Группы

Пусть в некотором множестве G определены: (I) операция $*$, ставящая в соответствие любым двум элементам $x, y \in G$ некоторый элемент $x * y$; (2) операция i, ставящая в соответствие любому $x \in G$ некоторый элемент $i(x)$; (3) некоторый элемент $n \in G$, причем выполняются такие свойства (для любых $x, y, z \in G$):

(I) $x * (y * z) = (x * y) * z$

(2) $x * n = n * x = x$

(3) $x * i(x) = i(x) * x = n$

В этом случае множество G называется <u>группой</u>.

В приводимых далее примерах групп мы иногда указываем лишь операцию $*$.

(I) Пусть $G = \mathbb{R}$, $x * y = x + y$, $n = 0$, $i(x) = -x$. Получается <u>аддитивная группа $\mathbb{R}$</u>.

(2) Заменив $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{C}$, получаем <u>аддитивные группы рациональных, целых или комплексных чисел</u>.

(3) Пусть $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x * y = x \cdot y$. Получается <u>мультипликативная группа $\mathbb{R}^*$</u>. (Здесь $\mathbb{R}$ также можно заменить на $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$ – но не на $\mathbb{Z}$!)

(4) Пусть M – некоторое множество, G – множество всех взаимно однозначных функций из M в M, $f * g$ – композиция f и g. Получается <u>группа перестановок</u> множества M.

(5) <u>Группа движений плоскости</u> состоит из всех движений (взаимно однозначных функций, сохраняющих расстояние), операция $*$ – композиция движений.

(6) Если рассматривать не все движения плоскости, а лишь те, которые отображают некоторое множество M точек плоскости <u>на</u> себя, получим <u>группу симметрий</u> множества M.

(7) Пусть $m \geq 1$ – некоторое натуральное число. Рассмотрим множество G всех возможных остатков при делении на m: $G = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Через $x * y$ обозначим остаток, который дает при делении на m сумма чисел с остатками x и y (напомним, что остаток от деления суммы определяется остатками слагаемых). Получающаяся группа обозначается $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

$b \backslash a$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$a * b$ $\boxed{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$

(8) Пусть m – натуральное число. Рассмотрим остатки от деления на m, <u>взаимно простые с</u> m. (При m = 4 это I и 3, при простом m – I, 2,..., $m-1$.) Через $x*y$ обозначим остаток, который дает при делении на m произведение чисел с остатками x и y. Оказывается,

$b \backslash a$	1	3
1	1	3
3	3	1

$a * b$ $\boxed{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*}$

что $x * y$ лежит в нашем множестве. Возникающая группа обозначается $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

I. Указать, как нужно определить элемент n и операцию i в тех примерах, где это не указано.

2. Доказать, что (I) $x*(y*(z*t)) = ((x*y)*z)*t$; (2) если $x*y = x*z$, то $y = z$; (3) $i(x*y) = i(y)*i(x)$, $i(i(a)) = a$, $i(n) = n$; (4) $(a*x = b) \Leftrightarrow (x = i(a)*b)$.

3. Доказать, что если $n_1 * x = x$ при всех $x \in G$, то $n_1 = n$. ("единственность нейтрального элемента"). Доказать, что если $x*y = n$, то $y = i(x)$ ("единственность ").

4. Доказать, что для любого $a \in G$ функция $l_a : G \to G$, для которой $l_a(x) = a * x$, является взаимно однозначным отображением G в G. Чему равны $l_a \circ l_b$ и $(l_a)^{-1}$?

5. Доказать, что если операция $*$ на множестве G такова, что $x*(y*z) = (x*y)*z$ и для любых a и $b \in G$ найдутся такие x и y, что $a*x = b$, $y*a = b$, то можно определить функцию i и элемент n, превращающие G в группу.

Обычно операция в группе обозначается не $*$, а $\cdot$ или $+$ ("мультипликативная" и "аддитивная" записи). В соответствии с этим n обозначается через I или 0, а $i(x)$ – через $-x$ или x^{-1}. Аддитивная запись применяется для коммутативных (=абелевых) групп, в которых $x*y = y*x$.

6. Доказать, что если $x*x = n$ при всех $x \in G$, то G коммутативна.

