

## Комплексные числа, ч. I ( Структура поля. )

### I. Немного мистики.

Как известно, не существует такого действительного числа  $i$ , что  $i^2 = -1$ . Однако забудем на минуту об этом и постараемся сложить и перемножить по обычным правилам числа  $2+3i$  и  $7+2i$  :

$$(2+3i) + (7+2i) = (2+7) + (3+2)i = 9+5i;$$

$$(2+3i) \cdot (7+2i) = 14 + 4i + 21i + 6i^2 = (14-6) + (4+21)i = 8+25i.$$

1. Сложить и перемножить  $(2+3i)$  и  $(7-i)$ .

2. Найти  $(-i)^2$ ,  $(-i)^{10}$ .

3\* Найти  $(1+i)^{1001}$

4. Доказать тождество  $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$

5\* Найти  $x$ , для которого  $x \cdot (1+i) = 1$ .

6\* Найти  $x$ , для которого  $x^2 + 2x + 2 = 0$ .

7\* Найти  $x$ , для которого  $x^2 = i$ .

### 2. Точные определения.

Комплексным числом называется пара  $\langle a, b \rangle$ , где  $a, b$  - любые действительные числа. Комплексные числа  $\langle a, b \rangle$  и  $\langle a', b' \rangle$  равны, если  $a = a'$ ,  $b = b'$ . Иногда вместо  $\langle a, b \rangle$  пишут  $a + bi$ ; мы не придаем (пока) знакам  $+$  и  $i$  никакого смысла. Комплексное число  $\langle a, b \rangle$  можно изобразить точкой на координатной плоскости с координатами  $a$  и  $b$ . Множество комплексных чисел обозначается  $\mathbb{C}$  (complex - комплексное).

1. Изобразить числа  $2+3i$ ,  $7-i$ ,  $1+i$ .

Суммой чисел  $\langle a, b \rangle$  и  $\langle a', b' \rangle$  называется число  $\langle a+a', b+b' \rangle$ .

(Как для векторов.) Очевидно, выполнены аксиомы коммутативности ( $x+y = y+x$ ) и ассоциативности ( $(x+y)+z = x+(y+z)$ )

2. Какое комплексное число нужно назвать нулем ( $0$ ), чтобы для любого комплексного  $z$  выполнялась аксиома  $z+0 = z$ ?

3. Как определить операцию взятия противоположного ( $z \mapsto -z$ ), чтобы для любого комплексного  $z$  выполнялась аксиома  $z + (-z) = 0$ ?

Решив задачи 2 и 3, мы определили на  $\mathbb{C}$  операции, удовлетворяющие всем аксиомам сложения - и, следовательно, всем их следствиям. Так что теперь можно складывать и вычитать комплексные числа так же свободно, как и действительные. (Напомним, в частности, что  $z - w$  есть по определению  $z + (-w)$ .)

4. Точки, соответствующие комплексным числам  $z_1, z_2, z_3, z_4$  являются вершинами параллелограмма. Выразить  $z_4$  через  $z_1, z_2, z_3$ .

Произведением комплексных чисел  $\langle a, b \rangle$  и  $\langle a', b' \rangle$  называется число  $\langle aa' - bb', ab' + a'b \rangle$

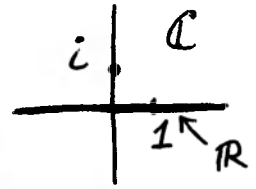
5. Найти  $\langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 7, -1 \rangle$ ,  $\langle 0, 1 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle$ .

6. Доказать справедливость аксиом коммутативности ( $xy = yx$ ), ассоциативности ( $x \cdot (yz) = (xy)z$ ) и дистрибутивности ( $x(y+z) = xy + xz$ ) умножения.

7. Какое число следует назвать единицей (1), чтобы выполнялась аксиома  $z \cdot 1 = z$  ?

О том, как определять  $1/z$ , мы скажем дальше.

