Листок Г.I. Задачи по геометрии.

В задачах I – 7 требуется доказать равенство треугольников, если в них равны некоторые отрезки и углы. (Обозначения: A, B, C – величины углов, a, в, c – длины противолежащих им сторон, m_a, m_b, m_c – медианы, проведенные к сторонам a, b, c; h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на стороны a, b, c.

I. a, b, m_a. 2. a, b, m_c. 3. $a, b+c, C$.
4. $b+c, C, h_a$. 5. $a, b-c, C$.
6. a, m_a, радиус описанной окружности. 7. A, h_a, m_a.

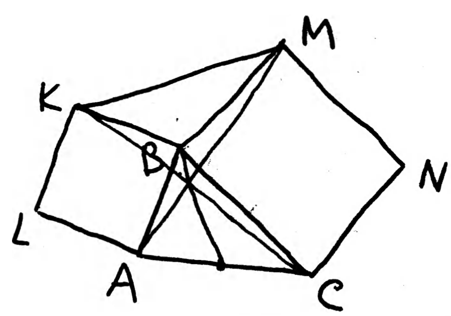
8. Доказать, что в любом треугольнике медиана, проведенная к одной стороне, меньше полусуммы двух других сторон.

9. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CH на гипотенузу AB. CM – биссектриса угла ACH, M лежит на AB. Доказать, что BM равно BC.

IO. Даны точки A, B и прямая ℓ. Найти на прямой ℓ такую точку C, чтобы: а) AC + BC было минимальным; б) AC – BC было максимальным.

II. На плоскости нарисовали несколько точек и из каждой из них провели отрезок, соединяющий ее с ближайшей к ней точкой (одинаково близких не оказалось). Могут ли некоторые из полученных отрезков: а) образовать замкнутый многоугольник; б)* пересекаться?

I2. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты ABKL и BCNM. Доказать, что: а) отрезки AM и KC равны и перпендикулярны; б) отрезок KM перпендикулярен медиане треугольника ABC, проведенной из точки B и вдвое длиннее ее.



I3.* Диагонали выпуклого четырехугольника ABCД пересекаются в точке O. Известно, что периметры треугольников AOB, BOC, COД, AOД равны. Доказать, что стороны четырехугольника ABCД равны.

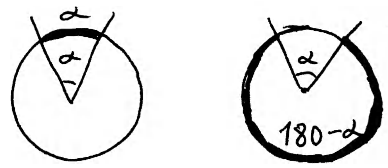
I4. На кубе (многограннике, все грани которого – четырехугольники с равными сторонами и прямыми углами) из одной вершины проведены диагонали двух граней. Найти угол между ними.

Учёт решенных задач ______________________
(фамилия, имя)

номер	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IOа	IOб	IIа	IIб	I2а	I2б	I3	I4
когда																	
кем																	

Листок Г.2. Задачи по геометрии. (Окружность.)

Напомним некоторые определения. Дугой называется часть окружности, заключенная между двумя точками. Величиной дуги называется величина

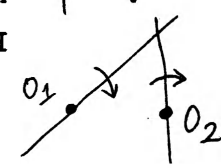


угла α, вершина которого в центре окружности, а стороны проходят через концы дуги, если дуга лежит внутри него, и $360^\circ - \alpha$ если дуга лежит вне угла. Касательной к окружности называется прямая, проходящая через некоторую точку A этой окружности и перпендикулярная радиусу OA. Основным фактом всего учения об окружности является такая

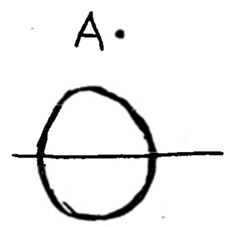
ТЕОРЕМА. ВЕЛИЧИНА ВПИСАННОГО УГЛА РАВНА ПОЛОВИНЕ ДУГИ, НА КОТОРУЮ ОН ОПИРАЕТСЯ.

1. Докажите, что перпендикуляр к хорде (проходящий через центр окружности) делит ее пополам.
2. Две дуги, меньшие 180°, равны тогда и только тогда, когда равны стягивающие их хорды. (Рассматриваются дуги одной окружности.)
3. Две дуги, отсеченные от окружности параллельными прямыми, равны.

4. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны.
5. Дан отрезок AB и угол φ. Найти множества тех точек, из которых отрезок виден под углом: равным φ; большим φ; меньшим φ.
6. Две прямые, закрепленные в точках O_1 и O_2, вращаются со скоростью 1 об/мин. Какую кривую описывает точка их пересечения?



