

## МНОГОЧЛЕНЫ

### А. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ

Определения. Многочленом называется выражение  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , где  $a_i$  — числа, называемые коэффициентами. Два многочлена считаются равными, если равны их коэффициенты. При записи обычно опускаются члены с нулевым коэффициентом и единичные коэффициенты, так что  $1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$  записывается как  $1 + x^2$ . (или  $x^2 + 1$  — слагаемые часто переставляют). Степенью ненулевого многочлена  $P$  называют наибольшую из степеней его членов (с ненулевыми коэффициентами). Она обозначается  $\deg P$  ( $\text{degree}$  (англ) = степень).

Определим операции сложения и умножения многочленов. Суммой многочленов  $a_0 + a_1x + \dots$  и  $b_0 + b_1x + \dots$  называется многочлен  $c_0 + c_1x + \dots$ , где  $c_i = a_i + b_i$ , а произведением — многочлен  $d_0 + d_1x + \dots$ , где  $d_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$  (складываются произведения коэффициентов при степенях, дающих в сумме  $n$ ).

1. Что можно сказать о  $\deg(P+Q)$  и  $\deg(PQ)$ , если известно, что  $\deg P$  и  $\deg Q$  равны соответственно (1) 5 и 7; (2) 7 и 7?

2. Найти коэффициент при  $x^{13}$  в многочлене  $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1983})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{1984})$

3. Известно, что произведение двух многочленов равно 0. Можно ли утверждать, что один из них равен 0?

4. Доказать, что если  $P \cdot Q = P \cdot R$ , причем  $P \neq 0$ , то  $Q = R$ . (Указание. См. предыдущую задачу.)

5. Для каких многочленов  $P$  найдется такой многочлен  $Q$ , что  $PQ = 1$ ?

6. Доказать, что коэффициент при  $x^n$  в произведении  $(a_0 + a_1x + \dots)(b_0 + b_1x + \dots)(c_0 + c_1x + \dots)$  равен сумме всех произведений вида  $a_k \cdot b_\ell \cdot c_m$ , для которых  $k + \ell + m = n$ .

7. Найти коэффициент при  $x^n$  в  $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^k$

8. Многочлены  $P$  и  $Q$  имеют целые коэффициенты. Все коэффициенты их произведения  $PQ$  делятся на 5. Доказать, что все коэффициенты  $P$  делятся на 5 или все коэффициенты  $Q$  делятся на 5.

Строго говоря, определение многочлена не вполне ясно: будет ли, например,  $1 + y + y^2$  многочленом? Равен ли он многочлену  $1 + x + x^2$ ? И вообще, что такое многочлен? Формальное определение таково: многочленом называется произвольная последовательность чисел  $a_0, a_1, \dots$  в которой конечное число ненулевых членов. Отказавшись от требования конечности, мы получаем определение формального степенного ряда.

Ряды можно складывать и умножать по тем же формулам, что и многочлены.

9. Верно ли, что если произведение двух рядов равно 0, то один из них равен 0?

10. Какие ряды имеют обратные? (Ряд  $Q$  - обратный для  $P$ , если  $PQ = 1$ .) Найти обратный ряд для  $1 + x$ .

11. Найти обратный ряд к ряду  $1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^n x^n + \dots$

12. Найти обратный ряд к ряду  $1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n! + \dots$

13. Определим производную  $P'$  многочлена  $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  формулой  $P' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$ .

Докажите правила дифференцирования:  $(P+Q)' = P'+Q'$ ,  $(cP)' = cP'$ ,  $(PQ)' = P'Q + PQ'$ .

### Б. Значения

Значением многочлена  $P = a_0 + a_1x + \dots$  на числе  $\alpha$  называется число  $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots$ . Таким образом, с каждым многочленом сопоставляется функция  $\alpha \mapsto P(\alpha)$ , которую часто отождествляют с исходным многочленом (и обозначают той же буквой). Это отождествление согласовано со сложением и умножением:  $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$  и  $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)$ . Число  $\alpha$  называется корнем многочлена, если  $P(\alpha) = 0$ .

14. Придумать многочлен степени 4, имеющий корни 1, 2, 3, 4.

15. Найти все корни многочлена  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ .

(Указание.  $(x-1)(x-2)(x-3) = ?$ )

16. Существует ли многочлен степени 1, у которого  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $P(2) = 4$ ?

