac{\pi^2}{6}$.

I53.* Пусть все $a_n \ge 0$, $a_0 \ge a_1 \ge \ldots$ Доказать, что ряды $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ и $1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ сходятся или расходятся одновременно.

I54.* При каких действительных $p > 0$ ряд $1/1^p + 1/2^p + 1/3^p + \ldots$ сходится? (Указание. Применить предыдущую задачу.)

I55. Доказать, что при произвольной перестановке членов ряда с неотрицательными членами его сходимость и сумма не меняются. (Для произвольных рядов это не так, см. далее!)

I56.* Бесконечная клетчатая бумага заполнена неотрицательными числами. Дать разумное определение "суммы всех чисел, написанных на бумаге".

I57.* Известно, что $a_n > 0$, $a_{n+1}/a_n \to A$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum a_n$ при различных A?

I58.* Известно, что $a_n > 0$, $\sqrt[n]{a_n} \to A$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum a_n$ при различных A?

I59.* Из ряда I + I/2 + I/3 + ... выкинули все члены, десятичная запись которых содержит 9. Сходится ли полученный ряд?

I60.* Известно, что a_n, $b_n \geq 0$ и ряды $a_0^2 + a_1^2 + \ldots$ и $b_0^2 + b_1^2 + \ldots$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

I6I.* Известно, что $a_i \geq 0$ и ряд $\sum a_i^2$ сходится. Можно ли утверждать, что ряд $\sum (a_n / n)$ сходится?

I62.* При каких действительных p ряд $\sum \frac{1}{n(\log_2 n)^p}$ сходится?

I63.* Известно, что $a_n > 0$, ряд $\sum a_n$ расходится. Обозначим через S_n сумму $a_0 + \ldots + a_n$. Доказать, что ряды $\sum (a_n/(1+a_n))$ и $\sum (a_n/S_n)$ расходятся, а ряд $\sum (a_n / S_n^2)$ сходится. Что можно сказать о рядах $\sum (a_n/(1+na_n))$ и $\sum (a_n/(1+n^2 a_n))$?

I64.* Известно, что $a_n > 0$, ряд $\sum a_n$ сходится. Обозначим через r_n сумму ряда $a_n + a_{n+1} + \ldots$. Доказать, что ряд $\sum (a_n / r_n)$ расходится, а ряд $\sum (a_n / \sqrt{r_n})$ сходится.

Перейдем теперь к изучению рядов с членами разных знаков.

I65. (Признак Лейбница.) Если $a_0 \geq a_1 \geq \ldots$, все a_i неотрицательны и $\lim a_n = 0$, то ряд $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ (т.е. ряд с членами $a_0, -a_1, a_2, \ldots$) сходится.

Пример: ряд I - I/2 + I/3 - I/4 ...

I66.** Найти сумму этого ряда. (Ответ: $\log_e 2$, где e – основание натуральных логарифмов.)

I67. При каких x сходится ряд $\sum (x^n/n)$?

I68.** Найти его сумму (если она существует).

I69. (Абсолютная сходимость.) Доказать, что если ряд $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots$ сходится, то и ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ сходится. Если ряд $|a_0| + |a_1| + \ldots$ сходится, то говорят, что $a_0 + a_1 + \ldots$ <u>абсолютно сходится</u>. Таким образом, задача утверждает, что <u>всякий абсолютно сходящийся ряд сходится</u>. (Указание. Воспользоваться критерием Коши.)

I70. Существуют ли сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся ряды?

I7I. Доказать, что при перестановке членов абсолютно сходящийся ряд остается абсолютно сходящимся и сумма его не меняется.

Эта задача показывает, что можно говорить об абсолютной сходимости и сумме счетной системы чисел, не указывая порядка её просмотра (например, для чисел, записанных в клетках бесконечной клетчатой бумаги). Хотелось бы, однако, чтобы само определение суммы не упоминало порядка.

Пусть имеется счетное множество карточек, на каждой из которых написано действительное число. Для каждого конечного множества K карточек обозначим через $S(K)$ сумму чисел на всех карточках из K. Будем говорить, что число A является <u>суммой всех чисел на карточках</u>, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество карточек M, что для любого набора M', получающегося добавлением к M конечного числа карточек, справедливо неравенство $|S(M') - A| < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists M\ (\forall M' \supset M)(|S(M') - A| < \varepsilon).$$

В этом случае система чисел, записанных на карточках, называется <u>суммируемой</u>.

172.* Доказать, что если система суммируема, то, расположив её члены в любом порядке, получим сходящийся ряд, причем его сумма будет равна сумме системы.