В дальнейшем мы будем пользоваться в основном мультипликативной записью. Через x^n обозначается $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n раз).

Говорят, что элемент a группы G имеет конечный порядок, если существует такое n, что $a^n = 1$. Наименьшее из таких n называется порядком элемента a.

7. Указать все элементы конечного порядка в (I) аддитивной группе $\mathbb{R}$; (2) мультипликативных группах $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$; (3) группе поворотов плоскости вокруг данной точки; (4) группе всех движений плоскости.

8. Доказать, что в конечной группе всякий элемент имеет конечный порядок. (Указание. В последовательности $1, a, a^2, \ldots$ есть совпадающие элементы.)

9. Элемент a имеет порядок k. Доказать, что $(a^n = 1) \Leftrightarrow (n$ делится на $k)$.

10. Какие порядки могут иметь элементы группы перестановок множества из 9 элементов?

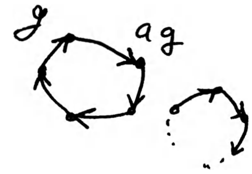
11. Найти порядки всех элементов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

12. Доказать, что порядки элементов a и a^{-1} равны. Доказать, что порядки элементов ab и ba равны. Доказать, что порядки элементов abc , bca и cab равны.

13. Элементы a и b группы G имеют конечный порядок. Можно ли утверждать, что элемент ab имеет конечный порядок?

14. Порядок элемента a равен k . Чему равен порядок элемента a^n.

15. Пусть a – элемент конечной группы G . Изобразим элементы G точками и проведем из каждого g стрелку в ag . Доказать, что стрелки образуют несколько циклов, не связанных друг с другом и содержащих одинаковое количество элементов.



16. Пусть a – элемент конечной группы G . Доказать, что число элементов G (<u>порядок</u> G) делится на порядок a .

17. (Теорема Ферма – Эйлера.) Пусть m – натуральное число, $\varphi(m)$ – количество чисел от 0 до $m-1$, взаимно простых с m, а число a взаимно просто с m . Доказать, что $a^{\varphi(m)}-1$ делится на m . (Указание. См. предыдущую задачу.)

18. Вывести из утверждения предыдущей задачи "малую теорему Ферма": если p простое, то $a^p - a$ делится на p .

19. Придумать бесконечную группу, в которой каждый элемент имел бы конечный порядок (например, 2).

20. Существует ли группа из 4 элементов, в которой каждый элемент имел бы порядок 2 ?

21. Доказать, что при простом p в группе $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ имеется элемент порядка $p-1$.

22. Будем многократно применять одно и то же преобразование к "кубику Рубика". Доказать, что рано или поздно он вернется в первоначальное положение.

<u>Группа перестановок</u>

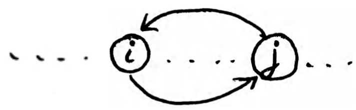
23. Пусть M – конечное множество из n элементов. Сколько элементов содержит группа перестановок множества M ?

24. Коммутативна ли эта группа?

25. Назовем <u>транспозицией</u> перестановку M , меняющую два элемента местами и оставляющую остальные элементы на месте: $a \mapsto b$, $b \mapsto a$, $x \mapsto x$ при $x \neq a, b$. Доказать,

что всякая перестановка представляется в виде произведения транспозиций. (Расположенные в ряд предметы можно переложить как угодно, несколько раз поменяв местами пары предметов.)

26. Имеется n расположенных в ряд бирок, на которых написаны числа от I до n. Назовем <u>числом беспорядков</u> количество таких пар $\langle i, j \rangle$, что $i < j$, а i-ая бирка находится правее j-ой. Доказать, что при перестановке двух бирок четность числа беспорядков меняется (из четного оно делается нечетным и обратно).

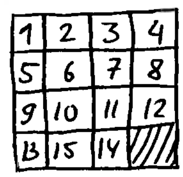


27. Доказать, что произведение нечетного числа транспозиций не может быть равно тождественной перестановке. (Указание. См. предыдущую задачу.)

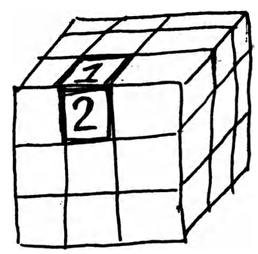
Перестановка называется <u>четной</u>, если она представима как произведение четного числа транспозиций, и <u>нечетной</u>, если она представима как произведение нечетного числа транспозиций.