17. Пусть  $P$  и  $Q$  - многочлены степеней  $m$  и  $n$ . Доказать, что композиция соответствующих функций также соответствует некоторому многочлену: найдется такой многочлен  $R$ , что  $R(a) = P(Q(a))$ . Какова степень многочлена  $R$ ?

18. Найти сумму всех коэффициентов многочлена  $(1+x-x^2)^{1983} (1+2x-2x^2)^{1984}$ .

19. Многочлен  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  имеет корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Какие корни у многочленов (1)  $a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n a_nx^n$ ; (2)  $a_n + a_{n-1}x + \dots + a_{n-k}x^k + \dots + a_0x^n$ ?

20. (Продолжение.) Написать многочлен, корнями которого были бы числа  $2\alpha_1, \dots, 2\alpha_k$  (выразив его коэффициенты через  $a_i$ ).

21. Доказать, что все значения многочлена  $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$  (при всех действительных  $x$ ) положительны.

22. Доказать, что если  $P$  - многочлен с целыми коэффициентами,  $a, b$  - целые числа, то число  $P(b) - P(a)$  кратно  $b - a$ .

(Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.)

23. Доказать, что если  $\alpha$  — целый корень многочлена

$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  с целыми коэффициентами,  
то  $\alpha$  — делитель  $a_0$ .

Эта задача позволяет найти все целые корни многочлена указанного вида, перебрав все делители  $a_0$ . Как показывает следующая задача, если старший коэффициент равен 1, то при этом мы найдем не только все целые, но и все рациональные корни.

24. Доказать, что если  $\alpha$  — рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, то  $\alpha$  — целое число. Используя это, доказать иррациональность  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt[3]{2}$ .

Отказываясь от требования "старший коэффициент равен 1", получаем такое обобщение (позволяющее найти все рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами).

25. Доказать, что если  $p/q$  — несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена  $a_n x^n + \dots + a_0$  с целыми коэффициентами, то  $a_0$  делится на  $p$ , а  $a_n$  делится на  $q$ . Выведите отсюда утверждения двух предыдущих задач.

26. Найдите все рациональные корни многочленов  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  и  $6x^3 - 7x^2 + 1$ , используя предыдущую задачу.

27. Существует ли такой многочлен  $P$ , что  $P(n) = 2^n$  при всех натуральных  $n$ ?

28. Существует ли такой многочлен  $P$  с целыми коэффициентами степени не меньше 1, что  $P(n)$  — простое число при всех натуральных  $n$ ?

29. Существует ли такой многочлен  $P$ , что  $\cos 17x = P(\cos x)$  при всех  $x$ ?

30. Рассмотрим все функции  $f$ , которые сопоставляют с каждым многочленом  $P$  некоторое число  $f(P)$ , причем  $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ ,  $f(PQ) = f(P) \cdot f(Q)$  и если  $P = a_0$  — многочлен степени 0, то  $f(P) = a_0$ . Докажите, что функция, сопоставляющая с каждым многочленом

(1) сумму всех его коэффициентов; (2) его свободный член; (3) его значение  $P(a)$  в некоторой фиксированной точке  $a$  — таковы. Докажите, что (1) и (2) представляют собой частные случаи (3).

Верно ли, что любая такая функция имеет вид  $P \rightarrow P(a)$  для некоторого  $a$ ?

31. Какими должны быть коэффициенты  $a, b, c$ , чтобы многочлен  $ax^2 + bx + c$  принимал целые значения во всех целых точках?

Многочлен  $Q(x) = P(x+1) - P(x)$  называется "разностной производной" многочлена  $P$ .

32. Как связаны степени  $P$  и  $Q$ ?

33. Доказать, что для любого многочлена  $Q$  степени не выше  $n$  найдется многочлен  $P$  степени не выше  $n+1$  ("разностный интеграл"), для которого  $P(x+1) - P(x) = Q(x)$  при всех  $x$ .

34. С последовательностью  $a_0, a_1, a_2, \dots$  |  $a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots$   
 проделали такую операцию: под каждым двумя членами |  $a_1 - a_0 \ a_2 - a_1 \ \dots$   
 последовательности написали их разность. Затем эту |  $\dots \dots \dots$   
 операцию повторяют. Доказать, что если исходной была последовательность  $P(0), P(1), \dots$ , где  $P$  - некоторый многочлен, то через несколько шагов получится последовательность из одних нулей. Верно ли обратное?

35. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, для которого  $P(7) = 11$ ,  $P(11) = 13$  ?

В. Делимость и корни

Говорят, что многочлен  $P$  делится на многочлен  $Q$  (обозначение  $P : Q$ ), если существует такой многочлен  $R$ , что  $P = Q \cdot R$ .

36. Делится ли (1)  $x^2$  на  $x^3 + 1$ ; (2)  $x^2 + 3x$  на  $2x + 6$  ?

37. Какие многочлены являются делителями многочленов (1) 1 (2) 0 ; (3)  $1 + x$  ?

38. Доказать, что если  $P, Q, R, S$  - многочлены,  $PQ = RS$  и  $P : R$ , то  $S : Q$ .

39. (Теорема о делении с остатком.) Пусть  $A$  и  $B$  - многочлены,  $B \neq 0$ . Тогда существуют и единственны такие многочлены  $Q$  (частное) и  $R$  (остаток), что  $A = BQ + R$  и ( $\deg R < \deg B$  или  $R = 0$ ).

40. Найти частное и остаток при делении  $x^7 + x^5 + 1$  на  $2x^2 - 4$ .

41. Доказать, что если  $B : C$ , то  $A$  и  $A+B$  дают одинаковые остатки при делении на  $C$ .

42. Делится ли  $x^{10} - 1$  на  $x^2 + 1$  ?

43. (Теорема Безу.) Пусть  $P$  - многочлен,  $a$  - число. При делении  $P$  на  $x - a$  остаток равен  $P(a)$ .

44. Доказать, что свойства  $P : (x - a)$  и  $P(a) = 0$  равносильны.

45. При каких  $c$  многочлен  $x^{1984} + x^3 + c$  делится на  $x - 1$  ?

46. Если  $a_1, \dots, a_n$  - различные корни многочлена  $P$ , то  $P$  делится на  $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ .

47. Доказать, что многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  корней.

48. Доказать, что если многочлены  $P$  и  $Q$  задают одну и ту же функцию, то есть  $P(x) = Q(x)$  при всех  $x$ , то  $P$  и  $Q$  равны (то есть имеют равные коэффициенты).

49. (Формулы Виета.) Многочлен  $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$  имеет  $k$  различных корней  $x_1, \dots, x_k$ . Выразить коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  через корни.

50. Доказать, что для любого многочлена  $P$  свойства (1)  $P(-1) = P(1) = 0$  и (2)  $P : (x^2 - 1)$  равносильны.

51. Доказать, что если  $P : Q$ , то (множество корней  $P$ )  $\subset$  (множество корней  $Q$ ). Верно ли обратное?

52. Доказать, что если  $P(a) = Q(a)$  при бесконечно многих  $a$ , то многочлены  $P$  и  $Q$  равны.

53. Известно, что многочлен  $P$  дает при делении на  $x - 1$  остаток 3, а при делении на  $x + 1$  остаток 5. Определить остаток при делении  $P$  на  $x^2 - 1$ .

54. При каких  $p$  и  $q$  остаток от деления  $x^5 + 3x^3 + px^2 + qx + 3$  на  $x^2 + 2$  равен  $x + 1$ ?

55. При каких  $n$  и  $k$  многочлен  $x^n - 1$  делится на  $x^k - 1$ ?

56. Остатки при делении многочлена  $P$  на  $(x - a)$ ,  $(x - b)$  и  $(x - c)$  равны соответственно  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  ( $a, b, c$  - различные числа). Найти остаток при делении  $P$  на  $(x - a)(x - b)(x - c)$ .

57. Доказать, что если 
$$\begin{cases} a + b + c + d = 0, & a + 2b + 4c + 8d = 0 \\ a + 3b + 9c + 27d = 0, & a + 4b + 16c + 64d = 0 \end{cases}$$
 то  $a = b = c = d = 0$

58. Найти остаток от деления  $x^{1984} - 1$  на  $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

59. Решить уравнение  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

(Указание. Один из корней равен  $-1$ .)

60. (Интерполяция.) Пусть  $x_1, \dots, x_n$  - различные числа,  $y_1, \dots, y_n$  - произвольные числа. Доказать, что существует и единствен многочлен  $P$ , степень которого не выше  $n - 1$  и  $P(x_i) = y_i$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . (Другими словами, через  $n$  точек плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикали, проходит единственный график многочлена степени не выше  $n - 1$ .) (Указание. Единственность вытекает из того, что число корней многочлена не больше его степени. Для доказательства

существования рассмотрите сначала случай, когда все  $y_i$ , кроме одного, равны 0.)

