Площади

1. В квадрате площади 10 расположены 9 фигур площади 9. Доказать, что существует точка, принадлежащая всем фигурам.

2*. Внутри фигуры площади 10 расположено 4 фигуры площади 4. Доказать, что пересечение каких-то двух из них имеет площадь 1 или более.

3*. Дерево имеет 1500 листьев. Доказать, что можно так оборвать 700 из них, чтобы тень дерева после этого была не меньше 8/15 исходной.

4*. Вдоль коридора так постелены (налегающие друг на друга) ковровые дорожки, что если убрать любую из них, оставив остальные на месте, то оголится кусок пола. Доказать, что общая длина дорожек не более чем в 2 раза превосходит длину коридора.

5**. Фигуру, вырезанную из бумаги, раскрасили 10 красками с одной стороны. Затем её перевернули на другую сторону и разделили несколькими линиями на 10 частей. Доказать, что можно так раскрасить эти 10 частей 10 красками, чтобы каждая часть была окрашена своей краской, а площадь, окрашенная с обеих сторон одинаковой краской, составляла не менее 1/10 площади всей фигуры.

6. Часть круга закрасили черным цветом, причем площадь закрашенных участков составляет более половины площади круга. Доказать, что можно найти две черные точки, расположенные симметрично относительно центра круга.

7*. Даны две окружности, длина каждой 1983 см. На одной из отмечены 1983 точки, на другой - несколько дуг, сумма длин которых меньше 1. Доказать, что эти окружности можно так наложить друг на друга, что ни одна отмеченная точка не попадет ни на одну отмеченную дугу.

8*. На плоскости нарисована клетчатая сетка, разбивающая её на квадраты со стороной 1. Доказать, что любую фигуру площади 1983 можно так расположить на плоскости, чтобы она покрывала не менее 1983 узлов, а можно и так расположить на плоскости, чтобы она покрывала не более 1983 узлов.

9**. (Теорема Минковского) Выпуклая фигура площади более 4 имеет центр симметрии, являющийся одним из узлов клетчатой сетки, разбивающей плоскость на единичные квадраты. Доказать, что она покрывает еще по крайней мере 2 узла сетки.

10*. Вывести из теоремы Минковского, что существует точка с целыми координатами x, y (не равными 0 одновременно), отстоящая от прямой $y=\sqrt{2}x$ не более чем на 0.0001.

II. Может ли так быть, что длины всех сторон одного треугольника меньше I см, длины всех сторон второго больше I00 м, а площадь первого треугольника больше площади второго?

I2. Для любого невыпуклого 4-угольника найдется выпуклый с тем же периметром и большей площадью. Доказать.

I3. Прямоугольник $10 \cdot 50$ разрезан на I000 треугольников. Доказать, что хотя бы одна сторона одного из них не меньше I.

I4.* На отрезок длиной I0 см брызнули краской, причем так, что никакие две точки, отстоящие на I см, не закрашены одновременно. Доказать, что общая длина закрашенных участков не превосходит 6 см.

I5.* Доказать, что в круге радиуса I0 нельзя поместить 500 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше I.

I6.* Доказать, что число целочисленных решений неравенства $x^2 + y^2 \leq 100$ не большее 500.

I7.** Назовем прямоугольник полуцелым, если длина (по крайней мере) одной из его сторон - целое число. Доказать, что если прямоугольник можно разрезать на полуцелые прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам исходного, то он сам полуцелый.

I8.* Внутри квадрата со стороной I размещен выпуклый многоугольник площади больше 0.5. Доказать, что для любой из сторон квадрата существует параллельный ей отрезок длины 0.5, целиком лежащий внутри многоугольника.

I9.* Всякий выпуклый многоугольник площади I можно поместить в прямоугольник площади 2. Доказать.

20.* Имеется несколько точек. Любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не более I. Доказать, что их можно поместить в прямоугольник площади 2.

2I.* Параллелограмм внутри треугольника имеет площадь, не большую половины площади треугольника. Доказать.

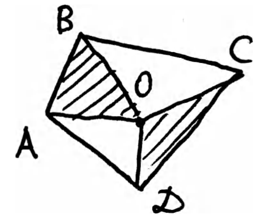
22.* Имеется набор квадратов общей площадью 4. Доказать, что ими можно покрыть квадрат площади I.

23.* Многоугольники M и N имеют равную площадь. Доказать, что они равносоставлены, т.е. что M можно разрезать на части, из которых можно составить N.

24.* Четырехугольник со сторонами a, b, c и d имеет площадь S. Доказать, что (I) $S \leq \frac{ab+cd}{2}$ (2) $S \leq \frac{ac+bd}{2}$.

25.** Доказать, что во всяком шестиугольнике есть диагональ, отсекающая от него треугольник, площадь которого составляет не более I/6 части площади шестиугольника.

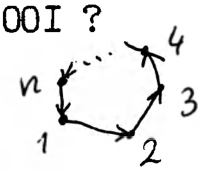
26.* Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найти множество всех точек O, для которых справедливо равенство $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC}$.



27.* Доказать, что центр окружности, вписанной в 4-угольник, лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей.

28.* Может ли треугольник с вершинами в узлах клетчатой сетки (сторона клетки – I) иметь площадь, меньшую 0.00I ?

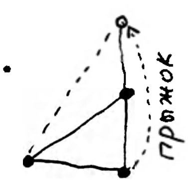
29.* Многоугольник имеет вершины с координатами $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.



Доказать, что его площадь равна

$$1/2\left((y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+\ldots+(y_n+y_1)(x_n-x_1)\right)$$

30.* Три кузнечика играют в чехарду на клетчатой бумаге со стороной клетки I. Правила такие. Вначале они садятся в 3 вершины одного (любого) квадратика. Затем любой из них может совершить прыжок через любого другого, оказавшись в симметричной точке (которая также будет узлом сетки). Доказать, что кузнечики могут оказаться в вершинах треугольника ABC тогда и только тогда, когда A, B и C – узлы сетки и площадь треугольника ABC равна I/2. (Такие треугольники мы будем называть простыми.)



3I.** Доказать, что треугольник с вершинами в узлах сетки является простым тогда и только тогда, когда внутри него и на его сторонах нет узлов сетки.

32.** (Формула Пика.) Доказать, что площадь S многоугольника с вершинами в узлах сетки равна $B + Г/2 - 1$ где B – число узлов сетки, лежащих внутри него, а $Г$ – число узлов, лежащих на его границе (считая вершины).

33.** Даны два разбиения единичного квадрата на I00 равновеликих частей. Доказать, что можно выбрать I00 точек так, чтобы в каждой части первого разбиения и в каждой части второго разбиения было по одной точке.

34.* Противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Доказать, что площади треугольников ACE и BDF равны.

Н. 2105 Т3 эт86   Н. 1866Т2 эт86