28. Доказать, что никакая перестановка не является четной и нечетной одновременно, что произведение двух четных или двух нечетных четных четно, а произведение нечетной и четной перестановок нечетно.

29. Доказать, что количество четных перестановок равно количеству нечетных перестановок.

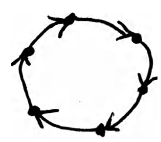


30. Доказать, что в игре "I5" нельзя поменять местами фишки "I4" и "I5", оставив остальные на месте и не нарушая правил игры.



31. Доказать, что нельзя, играя с кубиком Рубика, добиться того, чтобы (I) указанные на рисунке грани I и 2 поменялись бы местами, а остальные грани остались бы на месте; (2) угловые кубики одной из граней циклически переставились, а все остальные кубики остались бы на местах (возможно, повернувшись!).

32. <u>Циклом</u> порядка k называется перестановка такого вида: k элементов переходят друг в друга по кругу, остальные переходят в себя. Доказать, что всякая перестановка представима в виде произведения независимых циклов (два цикла называются <u>независимыми</u>, если элементы, сдвигаемые одним, оставляются на месте другим).



33. Доказать, что всякая четная перестановка представима в виде произведения нескольких циклов длины 3.

34. Два элемента группы x и y называются <u>сопряженными</u>, если $x = hyh^{-1}$ для некоторого элемента h этой группы. Какие элементы сопряжены в группе перестановок?

Подгруппы

Пусть G - группа, H - некоторое подмножество G. Оно называется подгруппой, если $n \in H$, $i(x) \in H$ для любого $x \in H$ и $x * y \in H$ для любых $x, y \in H$.

Например, $\mathbb{Z}$ - подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$.

35. Доказать, что для любого n множество $n\mathbb{Z}$ всех кратных n является подгруппой в $\mathbb{Z}$. Есть ли в $\mathbb{Z}$ другие подгруппы?

36. Является ли подгруппой группы перестановок множества M множество перестановок, имеющих неподвижную точку (таких перестановок σ, что $\sigma(x)=x$ для некоторого $x \in M$)? Образуют ли подгруппу перестановки, оставляющие на месте данный элемент $x \in M$?

37. Найти все подгруппы группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

38. Найти все конечные подгруппы группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению.

39. Найти все подгруппы в группах симметрий правильного треугольника и квадрата.

40. Доказать, что для конечной группы G в определении подгруппы можно опустить условия $n \in H$ и $i(x) \in H$: если $x * y \in H$ для любых $x, y \in H$, то H - подгруппа. Существенна ли конечность G ?

41. Пусть G - группа, $H \subset G$ - подгруппа. Для каждого элемента $a \in G$ через Ha обозначим все элементы G, которые можно получить, умножая какой-то элемент H на a : $Ha = \{ha \mid h \in H\}$. Доказать, что для любых a и b либо $Ha = Hb$, либо Ha не пересекается с Hb.

42. (Теорема Лагранжа.) Пусть G - конечная группа, H - ее подгруппа. Доказать, что порядок G делится на порядок H. (Порядок = число элементов.) (Указание. См. предыдущую задачу.)

43. Вывести из теоремы Лагранжа утверждение задачи 9.

44. Пусть H - подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$. Доказать, что либо H состоит из всех кратных некоторого действительного числа α, либо H всюду плотно в $\mathbb{R}$ (т.е. в любом интервале есть элемент H).

45. Вывести из предыдущей задачи, что дробная часть числа $n\sqrt{2}$ при некотором $n \neq 0$ меньше 0.0001. (Указание. Числа $m + n\sqrt{2}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ образуют подгруппу в $\mathbb{R}$.)

46. Найти все конечные подгруппы (1) группы поворотов плоскости вокруг данной точки; (2) группы всех движений плоскости, для которых данная точка неподвижна.

