Непрерывные функции

Пусть $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$. Говорят, что f непрерывна в точке $a \in M$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in M$, для которых $|x - a| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

I. Сформулировать, что означает, что f не является непрерывной в точке a.

Отметим, что вопрос о непрерывности функции в точке, не входящей в ее область определения, лишен смысла!

2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в точке $x = \frac{1}{2}$; указать δ для $\varepsilon = 2$; $\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 10^{-20}$.

3. Доказать, что $f : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_0, x_1, \ldots$ точек M, сходящейся к a, последовательность $f(x_0), f(x_1), \ldots$ сходится к $f(a)$ (определение непрерывности по Гейне).

Терминология: f разрывна в $a \Leftrightarrow f$ имеет разрыв в $a \Leftrightarrow f$ не является непрерывной в a; f непрерывна $\Leftrightarrow f$ непрерывна всюду $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f$ непрерывна во всех точках своей области определения.

4. Функция Дирихле $\mathcal{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена так: $\mathcal{D}(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{D}(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$. Исследовать на непрерывность функции $\mathcal{D}$, $x \longmapsto x \cdot \mathcal{D}(x)$.

5. Построить функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (I) разрывную в целых точках и непрерывную в остальных; (2) непрерывную в целых точках и разрывную в остальных; (3) разрывную в точках $1/n$ (n = I, 2,...) и непрерывную во всех остальных.

6. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – возрастающая и взаимно однозначная. Доказать, что f непрерывна.

7. Исследовать на непрерывность функцию Римана R, для которой $R(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$ и $R(p/q) = 1/q$, если p/q – несократимая дробь.

8. Доказать, что монотонная функция имеет конечное или счетное множество точек разрыва.

9. Дано счетное множество $A \subset \mathbb{R}$. Построить монотонную функцию, разрывную во всех точках A и непрерывную во всех остальных.

I0. Доказать, что множество точек разрыва любой функции можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств. (Указание. Точку a назовем точкой разрыва величины ε, если в любом содержащем ее интервале найдутся две точки x, y, для которых $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Множество точек разрыва данной величины замкнуто.)

II. Может ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ быть непрерывной во всех иррациональнальных точках и разрывной во всех рациональных? непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных? (Указание. См. предыдущую задачу.)

I2. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является "поточечным пределом" последовательности непрерывных функций f_n : для любого x последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. Как считал Коши, отсюда следует, что f непрерывна. Покажите, что это не так!

I3. (Продолжение.) Может ли функция f быть всюду разрывной?

I4. Доказсть, что если две непрерывные функции $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ совпадают на множестве $\mathbb{Q}$, то $f=g$.

<u>Операции над непрерывными функциями</u>

I5. Пусть $f,g:M\to\mathbb{R}$ непрерывны в точке a . Доказать, что функции $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ ($(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ и т.п.) непрерывны в a . Если при этом g не обращается в 0 на M , то и f/g непрерывна в a .

I6. Что можно сказать о непрерывности $f+g$ и $f\cdot g$ в точке a , если известно, что (I) ровно одна из функций f и g непрерывна в a ; (2) обе функции разрывны в a ?

I7. Функция $f:M\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке a , функция g определена на множестве K , содержащем множество значений f и непрерывна в $f(a)$. Доказать, что функция $g\circ f\,(x)=g(f(x))$ непрерывна в точке a .

I8. Доказать непрерывность многочленов. Доказать непрерывность функции $f:x\longmapsto\sqrt{x}$ (в любой точке области определения).

I9. Говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица с константой C , если $|f(y)-f(x)|\leq C|y-x|$ для любых x и y из ее области определения. Доказать, что всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица, непрерывна.

20. Известно, что $|\sin x-\sin y|$ и $|\cos x-\cos y|$ не превосходит $|x-y|$ (почему?). Доказать непрерывность функций $\sin$ и $\cos$ во всех точках их области определения.