Умножая и складывая комплексные числа, вторая компонента которых равна 0, мы видим ( $\langle a, 0 \rangle + \langle b, 0 \rangle = \langle a+b, 0 \rangle$ ,  $\langle a, 0 \rangle \cdot \langle b, 0 \rangle = \langle ab, 0 \rangle$ ), что они ведут себя так же, как действительные числа - их первые компоненты. Поэтому отождествляют действительное число  $a$  с комплексным числом  $\langle a, 0 \rangle$ . Так "действительная прямая" становится частью "комплексной плоскости". Обозначим число  $\langle 0, 1 \rangle$  через  $i$ .



8. Доказать, что  $i^2 = -1$

9. Доказать, что  $\langle a, b \rangle = a + bi$  (Полная запись:  $\langle a, b \rangle = \langle a, 0 \rangle + \langle b, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle$ .)

3. Действительная и мнимая части. Сопряжение. Модуль.

Действительной и мнимой частями комплексного числа  $\langle a, b \rangle$  называются (действительные) числа  $a$  и  $b$ . Обозначения:

$a = \text{Re}(z)$ ,  $b = \text{Im}(z)$  (*real* - действительный, *imaginary* - мнимый). Число  $\bar{z} = \langle a, -b \rangle$  называется сопряженным к числу

$z = \langle a, b \rangle$ . Модулем  $|z|$  числа  $z = \langle a, b \rangle$  называется расстояние от начала координат до изображающей число  $z$  точки комплексной плоскости:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1. Нарисовать множество  $\{z \mid \text{Re } z + \text{Im } z = 1\}$ .

2. Нарисовать множество  $\{z \mid \text{Im}((1+i)z) = 1\}$ .

3\* Нарисовать множество  $\{z^2 \mid \text{Im } z = 1\}$

4. Нарисовать множества  $\{z \mid z = \bar{z}\}$ ,  $\{z \mid z = -\bar{z}\}$ ,  $\{z \mid z = i\bar{z}\}$

5. Нарисовать множество  $\{z \mid 1 \leq |z| < 2\}$ .

6. Нарисовать множество  $\{z \mid |z + (1+i)| \leq 1\}$

7. Нарисовать множество  $\{z \mid |z+i| = |z+2i|\}$

8. Доказать, что  $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$ ,  $\overline{(zw)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ,  $\overline{\bar{z}} = z$  для любых  $z, w \in \mathbb{C}$ .

9. Доказать, что числа  $z \cdot \bar{z}$  и  $z + \bar{z}$  действительны (то есть их мнимая часть равна 0).

10\* Известно, что числа  $zw$  и  $z+w$  действительны. Доказать, что либо  $z$  и  $w$  оба действительны, либо  $z = \bar{w}$ .

II. Доказать, что  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$  (Внимание: слева стоит действительное число, а справа - комплексное. Более точно следовало бы написать  $\langle |z|^2, 0 \rangle = z \cdot \bar{z}$  .)

I2. Доказать, что  $|z+w| \leq |z|+|w|$  для любых  $z, w \in \mathbb{C}$  .

I3. Когда неравенство предыдущей задачи превращается в равенство?

I4. Доказать, что модуль произведения равен произведению модулей:  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  для всех  $z, w \in \mathbb{C}$  .

I5.\* Доказать, что если  $z \cdot w = 0$  , то  $z = 0$  или  $w = 0$  .

#### 4. Деление

I. Найти такое  $z$  , что  $z(1+i) = 1$  (Указание. Вычислите  $(1+i)(1-i)$  .)

2. Доказать, что для всякого  $z \neq 0$  найдется такое  $w$  , что  $zw = 1$  (Указание. Число  $z \cdot \bar{z}$  действительно.)

Решив задачу 2, мы получаем возможность ввести операцию взятия обратного  $z \mapsto 1/z$  , определенную при всех  $z \neq 0$  , так, чтобы выполнялась аксиома  $z \cdot (1/z) = 1$  для всех  $z \neq 0$  .

Как мы видим, для комплексных чисел выполнены все аксиомы сложения и умножения (см. "Действительные числа") и, следовательно, все их следствия. (Аксиомы  $z \cdot 0 = 0$  и  $1 + \dots + 1 \neq 0$  очевидно верны.)