Изоморфизм

Группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ остатков от деления на 2 по существу тождественна группе $\{+I, \ -I\}$ по умножению. Можно считать, что мы имеем дело по существу с одной и той же группой, а различаются лишь обозначения элементов: $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow (-1)$. Говорят, что эти группы изоморфны, а функция $0 \mapsto I$, $I \mapsto -I$ есть их изоморфизм.

a\b	0	1
0	0	1
1	1	0

$a * b$

a	0	1
	0	1

$i(a)$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

a\b	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$a * b$

a	1	-1
	1	-1

$i(a)$

$\{+1, -1\}$

Определение. Пусть G и H – две группы. Функция $f: G \to H$ называется <u>изоморфизмом</u>, если f взаимно однозначна и выполнены такие свойства: (I) $f(n_G) = n_H$; (2) $f(i_G(a)) = i_H(f(a))$; (3) $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$.
Здесь n_G, i_G и $*_G$ – операции в G, а n_H, i_H, $*_H$ – операции в H. Группы называются <u>изоморфными</u>, если существует изоморфизм одной из них в другую (тогда обратное отображение – также изоморфизм).

47. Указать изоморфные среди следующих групп: группа симметрий треугольника, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, группа перестановок множества из 3 элементов, группа кубических комплексных корней из I по умножению.

48. Две группы изоморфны третьей. Можно ли утверждать, что они изоморфны между собой?

49. Очевидно, изоморфные группы имеют одинаковое число элементов. Верно ли обратное?

50. Доказать, что любая группа из 2 элементов изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а любая группа из 3 элементов изоморфна $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

5I. Верно ли аналогичное утверждение для групп из 4 и 5 элементов?

52. Изоморфны ли группы (I) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ (по сложению); (2) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ (по сложению); (3) $\mathbb{R}$ по сложению и $\mathbb{R}^*$ (ненулевые действительные числа по умножению); (4) $\mathbb{R}$ по сложению и $\mathbb{R}^+$ (положительные действительные числа по умножению)?

53. Рассмотрим группу $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ пар рациональных чисел по сложению (сложение – покомпонентное). Изоморфна ли она группе $\mathbb{Q}$? Изоморфна ли группа $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (определенная аналогичным образом) группе $\mathbb{Z}$?

54. Изоморфна ли группа $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ группе $\mathbb{R}$?

55. Найти подгруппу группы $\mathbb{C}^*$ (ненулевые комплексные числа по умножению), изоморфную группе поворотов плоскости вокруг фиксированной точки.

56. Существуют ли в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ подгруппы, изоморфные $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

57. Доказать, что всякая группа, содержащая неединичный элемент, содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ при некотором $n>1$ или изоморфную $\mathbb{Z}$.

58. Найти в группе перестановок множества из n элементов подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

59. Доказать, что всякая группа G изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок множества G . (Указание. См. задачу 4.)

60. Обозначим через $\mathbb{Z}^n$ группу, элементами которой являются кортежи из n целых чисел, $\langle a_1,\dots,a_n\rangle+\langle b_1,\dots,b_n\rangle=\langle a_1+b_1,\dots,a_n+b_n\rangle$. Доказать, что всякая подгруппа группы $\mathbb{Z}^n$ изоморфна $\mathbb{Z}^k$ при некотором k , причем $k\leq n$.

61. Доказать, что $\mathbb{Z}^m$ и $\mathbb{Z}^n$ не изоморфны при $m\neq n$.

62. Доказать, что все группы данного простого порядка p изоморфны (следовательно, изоморфны $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и, следовательно, коммутативны).

63. Определим прямую сумму групп G и H как группу $G\oplus H$, элементами которой являются пары $\langle g,h\rangle$ с $g\in G$, $h\in H$, операции – покомпонентные. Доказать, что $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$ изоморфно $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$, если a и b взаимно просты.

64. Доказать, что для любого элемента g группы G отображение $S_g: h\mapsto ghg^{-1}$ является изоморфизмом группы G на себя.

<u>Гомоморфизмы</u>

Пусть G , H группы. Функция $f: G\to H$ называется <u>гомоморфизмом</u>, если $f(g_1 *_G g_2)=f(g_1)*_H f(g_2)$, $f(i_G(g))=i_H(f(g))$ и $f(n_G)=n_H$. (Ср. определение изоморфизма.) Тривиальный пример гомоморфизма: $f(g)=n_H$ для всех $g\in G$.