7. Для каких треугольников центр описанной окружности лежит внутри треугольника?
8. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.
9. Построить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне этой окружности.
10. Построить общие касательные двух непересекающихся окружностей (их четыре!).
11. Окружность касается двух параллельных прямых. Под каким углом виден из центра этой окружности отрезок, отсекаемый прямыми от касательной к окружности?
12. В середине лестницы, стоящей у стены, сидит котенок. По какой кривой он будет двигаться, когда лестница начнет скользить и падать?
13. Окружность с центром O и радиусом r является вневписанной для треугольника ABC (точка O принадлежит углу A). Известно, что $AO = a$. Найдите периметр треугольника.
14. Нарисуйте множество точек, из которых данный треугольник виден под тупым углом.
15*. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены круги. Доказать, что они покроют весь четырехугольник.



I6*. Нарисована окружность с диаметром. Пользуясь только линейкой, опустить из точки A (см. рисунок) перпендикуляр на диаметр.

I7. Доказать, что середины всех хорд окружности, проходящих через некоторую точку A, лежат на одной окружности.

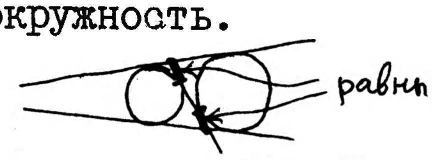
I8. (Важный факт!) Доказать, что во вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180°.

I9. (Важный факт!) Доказать, что если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то его можно вписать в окружность.

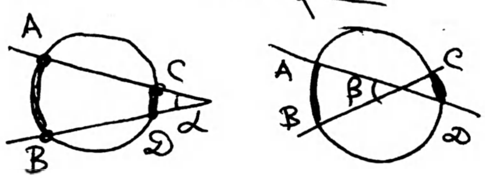
20. (Важный факт!) Доказать, что в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

2I. (Важный факт!) Доказать, что если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

22*. Доказать, что отрезки, указанные на рисунке, равны.



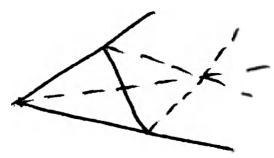
23. (Важный факт!) Доказать, что угол α равен полуразности величин дуг AB и CD, а угол β равен полусумме величин этих дуг.



24. Окружность разбита четырьмя точками на четыре дуги. Их середины обозначены (по кругу) A, B, C и D. Доказать, что $AC \perp BD$

25*. Доказать, что точка, симметричная точке пересечения высот треугольника относительно любой его стороны, лежит на описанной окружности.

26. Доказать, что биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке.



27*. Четыре прямые при пересечении образуют четыре треугольника. Доказать, что окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку.

28. Доказать, что угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине дуги, отсекаемой этой хордой.

29. Стороны треугольника равны a, b, c. Найти отрезки, на которые они делятся точками касания со вписанной окружностью.

30. Стороны описанного шестиугольника равны II,I2,I3,I4,I5 и a (в указанном порядке). Найти a.

3I*. Перпендикуляры, опущенные из (середин сторон) ~~вершин~~ вписанного в окружность четырехугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

32*. Три окружности радиуса I пересекаются в одной точке. Доказать, что радиус окружности, проходящей через их центры, равен I.

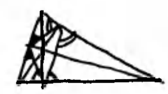
33*. На окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC, взята точка M, лежащая на дуге BC. Доказать, что $AM=BM+CM$.

34* Дана окружность и на ней три различные точки, в которых с ней пересекаются продолжения высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из одной вершины вписанного в окружность треугольника. Постройте этот треугольник.

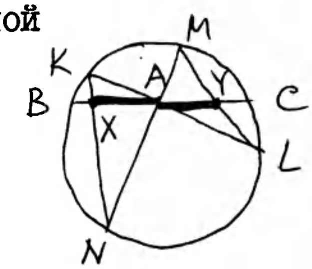
35* Построить треугольникам по радиусам вписанной и вневписанной окружностей и периметру.

36* Через точки A и B пересечения двух окружностей проведены две прямые. Пусть C и D – точки их пересечения с первой окружностью, E и F – со второй. Доказать, что $CD \parallel EF$.

37* В треугольнике проведены три высоты. Доказать, что отмеченные на рисунке углы попарно равны.



38* (Задача о бабочке.) Через середину A произвольной хорды BC окружности проведены две секущие KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от BC), KN пересекает BC в точке X , ML – в точке Y . Доказать, что $AX = AY$.



39* Доказать, что в любом треугольнике три середины сторон, три основания высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от точки их пересечения до вершин, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

40* Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.

41* Окружность катится без проскальзывания по окружности вдвое большего радиуса, оставаясь внутри неё. Доказать, что любая точка внутренней окружности движется при этом по прямой.