61. Найдите многочлен степени не выше 3, для которого  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = -1$ ,  $P(2) = 1$ ,  $P(3) = -1$

62. Многочлен  $P$  таков, что  $P(x) = P(-x)$  при всех  $x$ . Доказать, что найдется такой многочлен  $Q$ , что  $P(x) = Q(x^2)$  при всех  $x$ .

63. Многочлен  $P$  таков, что  $P(x) = -P(-x)$  при всех  $x$ . Доказать, что найдется такой многочлен  $Q$ , что  $P(x) = x Q(x^2)$  при всех  $x$ .

64. Доказать тождество 
$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

65. Доказать, что если  $P$  — многочлен степени  $n$  и  $P(x)$  целое при всех целых  $x$ , то все коэффициенты многочлена  $n! P$  целые. Можно ли утверждать, что все коэффициенты  $P$  целые?

66. Обозначим через  $C_x^n$  многочлен  $x(x-1)\dots(x-n+1)/n!$ . Доказать, что всякий многочлен степени  $n$  однозначно представляется в виде  $a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_1 C_x^1 + a_0$

67. (Продолжение.) Доказать, что для любого многочлена  $P$  свойства (1)  $P(m)$  целое при всех целых  $m$ ; (2) коэффициенты  $a_n, \dots, a_0$  в представлении, рассмотренном в предыдущей задаче, целые, — равносильны.

68. Доказать, что всякий многочлен степени 3 однозначно представляется в виде (1)  $a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$   
(2)  $a + b(x-1) + c(x-1)(x-2) + d(x-1)(x-2)(x-3)$

69. Число  $a$  называется корнем многочлена  $P$  кратности  $k$ , если  $P$  делится на  $(x-a)^k$ . (Таким образом, обычные корни — корни кратности 1.) Доказать, что свойства (1)  $a$  — корень многочлена  $P$  кратности  $k$ ; (2)  $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$  ( $P^{(i)}$  —  $i$ -ая производная многочлена  $P$ ), — равносильны.

#### Д. Делимость в кольце многочленов.

Напомним, что многочлен  $P$  делится на  $Q$  (запись  $P : Q$ ), если существует такой многочлен  $R$  (частное), что  $P = Q \cdot R$ .

70. Что можно сказать о многочленах  $P$  и  $Q$ , если  $P : Q$  и  $Q : P$  ?

Многочлен  $S$  называется наименьшим общим кратным (НОК) многочленов  $P$  и  $Q$ , если выполнены 2 условия:

(I)  $S$  — их общее кратное, т.е.  $S : P$ ,  $S : Q$  ;

(2) если  $S'$  - любое общее кратное  $P$  и  $Q$ , то  $S'$  кратно  $S$  ( $S' : P, S' : Q \Rightarrow S' : S$ ).

71. Доказать, что многочлен  $S$  наименьшей степени, кратный  $P$  и  $Q$ , является их наименьшим общим кратным. (Указание. Пусть  $S'$  - любое общее кратное. Разделите  $S'$  на  $S$  с остатком.)

72. Доказать, что любые два наименьших общих кратных данных многочленов отличаются на ненулевой постоянный множитель.

Две предыдущие задачи показывают, что наименьшее общее кратное всегда существует (что из определения сразу не вытекает) и почти единственно (если пренебречь постоянным множителем). Следующие задачи утверждают то же самое про наибольший общий делитель.

Многочлен  $S$  называется наибольшим общим делителем (НОД) многочленов  $P$  и  $Q$ , если выполнены 2 условия:

(1)  $S$  является их общим делителем, то есть  $P : S, Q : S$

(2) если  $S'$  - их общий делитель, то  $S'$  - делитель  $S$ :  
 $P : S', Q : S' \Rightarrow S : S'$

Заметим, что из определения не следует, что такой многочлен  $S$  существует. Мы докажем это впоследствии (и даже несколькими способами).

73. Найти многочлен, являющийся наибольшим общим делителем многочленов  $P$  и 0 (нуль).

74. Пусть  $P$  дает при делении на  $Q$  остаток  $R$ . Доказать, что многочлен  $S$  является наибольшим общим делителем  $P$  и  $Q$  тогда и только тогда, когда он является наибольшим общим делителем многочленов  $Q$  и  $R$ .