65. Придумать примеры нетривиальных гомоморфизмов (1) группы перестановок в группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; (2) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; (3) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; (4) группы $\mathbb{R}^*$ ненулевых действительных чисел по умножению в группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; (5) группы $\mathbb{R}^*$ в группу $\mathbb{R}^+$ положительных действительных чисел по умножению; (6) группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению в $\mathbb{R}^+$; (7) группы $\mathbb{C}^*$ в группу $T=\{z \mid |z|=1\}$ по умножению; (8) группы $\mathbb{R}$ по сложению в группу T ; (9) группы движений плоскости в группу всех движений плоскости, оставляющих данную точку неподвижной; (10) аддитивной группы $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^+$.

66. Найти все гомоморфизмы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$.

67. Сколько имеется различных гомоморфизмов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}^*$?

68. Группа $\mathbb{Z}$ и элемент $1 \in \mathbb{Z}$ обладают следующим свойством: для всякой группы G и элемента $a \in G$ существует единственный гомоморфизм $f: \mathbb{Z} \to G$, при котором $f(1) = a$. Доказать.

69. Придумать группу S и два элемента $m, n \in S$ так, чтобы выполнялось следующее свойство (см. предыдущую задачу): для всякой группы G и элементов $a, b \in G$ существует единственный гомоморфизм $f: S \to G$, для которого $f(m) = a$, $f(n) = b$. Группа с таким свойством называется свободной группой с двумя образующими.

70. Доказать, что любые две свободные группы с двумя образующими изоморфны.

71. Пусть $f: G \to H$ – гомоморфзим. Доказать, что ядро $\ker f = \{g \in G | f(g) = n_H\}$ и образ $\operatorname{im} f$ (= множество значений f) являются подгруппами групп G и H.

72. Пусть $f_1: G \to H_1$ и $f_2: G \to H_2$ – гомоморфизмы, причем $\ker f_1 = \ker f_2$. Доказать, что группы $\operatorname{im} f_1$ и $\operatorname{im} f_2$ изоморфны.

73. Пусть $f: G \to H$ – гомоморфизм. Доказать, что прообразы всех элементов $\operatorname{im} f$ содержат равное число элементов.

74. Доказать, что если $f: G \to H$ – гомоморфизм, G конечна, то (число элементов G) = (число элементов $\operatorname{im} f$)$\cdot$(число элементов $\ker f$).

Задача 72 показывает, что образ гомоморфизма $f: G \to H$ определяется (с точностью до изоморфизма) самой группой G и ядром гомоморфизма. Пусть G – группа. Подгруппа $H \subset G$ называется нормальным делителем, если H есть ядро некоторого гомоморфизма f группы G в некоторую другую группу G'. Образ этого гомоморфизма (определяемый однозначно с точностью до изоморфизма) называется факторгруппой G по H и обозначается G/H.

75. Доказать, что для любой группы G подгруппы $\{n\}$ и G – нормальные делители и найти факторгруппы.

76. Найти факторгруппу аддитивной группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}$ целых чисел. (Ответ: $\mathbb{T}$.)

77. Найти факторгруппы $\mathbb{C}^*$ по $\mathbb{T}$, $\mathbb{C}^*$ по $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^*$ по $\mathbb{R}^+$.

78. Найти факторгруппу группы движений плоскости по подгруппе параллельных переносов.

79. Пусть $f: G \to H$ – гомоморфизм. Доказать, что $f(g_1) = f(g_2) \Leftrightarrow g_1^{-1} \cdot g_2 \in \ker f$.

80. Доказать, что если H – нормальный делитель G, то $g_1^{-1} \cdot g_2 \in H \Leftrightarrow g_2 \cdot g_1^{-1} \in H$.

81. Пусть H – нормальный делитель G. Будем говорить, что $x \in G$ эквивалентно $y \in G$ по H, если $x^{-1}y \in H$. Показать, что разбивается на классы эквивалентных друг другу элементов, и множество этих классов находится во взаимно однозначном соответствии с группой G/H.

82. Доказать, что если подгруппа $H \subset G$ такова, что $g_1^{-1}g_2 \in H$ равносильно $g_2 g_1^{-1} \in H$, то H – нормальный делитель. (Указание. См. предыдущую задачу.)