3. Доказать, что если  $z \cdot w = 0$  , то  $z = 0$  или  $w = 0$  .

4. Вычислить  $1/i$  ,  $1/(-2i)$  ,  $1/(1+i)$  ,  $1/(4-7i)$  .

Напомним, что  $a/b$  есть по определению  $a \cdot (1/b)$

5. Вычислить  $(1+i)/(1-i)$  ,  $(3+4i)/(1+i)$  ,  $(5+i)/(1-5i)$  .

6. Доказать, что  $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$  .

#### 5. Квадратные уравнения.

I. Найти все комплексные  $z$  , для которых  $z^2 = 1$  . (Очевидно, I и -I таковы; есть ли другие?) (Указание:  $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$  )

2. Найти все комплексные  $z$  , для которых  $z^2 = -1$  .

3. Найти все комплексные  $z$  , для которых  $z^2 = a$  .

(Число  $a$  - произвольное действительное число.)

4. Числа  $a$  ,  $b$  ,  $c$  - произвольные действительные. При каких  $z$  выполнено равенство  $az^2 + bz + c = 0$  ?

5.\* Доказать, что для любого комплексного  $C$  уравнение  $z^2 = C$  имеет ровно 2 решения.

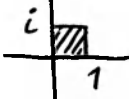
6.\* Решить уравнения  $z^2 = i$  ,  $z^2 = (1+i)$  .

7\* Доказать, что при любых комплексных  $a, b, c$  при  $a \neq 0$  уравнение  $az^2 + bz + c = 0$  имеет 1 или 2 решения в зависимости от того, равен ли дискриминант  $D = b^2 - 4ac$  нулю.

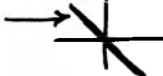
8. Разложить на множители многочлены  $z^2 + 1$  и  $z^2 - 2z + 2$ . (Многочлены - множители могут иметь комплексные коэффициенты.)

### 6. Комплексные числа и преобразования плоскости.

Функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  можно рассматривать как преобразования комплексной плоскости.

1. Найти образ и прообраз множества  при преобразовании  $f: z \mapsto z + (2+i)$

2. Какие преобразования (повороты, симметрии, гомотетии и т.д.) задают формулы: (1)  $z \mapsto \bar{z}$ ; (2)  $z \mapsto -z$ ; (3)  $z \mapsto iz$ ; (4)  $z \mapsto 2z$ ; (5)  $z \mapsto i\bar{z}$ ?

3\* Написать формулы, задающие: (1) центральную симметрию с центром  $(1+2i)$ ; (2) осевую симметрию с осью ; (3) гомотетию с центром  $1-i$  и коэффициентом 2.

4\* Найти образ прямой  $\operatorname{Re} z = 1$  при функции  $z \mapsto z^2$ .

5\* Доказать, что точки  $z$  и  $1/\bar{z}$  лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и произведение их модулей равно 1. (Указание.  $1/\bar{z} = z/(z\bar{z})$ ) Преобразование  $z \mapsto 1/\bar{z}$  называется инверсией с центром 0 и радиусом 1.

6\* Найти образ прямой  $\operatorname{Re} z = 1$  при функции  $z \mapsto 1/z$  (Указание. Это - окружность.)

7\*\* Доказать, что образом прямой или окружности при функции  $z \mapsto 1/z$  является прямая или окружность. (При этом прямая может перейти в окружность и наоборот!)

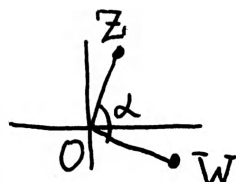
8\*\* Доказать аналогичное утверждение для функции  $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ .

9. Доказать, что если  $C$  - комплексное число, равное по модулю 1, то  $z \mapsto Cz$  есть движение (т.е. не меняет расстояний.) Мы увидим впоследствии, что это движение - поворот.