Таким образом, если мы желаем доказать существование или найти наибольший общий делитель многочленов  $P$  и  $Q$ , можно заменить  $P$  его остатком при делении на  $Q$ . Такую замену (переход от пары  $P, Q$  с  $\deg P \geq \deg Q$  и  $Q \neq 0$  к паре  $Q, R$  (остаток от деления  $P$  на  $Q$ )) мы будем называть "преобразованием Евклида".

75. Пусть  $P, Q$  - произвольные многочлены,  $\deg P \geq \deg Q$ . Будем применять к ним преобразование Евклида, пока это возможно. Чем закончится этот процесс? Как найти после этого НОД ( $P, Q$ )?

Этот способ отыскания наибольшего общего делителя называется алгоритмом Евклида. Из этой задачи, в частности, следует, что наибольший общий делитель всегда существует.

76. Найти НОД многочленов (1)  $x+1$  и  $x^2+1$ ; (2)  $x^{15}-1$  и  $x^9-1$ ; (3)  $x^4+3x^3+5x^2+4x+2$  и  $x^5+x^4+2x^3-1$ .

77. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  являются наибольшими общими делителями многочленов  $P$  и  $Q$ . Как связаны они между собой?

78. (Другое доказательство существования НОД.) Пусть  $S$  - наименьшее общее кратное многочленов  $P$  и  $Q$ . Доказать, что  $PQ : S$  и частное  $R$  от деления  $PQ$  на  $S$  является наибольшим общим делителем многочленов  $P$  и  $Q$ . (Это рассуждение не дает, однако, способа отыскания НОД, т.к. требует знания наименьшего общего кратного.)

79. Пусть  $S$  и  $T$  - НОК и НОД многочленов  $P$  и  $Q$ . Доказать, что  $PQ = kST$ , где  $k$  - ненулевое число.

Будем говорить, что многочлен  $R$  выразим через многочлены  $P$  и  $Q$ , если найдутся такие многочлены  $A$  и  $B$ , что  $R = AP + BQ$ .

80. Выразимы ли многочлены: (1)  $x+1$  через  $x$  и  $x^2$ ;  
(2)  $1$  через  $x$  и  $x+1$ ?

81. Какие многочлены выразимы через (1)  $x+1$  и  $x$ ;  
(2)  $x^2$  и  $x^2+x$ ?

82. Пусть  $P$  и  $Q$  - произвольные многочлены. Доказать, что сумма и разность многочленов, выразимых через  $P$  и  $Q$ , выразимы через  $P$  и  $Q$ . Доказать, что произведение произвольного многочлена и многочлена, выразимого через  $P$  и  $Q$ , выразимо через  $P$  и  $Q$ .

83. Пусть  $P$  и  $Q$  - произвольные многочлены. Доказать, что через  $P$  и  $P-Q$  выразимы те же самые многочлены, что и через  $P$  и  $Q$ .

84. Доказать, что, применяя преобразование Евклида к паре многочленов, мы не меняем множество выразимых через них многочленов: если при делении  $P$  на  $Q$  получается остаток  $R$ , то через  $Q$  и  $R$  выразимы те же многочлены, что и через  $P$  и  $Q$ .

85. Пусть  $P$  и  $Q$  - произвольные многочлены. Доказать, что через них выразимы те и только те многочлены, которые делятся на НОД  $(P, Q)$ . (Указание. См. предыдущую задачу.)

86. Выразить (1)  $x+1$  через  $x^4+1$  и  $x^3+1$ ;  
(2)  $1$  через  $(x-2)(x-3)$  и  $x(x-1)$ .

Следующие задачи содержат еще одно доказательство существования НОД любых двух многочленов.

Множество  $I$  многочленов называется идеалом, если оно обладает такими свойствами:

$$(1) A, B \in I \Rightarrow A+B, A-B \in I$$

$$(2) A \in I, B - \text{любой многочлен} \Rightarrow AB \in I$$



87. Будут ли идеалами: (1) множество всех многочленов с нулевым свободным членом; (2) множество всех ненулевых многочленов; (3) множество всех кратных данного многочлена  $P$ ; (4) множество всех многочленов, выразимых через данные многочлены  $P$  и  $Q$ ; (5) множество всех многочленов, для которых  $P(1) = 0$ ; (6) множество всех многочленов, для которых  $P(1) = P(2) = 0$ ; (7) множество всех многочленов, для которых  $P(1) + P(2) = 0$ ; (8) множество всех многочленов с рациональными коэффициентами?

