

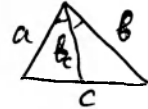
Задачи для письменных работ по геометрии.

I. Обозначим точки пересечения медиан треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  через  $M_1$  и  $M_2$ . Доказать, что  $\vec{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2})$ .

2. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Доказать, что  $\vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HC}$

3. Показать, что в треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$  равна  $(|AB| \cdot \vec{AC} + |AC| \cdot \vec{AB}) / (|AB| + |AC|)$

4. Используя предыдущую задачу, доказать, что  $v_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}$ , где  $p$  — полупериметр.



5. Доказать, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе, (1) делит прямой угол пополам; (2) имеет длину, равную сумме длин катетов, умноженной на

6. Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника постоянна. Выразить её через сторону треугольника.

7. В треугольнике  $a^2 + b^2 = 5c^2$ . Доказать, что 2 медианы взаимно перпендикулярны. Верно ли обратное?

8. В треугольнике  $ABC$  единичной площади проведен отрезок  $AD$ , пересекающий медиану  $CF$  в точке  $M$ , причем  $FM = \frac{1}{4}CF$ . Найти площадь треугольника  $ABD$ .

9. Доказать, что если в треугольнике со сторонами  $a, b, c$  прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан, перпендикулярна  $c$ , то  $a^2 + b^2 = 2c^2$ . Верно ли обратное?

10. Стороны параллелограмма пропорциональны его диагоналям. Доказать, что углы параллелограмма равны углам между его диагоналями.

11. Выразить величину задачи 2 через стороны треугольника.

12. В окружность вписан треугольник  $ABC$ . Биссектриса угла  $ACB$  пересекает окружность в точке  $S$ . Выразить  $\vec{CS}$  через  $\vec{CA}$  и  $\vec{CB}$ .

13. Доказать, что в треугольнике со сторонами  $a, b, c$  и радиусом описанной окружности  $R$  имеет место равенство  $|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ , где  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — точка пересечения высот.

14. Радиус вписанной в треугольник окружности равен  $r$ , радиус описанной окружности равен  $R$ . Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.