### 7. Разное.

1\* Изобразим комплексные числа  $z$  и  $w$  точками  $Z$  и  $W$  плоскости. Доказать, что

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |OZ| \cdot |OW| \cdot \cos \alpha$$



2\* Доказать, что если  $z$  - комплексный корень уравнения  $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  с действительными коэффициентами  $a_i$ , то  $\bar{z}$  - также его корень.

3\* Доказать, что если уравнение  $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  с действительными коэффициентами  $a_i$  имеет ровно 1983 корня, то оно имеет действительный корень.

4\* Найти все "автоморфизмы  $\mathbb{C}$  над  $\mathbb{R}$ ", т.е. все функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , для которых  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $f(xy) = f(x)f(y)$  для всех  $x, y \in \mathbb{C}$  и  $f(t) = t$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Назовем целым комплексным числом число вида  $a + bi$ , где  $a, b$  - целые (в обычном смысле) числа. Очевидно, сумма и произведение целых комплексных чисел - целое (комплексное) число. Множество всех целых комплексных чисел обозначается  $\mathbb{Z}[i]$ .

5\* Пусть  $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ . Говорят, что  $a$  делится на  $b$ , если существует  $c \in \mathbb{Z}[i]$ , для которого  $a = bc$ . Найти все делители числа 1. (Указание. Их четыре:  $\pm 1$  и  $\pm i$ . Чтобы доказать, что других нет, используйте формулу  $|zw| = |z| \cdot |w|$ .)

6\* Найдите все делители чисел 2 и 3.

7\* Число  $a \in \mathbb{Z}[i]$  называется простым (в  $\mathbb{Z}[i]$ ), если оно не имеет разложений  $a = bc$ , кроме тех, в которых  $b$  или  $c$  является делителем 1. Будут ли числа 2, 3, 5,  $1+i$  простыми?

8\* Разложить числа из предыдущей задачи на простые множители.

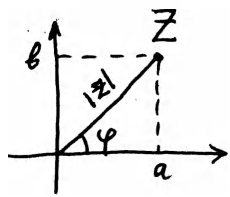
9\*\* Сформулировать и доказать теорему об однозначности разложения на простые множители для элементов  $\mathbb{Z}[i]$ .

10\*\* Доказать, что простое (в обычном смысле) число  $p$  будет простым в  $\mathbb{Z}[i]$  тогда и только тогда, когда уравнение  $x^2 + y^2 = p$  не имеет решений в обыкновенных целых числах.

11\*\* (Продолжение.) Доказать, что это бывает тогда и только тогда, когда  $p$  дает остаток 3 при делении на 4.

12\* Доказать, что если  $1/z_1 + 1/z_2 + \dots + 1/z_n = 0$  то найдутся такие положительные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , что  $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n = 0$ .

I. Модуль и аргумент.



Напомним, что комплексное число  $z = a + bi$  изображается точкой  $Z \langle a, b \rangle$ , а расстояние от начала координат до точки  $Z$  называется модулем числа  $z$  и обозначается  $|z|$ :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Аргументом числа  $z$  называется величина угла  $\varphi$ , на который нужно повернуть ось абсцисс для того, чтобы она проходила через точку  $Z$ . Число  $\varphi$  определено с точностью до кратных  $360^\circ$  (или  $2\pi$ , если углы измеряются в радианах): если  $\varphi$  - аргумент  $z$ , то  $\varphi + 360 \cdot k$  ( $\varphi + 2\pi k$ ) - также аргумент  $z$  (при целых  $k$ ).

1. Найти модуль и аргумент чисел  $i, 1+i, \sqrt{3}+i, 3-4i, -7$ .  
 2. Число  $z$  имеет модуль  $r$  и аргумент  $\varphi$ . Найти его действительную и мнимую части.

3. По модулю и аргументу (измерен в радианах) найти число:  
 (1)  $2, \pi$ ; (2)  $0, \pi/3$ ; (3)  $\sqrt{2}, -\pi/4$ ; (4)  $-2, 3\pi/2$ ; (5)  $1, \pi/2$ .