2I. Может ли непрерывная функция $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ не удовлетворять условию Липшица ни с какой константой?

22. Доказать, что если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ монотонна, $f(1/n)\to 0$ и $f(-1/n)\to 0$ при $n\to\infty$, то f непрерывна в 0.

23. Известно, что $a^{x+y}=a^x+a^y$, $a^0=1$ и функция $x\longmapsto a^x$ монотонна ($a>0$, $a\neq 1$). Доказать, что эта функция непрерывна ("непрерывность показательной функции")

О логарифме, степенной и обратных тригонометрических функциях см. далее.

24. (Локальная ограниченность.) Доказать, что если f непрерывна в точке a, то найдется такой интервал, содержащий a, в котором f ограничена.

25. (Сохранение знака.) Доказать, что если f непрерывна в a и $f(a)>0$, то найдется такой интервал, содержащий a, что $f(x)>0$ для всех x из этого интервала (для которых $f(x)$ определен).

Основные теоремы о непрерывных функциях.

26. (Ограниченность.) Функция f, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$, ограничена на нем. (Указание. I. Применить лемму Гейне – Бореля. 2. Если функция не ограничена на отрезке, то она не ограничена на одной из его половин.)

27. (Достижение максимума.) Функция f, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$, имеет точку максимума: существует такое $c\in[a,b]$, что $f(x)\leq f(c)$ для всех $c\in[a,b]$. (Указание. Пусть M – точная верхняя грань значений f. I. Если f не принимает значения M, то функция $1/(M-f(x))$ не ограничена. 2. Если $f(x)<M$, то f меньше M и в некотором интервале, содержащем x. 3. У последовательности x_i, для которой $f(x_i)\to M$, есть сходящаяся подпоследовательность.)

28. (Промежуточные значения.) Функция f, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$ и принимающая на его концах значения разных знаков, имеет корень: если $f(a)>0$, $f(b)<0$, то существует $c\in[a,b]$, для которого $f(c)=0$. (Указание. Если f принимает значения разных знаков на концах некоторого отрезка, то одна из половин отрезка также обладает этим свойством.)

29. (Равномерная непрерывность.) Функция $f: M\to\mathbb{R}$ <u>равномерно</u> непрерывна, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любых $x,y\in M$ из $|x-y|<\delta$ следует $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Доказать, что любая функция, определенная и непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна. (Указание. Пусть x_n и y_n таковы, что $x_n-y_n\to 0$, а $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$. Выберем из x_n сходящуюся подпоследовательность.)

30. Какие из сформулированных утверждений останутся верными, если заменить отрезок интервалом?

31. Какие из сформулированных утверждений останутся верными, если заменить отрезок замкнутым ограниченным множеством?

32. Известно, что f определена и непрерывна на $[0, 1]$, $f(x)>x$ при всех $x\in[0,1]$. Доказать, что найдется такое c, что $f(x)\geq x+c$ при всех $x\in[0,1]$.

33. Для функции f справедливо такое свойство: если p лежит между $f(x)$ и $f(y)$, то оно равно $f(z)$ для некоторого z, лежащего между x и y. Следует ли отсюда, что f непрерывна?

34. Доказать, что если f и g определены и непрерывны на $[0,1]$, причем $f(0)<g(0)$ и $f(1)>g(1)$, то найдется такая точка $x\in[0,1]$, что $f(x)=g(x)$.

35. Доказать, что всякое непрерывное отображение $f: I\to I$ отрезка I в себя имеет неподвижную точку (такую точку x, что $f(x)=x$). Верно ли это для интервала?

36. Не используя аксиому корня, доказать, что уравнение $x^n=a$ имеет положительное решение при любом $a>0$. (Указание. Применить теорему о промежуточном значении.)

Эта задача позволяет вывести аксиому корня из остальных аксиом (включая аксиому полноты).

37. Пусть f – непрерывная строго возрастающая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Доказать, что f является взаимно однозначным соответствием между $[a,b]$ и $[f(a),f(b)]$ и обратная функция непрерывна.