У Ч Е Т   Р Е Ш Е Н Н Ы Х   З А Д А Ч

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41

Листок Г.3   Задачи по геометрии

2 I. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ на основании AC взята точка M так, что $AM=a$, $MC=b$. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM.

1 2. Доказать, что прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

1 3. Дана окружность и точка A вне ее. AB и AC – касательные к окружности (B и C – точки касания). Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

1 4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Определить расстояние между серединой отрезка AM, где M – середина BC, и точкой N на стороне CD, делящей её в отношении $CN:ND=3:1$.

1 5. В окружности радиуса R проведен диаметр и на нем взята точка A на расстоянии a от центра. Найти радиус второй окружности, которая касается диаметра в точке A и изнутри касается данной окружности.

2 6. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды равной длины. Каждая хорда делится точками пересечения на 3 равные части. Найти радиус окружности, если длина каждой из хорд равна a.

1 7. Найти сумму квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд, если радиус окружности равен R, а расстояние от M до центра равно a.

1 8. Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров. Доказать.

9. Общаа хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, зная расстояние между их центрами.

2 I0. В треугольнике ABC сторона AB равна 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найти AC.

2 II. В треугольнике ABC на наибольшей стороне AC, равной b, выбрана точка M. Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и BCM.

3 I2. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектрисы внутренних углов A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D – в точке N. Докажите, что длина отрезка MN равна $1/2\,(AD+BC-AB-CD)$.

3 I3. Из точек K, E, H, лежащих соответственно на сторонах

AB, BC и CA треугольника ABC, восставлены к этим сторонам перпендикуляры. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AK^2+BE^2+CH^2 = KB^2+EC^2+HA^2$

(2) 14. На двух смежных сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABE и BCF. Докажите, что треугольник DEF равносторонний.

(2) 15. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC с центром квадрата, построенного на гипотенузе, делит угол C пополам и равен $\sqrt{2}/2\cdot(AC+BC)$.

(3) 16. На плоскости даны три точки. Построить четырехугольник, для которого эти точки были бы серединами трех последовательных равных сторон.

(3) 17. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $OC=AB$. Найти угол при вершине C.

(3) 18. Найдите угол C треугольника ABC, если расстояние от вершины C до точки пересечения высот равно радиусу описанной окружности.

(3) 19. Найдите угол C треугольника ABC, если вершина A равноудалена от центров вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и BC.

(2) 20. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и четыре круга, каждый из которых касается одной стороны четыреугольника и продолжений двух соседних с ней сторон. Доказать, что центры этих кругов лежат на одной окружности.

(3) 21. Даны две окружности разных радиусов, лежащие одна вне другой, и точка A на одной из них. Построить окружность, касающуюся двух данных и проходящую через точку A.

(3) 22. Даны окружность, прямая и точка A на прямой. Построить окружность, касающуюся данных прямой и окружности и проходящую через точку A.

(1) 23. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

(2) 24. Даны длины сторон четырехугольника $ABCD$. Построить этот четырехугольник, если известно, что диагональ AC делит угол A пополам.

(2) 25. Построить треугольник по точкам пересечения продолжений биссектрисы, медианы и высоты, выходящих из одной вершины с описанной окружностью

(1) 26. Построить параллелограмм, если известны диагональ и высоты.

(2) 27. Построить треугольник по медиане к одной стороне и высотам к двум другим.

Листок Г.4. Задачи по геометрии.

Этот листок содержит геометрические задачи, большинство из которых требует применения подобия. Напомним основные свойства подобных треугольников.

Определение. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

Признаки подобия. Если I) $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$ или 2) $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$ или 3) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

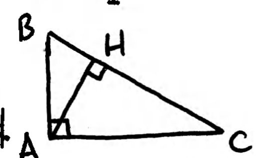
I. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника ABC подобен треугольнику ABC.

2. Дана окружность и точка O, лежащая внутри неё. Хорда AB проходит через точку O. Доказать, что $|OA|\cdot|OB|$ не зависит от выбора хорды AB. (Важный факт!)

3. Дана окружность и точка O, лежащая вне её. Прямая проходит через точку O и пересекает окружность в точках A и B. Доказать, что $|OA|\cdot|OB|$ не зависит от выбора прямой и равно квадрату отрезка касательной к окружности, проходящей через точку O. (Важный факт!)

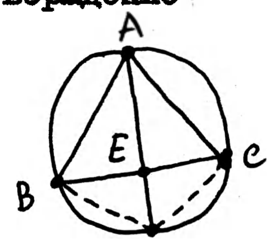
4.* Три окружности радиуса I проходят через точку A. Доказать, что три другие точки их пересечения лежат на окружности радиуса I.

5.* Доказать, что если у шестиугольника, вписанного в окружность, две пары противоположных сторон параллельны, то и оставшиеся 2 противоположные стороны параллельны.