4. Число  $z_1$  имеет модуль  $r_1$  и аргумент  $\varphi_1$ , число  $z_2$  имеет модуль  $r_2$  и аргумент  $\varphi_2$ . Доказать, что их произведение  $z_1 z_2$  имеет модуль  $r_1 r_2$  и аргумент  $\varphi_1 + \varphi_2$ . (Указание. Использовать формулы для синуса и косинуса суммы.)

При умножении комплексных чисел модули умножаются, а аргументы складываются!

Мы видим, что аргумент подобен логарифму: аргумент произведения есть сумма аргументов. Это не случайно: на самом деле аргумент есть (при надлежащем понимании этих слов) "мнимая часть логарифма".

Обозначим через  $U(\varphi)$  комплексное число с модулем 1 и аргументом  $\varphi$ .

5. Доказать, что  $U(\varphi_1 + \varphi_2) = U(\varphi_1) \cdot U(\varphi_2)$ ,  $U(-\varphi) = 1/U(\varphi) = \overline{U(\varphi)}$ .  
 6. Доказать, что при целом  $n$  выполнено равенство  $U(n\varphi) = [U(\varphi)]^n$ .  
 7. Используя формулы  $(a+b)^2 = \dots$ ,  $(a+b)^3 = \dots$  и предыдущую задачу, выразить  $\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \cos 3\varphi, \sin 3\varphi$  через  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ .  
 8.\* Вычислить суммы  $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$  и  $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$ . (Указание. Использовать функцию  $U$  и формулу суммы геометрической прогрессии.)

9.\* Вычислить суммы  $\cos \varphi + 2\cos 2\varphi + \dots + n\cos n\varphi$  и  $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + n\sin n\varphi$ .

10. Пусть  $\varphi$  - произвольное число. Рассмотрим преобразование  $f$  комплексной плоскости, являющееся умножением на  $U(\varphi)$ :  
 $f(z) = z \cdot U(\varphi)$ . Что это за преобразование?

11.\* Пусть  $w$  - произвольное комплексное число. Доказать, что преобразование умножения на  $w$  ( $z \mapsto wz$ ) есть преобразование подобия, являющееся композицией поворота и гомотетии. Найти угол поворота и коэффициент гомотетии.

12.\* Доказать, что  $\cos \varphi + \cos(\varphi + \frac{360}{n}) + \cos(\varphi + 2 \cdot \frac{360}{n}) + \dots + \cos(\varphi + (n-1) \frac{360}{n}) = 0$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \varphi \in \mathbb{R}$ ).

2. Разные задачи.

13.\* Доказать, что если числа  $a, b, c$  являются вершинами равностороннего треугольника, то  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ . Верно ли обратное?

14. Какие значения может принимать аргумент числа  $z$ , если  $|z - 2i| < 1$ ?

15.\* Найти множество тех  $z$ , для которых (1)  $|(z-1)/(z+1)| = 1$ ; (2)  $|(z-1)/(z+1)| = 2$ .

16.\* На плоскости даны точки  $a$  и  $b$ . Где находятся те  $z$ , для которых число  $(z-a)/(z-b)$  (1) действительное; (2) чисто мнимое?

17.\* Доказать, что уравнение вида  $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + c = 0$ , где  $a \in \mathbb{C}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , задает пустое множество, точку или окружность. Как определить, что именно? Всякую ли окружность можно так задать?

3. Корни из единицы.

18. Найти все  $z$ , для которых  $z^n = 1$ . (Их  $n$ .) Они называются корнями  $n$ -ой степени из 1.

19. Найти все  $z$ , для которых  $z^n = a$  ( $a$  - заданное комплексное число).

20.\* Если  $z$  - корень  $n$ -ой степени из 1, то  $z^k$  - также корень  $n$ -ой степени из 1 (при любом  $k$ ). Если среди  $z^k$  при всех  $k \in \mathbb{Z}$  встречаются все корни  $n$ -ой степени из 1, то  $z$  называют первообразным корнем. Сколько существует первообразных корней  $n$ -ой степени, если (1)  $n = 6$ ; (2)  $n = 100$ ?