83. Доказать, что следующие свойства подгруппы G группы H равносильны: (I) H – нормальный делитель G; (2) $xy \in H \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow yx \in H$; (3) $h \in H, g \in G \Rightarrow ghg^{-1} \in H$; (4) для всякого элемента $g \in G$ множества $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ и $gH = \{gh \mid h \in H\}$ совпадают.

84. Доказать, что в коммутативной группе всякая подгруппа является нормальным делителем.

85. Какие подгруппы группы S_3 перестановок трехэлементного множества – нормальные делители? Найти соответствующие факторгруппы.

86. Подгруппа конечной группы содержит ровно половину её элементов. Доказать, что эта подгруппа – нормальный делитель и найти факторгруппу.

87. Найти факторгруппу группы T по подгруппе корней степени n из единицы. (Указание. Какие существуют гомоморфизмы T в себя?)

88. Доказать, что единственной нормальной подгруппой группы перестановок множества из n элементов при $n \geq 5$ является подгруппа четных перестановок.

<u>Действие групп на множествах</u>

Пусть G – группа, M – некоторое множество. <u>Действием G на M</u> называет гомоморфизм G в группу перестановок множества M. Перестановка, соответствующая элементу g, будет обозначаться T_g. (Таким образом, согласно определению гомоморфизма, $T_{gh}(m) = T_g \circ T_h(m)$.)

Пример. Каждая группа G действует на себе "левыми сдвигами": $T_g(x) = gx$.

89. Проверить, что это действительно действие. Можно ли заменить левые сдвиги на правые (т.е. положить $T_g(x) = xg$)?

Пусть G действует на множестве M. Назовем <u>орбитой</u> точки $m \in M$ множество всех точек, в которые она может перейти под действием преобразований, соответствующих элементам g : $O(m) =$ $= \{T_g(m) \mid g \in G\}$

90. Доказать, что орбиты разных точек множества M либо не пересекаются, либо совпадают.

91. Группа $\mathbb{T}$ (комплексных чисел с модулем 1 по умножению) действует на множестве $\mathbb{C}$ умножениями: $T_g(m) = g \cdot m \ (g \in \mathbb{T}, m \in \mathbb{C})$. Каковы будут орбиты?

92. Пусть H – подгруппа G. Рассмотрим действие H на G левыми сдвигами: $T_h(g) = hg$. Что будет орбитами?

Пусть G действует на M, $m \in M$. Рассмотрим множество тех $g \in G$, при которых $T_g(m) = m$.

93. Доказать, что это – подгруппа (называемая стабилизатором точки m).

94. Конечная группа G действует на M, $m \in M$. Доказать, что (число элементов G) = (число элементов орбиты m)$\cdot$(число элементов стабилизатора m).

95. Рассмотрим естественное действие группы S_{10} (перестановок десятиэлементного множества) на множестве всех последовательностей русских букв длины 10. Подсчитать величины, входящие в равенство предыдущей задачи, если m = "МАТЕМАТИКА".

96. Пусть G – группа. Рассмотрим действие G на себе сопряжениями: $T_g(h) = ghg^{-1}$. Орбиты этого действия называются классами сопряженных элементов. Каковы они, если G коммутативна? если G – группа перестановок?

97. Доказать, что если число элементов группы G равно p^k, где p – простое, то количество элементов ее центра (множества элементов, коммутирующих со всеми элементами G, т.е. таких x, что $xy = yx$ для всех $y \in G$) кратно p (и, в частности, больше 1). (Указание. См. предыдущую задачу.)

98. Доказать, что всякая группа порядка p^2, где p – простое число, коммутативна.

99. Доказать, что всякая конечная коммутативная группа изоморфна прямой сумме нескольких групп вида $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

100. Назовем коммутатором элементов группы a, b элемент $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$. Доказать, что $ab = ba \Leftrightarrow [a,b] = 1$. Доказать, что множество всевозможных произведений коммутаторов – нормальный делитель, называемый коммутантом. Доказать, что для любого нормального делителя N группы G (G/N коммутативна) $\Leftrightarrow$ (N содержит коммутант G)

101. Доказать, что группа, в которой $x^2 = 1$ при всех x, либо бесконечна, либо имеет порядок, равный степени 2. Доказать, любые две группы с таким свойством и одинаковым числом элементов изоморфны.