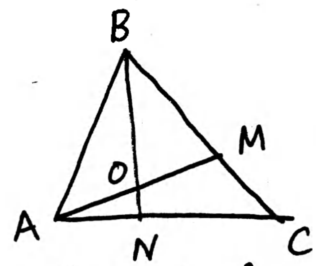
6. Доказать теорему Пифагора, используя подобие треугольников, изображенных на рисунке. Доказать, что $|AH|^2=|BH|\cdot|HC|$

7. Докажите, что биссектриса AE треугольника ABC делит сторону BC в отношении $AB : AC$. Докажите аналогичное утверждение для биссектрисы внешнего угла. (Важный факт!)



8.* В треугольнике ABC проведена биссектриса AE. Докажите, что $|AE|^2=|AB|\cdot|AC|-|EB|\cdot|EC|$ (Указание. Описать окружность около ABC и продолжить AE до пересечения с этой окружностью)

9.* Используя задачи 7 и 8, выразить длину биссектрисы через стороны треугольника.



I0.* Дан треугольник ABC. Из его медиан построен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан этого треугольника – треугольник $A_2B_2C_2$. Доказать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны и определить коэффициент подобия.

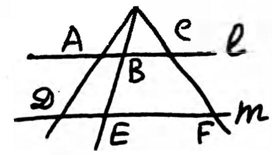
II. (См. рисунок) Найти $AO : OM$, если $AN : NC = a$, $BM : MC = b$.

I2.* В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Доказать, что $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

13.* Точка A лежит внутри 6 окружностей. Доказать, что центр одной из этих 6 окружностей лежит внутри какой-то другой из них.

14. В окружности проведены 2 радиуса. Построить хорду, которая делится ими на 3 равные части.

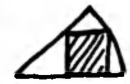
15. Прямые l и m (см. рисунок) параллельны; доказать, что $|AB|/|BC| = |DE|/|EF|$.



16.* У шестиугольника противоположные стороны параллельны, а все диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны. Доказать, что вокруг него можно описать окружность.

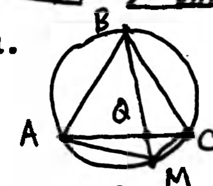
17.* Всегда ли окружность, описанная около треугольника ABC, будет окружностью наименьшего радиуса, содержащей точки A, B и C? Если нет, то как найти окружность наименьшего радиуса с этим свойством?

18. Построить окружность, вписанную в данный сектор круга.

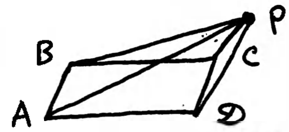


19. Построить квадрат, вписанный в данный сектор круга.

20.* Треугольник ABC равносторонний, M – любая точка дуги AC описанной окружности. Доказать, что $1/MA + 1/MC = 1/MQ$



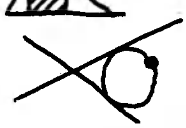
21.** Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, $\angle PBC = \angle PDC$. Доказать, что $\angle BPA = \angle DPC$.



22.* На стороне AC равностороннего треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность. Доказать, что прямые, проходящие через B и делящие эту полуокружность на 3 равные части, делят сторону AC на три равные части.

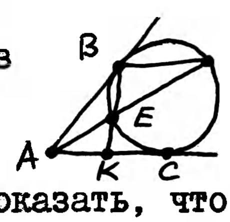
23. Построить квадрат, вписанный в данный треугольник.

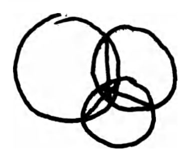
24. Построить окружность, касающуюся двух данных прямых и проходящую через данную точку. Сколько решений имеет задача?



25. Построить параллелограмм по двум сторонам и углу между диагоналями.

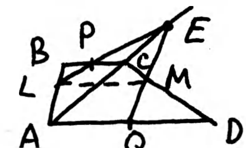
26.** Окружность касается сторон угла A в точках B и C, $BD \parallel AC$. Доказать, что $|AK| = |KC|$



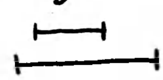


27.** Даны три пересекающиеся окружности. Доказать, что их попарные общие хорды проходят через одну точку.

28.* $ABCD$ – трапеция, P, Q – середины сторон. Доказать, что $LM \parallel AD$.



29.* Даны два параллельных отрезка. С помощью линейки (I) разделить один из них пополам; (2) удвоить второй.



Учет решенных задач листка Г.4

№	I	2	3	4*	5*	6	7	8*	9*	I0*	II	I2*	I3*	I4	15	16*	17*	18	19	20*	21**	22*	23	24	25	26**	27**	28*	29*