21.\* Доказать, что сумма всех корней  $n$ -ой степени из 1 равна 0 (при  $n > 1$ ).

22.\* Дан правильный многоугольник  $A_1 \dots A_n$ . Доказать, что сумма  $|XA_1|^2 + |XA_2|^2 + \dots + |XA_n|^2$  зависит лишь от расстояния от точки  $X$  до центра описанной около многоугольника окружности.

23.\* Имеется конечное множество  $S \subset \mathbb{C}$ , для которого выполнено такое свойство: произведение двух элементов из  $S$  принадлежит  $S$ . Известно, что  $0 \notin S$ . Доказать, что: (1)  $1 \in S$ ; (2) если  $x \in S$  то  $1/x \in S$ ; (3)  $|x| = 1$  для всех  $x \in S$ ; (4) всякий элемент  $x \in S$  является корнем некоторой степени из 1; (5)  $S$  состоит из всех корней степени  $n$  из 1, где  $n$  - число элементов в  $S$ .

24.\* Найти произведение всех корней степени  $n$  из 1.

25.\* Число  $x$  является корнем из 1 степеней  $a$  и  $b$ . Доказать, что оно является корнем из 1 степени НОД ( $a, b$ ). В частности, ни

одно число (кроме 1) не может одновременно быть корнем из  $I$  степеней  $a$  и  $b$ , если  $a$  и  $b$  взаимно просты.

26.\* Существует ли число  $z$  с  $|z|=1$ , не являющееся корнем из  $I$  (ни для какой степени)?

27.\*\* Является ли число  $3/5 + 4/5 i$  корнем из  $I$ ?

28.\*\* Какие числа вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  рациональны, являются корнями из  $I$ ? (Ответ:  $1, -1, i, -i$ .)

#### 4. Инверсия.

Инверсией с центром  $O$  и радиусом  $r$  называется преобразование, переводящее каждую отличную от  $O$  точку  $X$  в такую точку  $X'$ , лежащую на луче  $OX$ , что  $|OX| \cdot |OX'| = r^2$ .

29. Какие точки неподвижны при инверсии? Чему равно  $f \circ f$ , если  $f$  - инверсия?

30. Доказать, что если  $f$  - инверсия, а точки  $A$  и  $B$  не лежат на прямой, проходящей через центр инверсии, то около четырехугольника с вершинами  $A, B, f(A), f(B)$  можно описать окружность.

31.\* Доказать, что при инверсии прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, проходящие через центр инверсии; наоборот, окружности, проходящие через центр, переходят в прямые, не проходящие через центр.

32.\* Доказать, что окружности, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, не проходящие через центр инверсии.

33.\* Куда переходит число  $z$  при инверсии с центром  $O$  и радиусом  $r$ ?

34.\* Нарисовать множество  $\{z \mid \operatorname{Re}(1/z) = 1/2\}$ .

35.\* Доказать, что при преобразовании  $z \mapsto 1/z$  прямые и окружности переходят в прямые и окружности (хотя окружности могут перейти в прямые, а прямые - в окружности).

36.\* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование (преобразование вида  $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad-bc \neq 0$ ) является композицией нескольких преобразований, каждое из которых есть либо сдвиг ( $z \mapsto z+c$ ), либо гомотетия ( $z \mapsto kz$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ), либо поворот вокруг начала координат, либо преобразование  $z \mapsto 1/z$ . Что будет при  $ad-bc=0$ ?

37.\* Доказать, что при дробно-линейном преобразовании прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

38.\* Доказать, что при инверсии сохраняются углы между окружностями и прямыми: если окружности (или окружность и прямая, или две прямые) пересекались под углом  $\alpha$ , то их образы тоже пересекаются под углом  $\alpha$  (Угол измеряется как угол между касательными.)

39.\* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование сохраняет углы между прямыми и окружностями.

40.\* Построить дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость  $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  в единичный круг  $\{z \mid |z| < 1\}$ .