38. Дать определение обратных тригонометричесиких функций и доказать их непрерывность.

39. Дать определение логарифма и доказать его непрерывность.

40. Доказать непрерывность степенной функции $x\mapsto x^c$ при произвольном (не обязательно целом) c.

41. Найти все непрерывные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых $f(x+y)=f(x)+f(y)$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$

42. (Продолжение.) Бывают ли разрывные функции с тем же свойством?

43. Найти все непрерывные функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которых $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$

Общее определение непрерывной функции.

Пусть M, N – метрические пространства, $f: M\to N$, $a\in M$. Говорят, что f непрерывна в a, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех $x\in M$, для которых $\rho_M(x,a)<\delta$, выполнено $\rho_N(f(x),f(a))<\varepsilon$.

44. Сформулировать эквивалентное определение в терминах сходящихся последовательностей и доказать его эквивалентность.

45. Доказать, что следующие свойства функции $f: M\to N$ равносильны: (I) f непрерывна во всех точках M; (2) прообраз любого открытого в N множества открыт в M; (3) прообраз любого замкнутого в N множества замкнут в M.

46. Дать определение непрерывной в точке функции, используя лишь понятие открытого множества. (Эти задачи показывают, что для определения непрерывности достаточно знать лишь, какие множества открыты: этот факт выражают словами "непрерывность – топологическое свойство".)

47. Рассмотрим сложение, вычитание, умножение и деление как функции из множества $\mathbb{R}^2$ пар действительных чисел в $\mathbb{R}$. Доказать, что они непрерывны (на своей области определения).

48. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности композиции непрерывных функций.

49. Можно говорить о непрерывности функций с комплексными аргументами и значениями (рассматривая $\mathbb{C}$ как плоскость). Сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы, произведения, разности и частного для таких функций.

50. Пусть M – метрическое пространство, $A \subset M$. Определим $\rho_A(x)$ (расстояние от точки x до A) как точную нижнюю грань множества $\{\rho(x,y) \mid y \in A\}$. Доказать, что ρ_A – непрерывная функция. Что является множеством ее нулей?

51. Пусть A и B – непересекающиеся замкнутые множества в метрическом пространстве M. Доказать, что существует непрерывная функция $f: M \to \mathbb{R}$, для которой $f(x)=0$ при $x \in A$ и $f(x)=1$ при $x \in B$. Вывести отсюда, что существуют непересекающиеся открытые множества U и V, содержащие A и B соответственно. (Указание. $f = \rho_A/(\rho_A+\rho_B)$, $U = \{x \mid f(x) < 1/2\}$, $V = \{x \mid f(x) > 1/2\}$.)

52. Будет ли площадь треугольника ABC непрерывной функцией от координат его вершин (т.е. из $\mathbb{R}^6$ в $\mathbb{R}$)?

53. Функция $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такова, что для любого $a \in \mathbb{R}$ функции $x \mapsto f(a,x)$ и $x \mapsto f(x,a)$ непрерывны. Можно ли утверждать, что f непрерывна (всюду)?

54. (Продолжение.) Может ли функция f быть всюду разрывной?

55. Функция $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такова, что для любой прямой ℓ на плоскости $\mathbb{R}^2$ сужение f на ℓ (т.е. функция, определенная только на ℓ и принимающая те же значения, что и f) непрерывна. Можно ли утверждать, что f непрерывна?

56. Функция f определена на некотором замкнутом множестве $A \subset \mathbb{R}$ и непрерывна на нем. Доказать, что ее можно так доопределить в точках $\mathbb{R} \setminus A$, чтобы она стала непрерывной на всем $\mathbb{R}$.

57. Решить предыдущую задачу для произвольного замкнутого подмножества произвольного метрического пространства (теорема Титце).

58. Последовательность функций $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$ Доказать, что функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ всюду определена и непрерывна.