173.* Доказать, что система неотрицательных чисел является суммируемой тогда и только тогда, когда множество всех чисел $S(K)$ для всех конечных K ограничено, и что в этом случае его точная верхняя грань и есть сумма.

174.* Доказать, что если система чисел такова, что сумма их модулей суммируема, то и исходная система суммируема.

175.* Дать новое доказательство утверждения о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда, использующее суммируемые системы.

176.* Для системы действительных чисел суммируемость равносильна суммируемости их модулей. Доказать.

177.* Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с неотрицательными значениями такова, что для любого конечного набора точек $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ при любом n справедливо неравенство $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \leq 1$. Доказать, что множество тех $x \in \mathbb{R}$, при которых $f(x) \neq 0$, счетно.

178. Доказать, что если члены абсолютно сходящегося ряда разбиты на группы, каждая из которых содержит конечное число членов, то ряд, составленный из сумм этих групп, является абсолютно сходящимся и имеет ту же сумму.

179.* Доказать, что ряд из действительных чисел абсолютно сходится тогда и только тогда, когда ряды, полученные из него вычеркиванием всех положительных или всех отрицательных чисел, сходятся (или имеют конечное число членов).

180.* Доказать, что если сходящийся ряд не является абсолютно сходящимся, то (1) можно переставить его члены так, чтобы он стал расходящимся; (2) для любого a можно переставить его члены так, чтобы он сходился к a.

I81.* Существует ли такой сходящийся ряд $\sum a_n$, что ряд $\sum a_n^3$ расходится? Могут ли все его члены быть неотрицательными?

I82.* Пусть $a_0 + a_1 + \ldots$ и $b_0 + b_1 + \ldots$ – два ряда. Назовем их <u>произведением в смысле Абеля ряд</u> $\sum c_i$, где $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots$ $c_n = a_0 b_n + \ldots + a_n b_0$. Доказать, что если ряды a и b абсолютно сходятся, то и их произведение абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм рядов a и b.

	a_0	a_1	a_2
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2

I83.* Доказать, что если один ряд сходится абсолютно, а другой просто сходится, то их произведение сходится и его сумма равна произведению сумм исходных рядов.

I84.* Привести пример двух сходящихся рядов, произведение которых расходится.

I85.**(Абель) Доказать, что если два ряда и их произведение сходятся, то сумма произведения равна произведению сумм.

Преобразование Абеля.

I86.* Пусть $A_0, \ldots, A_N$ и $B_0, \ldots, B_N$ – произвольные числа. Доказать, что

$$A_N B_N - A_0 B_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A_k (B_{k+1} - B_k) + \sum_{k=1}^{N} B_k (A_k - A_{k-1}).$$

(Замечание. $(uv)' = uv' + u'v$, поэтому

$$u(n)v(n) - u(0)v(0) = \int_0^n (uv)' = \int_0^n uv' + \int_0^n u'v.)$$

I87.* Найти с помощью преобразования Абеля сумму $\sum_{k=1}^{n} k x^k$. (Указание. $A_k = k$, $B_{k+1} - B_k = x^k$)

I88.* Доказать, что если последовательность $a_0, a_1, \ldots$ состоит из положительных членов, монотонно убывает и стремится к 0, а частичные суммы ряда $b_0 + b_1 + \ldots$ ограничены, то ряд $a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots$ сходится. (Указание. Взять $A_n = a_n$, $B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$ и применить преобразование Абеля.)

I89.* Вывести из предыдущей задачи признак Лейбница.

I90.* Доказать, что ряд $\sum (\sin n / n)$ сходится.

I9I.* Пусть $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ – неотрицательные числа. Доказать, что $\left(\sum x_n \text{ расходится}\right) \Leftrightarrow \left(\text{последовательность } P_n = (1+x_0) \cdot (1+x_1) \cdot \ldots (1+x_n) \text{ стремится к } +\infty\right)$.

I92.* Пусть $x_0, x_1, \ldots$ – неотрицательные числа, меньшие I. Доказать, что $\left(\sum x_n \text{ расходится}\right) \Leftrightarrow \left(P_n = (1-x_0) \ldots (1-x_n) \text{ сходится к } 0\right)$.

I93.* Доказать, что последовательность $P_n = (1-\frac{1}{2})^{-1} \cdot (1-\frac{1}{3})^{-1} \cdot (1-\frac{1}{5})^{-1} \cdot \ldots \cdot (1-\frac{1}{p_n})^{-1}$ (знаменатели – простые числа) стремится к $+\infty$. (Указание. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$)

I94.* Используя предыдущую задачу, доказать, что: (I) простых чисел бесконечно много; (2) ряд I/2 + I/3 + I/5 + ... расходится.