88. Пусть  $I$  — произвольный идеал,  $P$  — многочлен наименьшей степени, содержащийся в  $I$ . Доказать, что идеал  $I$  состоит из всех кратных многочлена  $P$  и только из них. (Указание. Использовать теорему о делении с остатком.)

Идеал, состоящий из всех кратных многочлена  $P$ , называется главным идеалом с образующей  $P$ . Таким образом, утверждение предыдущей задачи может быть сформулировано так: в кольце многочленов (с действительными коэффициентами) всякий идеал является главным.

89. Многочлены  $P$  и  $Q$  являются образующими одного и того же идеала  $I$ . Как они связаны?

90. Найти образующие идеалов (1) многочленов с нулевым свободным членом; (2) многочленов  $P$ , для которых  $P(1) = 0$ ; (3) многочленов  $P$ , для которых  $P(1) = P(2) = 0$ .

91. Пусть  $I$  — идеал всех многочленов, выразимых через  $P$  и  $Q$ ;  $D$  — его образующая. Доказать, что  $D$  есть наибольший общий делитель  $P$  и  $Q$ . (Из этой задачи следует, помимо существования наибольшего общего делителя, также и описание выразимых через  $P$  и  $Q$  многочленов, см. задачу 85.)

92. Пусть  $I$  и  $J$  — идеалы. Доказать, что  $I \cap J$  и  $I + J = \{i+j \mid i \in I, j \in J\}$  — идеалы. Как связаны их образующие с образующими идеалов  $I$  и  $J$ ?

Многочлены  $P$  и  $Q$  называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, кроме констант (т.е. если  $1 = \text{НОД}(P, Q)$ ).

93. Доказать, что свойства (1)  $P$  и  $Q$  взаимно просты; (2) существуют такие многочлены  $X$  и  $Y$ , что  $XP + YQ = 1$ , — равносильны.

94. (Продолжение.) Доказать, что если  $P$  и  $Q$  взаимно просты, то найдутся такие  $X$  и  $Y$ , что  $XP + YQ = 1$ ,  $\deg X < \deg Q$ ,  $\deg Y < \deg P$ .

95. (Основная лемма о взаимной простоте.) Если  $AB$  делится на  $C$ , а  $A$  взаимно просто с  $C$ , то  $B$  делится на  $C$ . (Указание. Если  $XA + YC = 1$ , то  $B = B(XA + YC)$ .)

Многочлен  $P$ , не являющийся константой, называется простым, или неприводимым, если в любом его разложении на 2 множителя один из них - константа: если  $P = QR$ , то  $Q$  или  $R$  - константа.

96. Доказать, что если  $P$  неприводим, а  $Q$  - любой многочлен, не делящийся на  $P$ , то  $Q$  взаимно прост с  $P$ .

97. Доказать, что если произведение двух многочленов делится на неприводимый многочлен  $P$ , то один из них делится на  $P$ .

98. (Продолжение.) Доказать то же самое для произведения произвольного числа многочленов.

99. Доказать, что всякий многочлен, отличный от константы, можно разложить в произведение неприводимых.

100. Доказать, что разложение на неприводимые множители единственно: если  $A = P_1 \cdot \dots \cdot P_n = Q_1 \cdot \dots \cdot Q_m$  то  $m = n$  и после подходящей перенумерации можно получить

$P_i = c_i Q_i$ , где  $c_i$  - константы.

101. Для каких многочленов  $P$  равенство  $xP(x-1) = (x-2)P(x)$  справедливо при всех  $x$  ?

102. Известно, что  $(x-1)(x^2+px+q) = (x-3)(x^2+rx+s) = (x-5)(x^2+lx+m)$  при всех  $x$ . Найти  $p, q, r, s, l, m$ .

#### Д. Основная теорема алгебры и ее следствия.

До сих пор мы неявно предполагали, что коэффициентами многочленов являются действительные числа. Однако все наши рассуждения остаются в силе и для многочленов с комплексными коэффициентами. Комплексный случай даже проще вещественного, так как имеет место

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один (комплексный) корень.

Доказательство этой теоремы использует сведения из курса анализа и будет дано впоследствии.

103. Доказать, что всякий многочлен  $P$  с комплексными коэффициентами разлагается на линейные множители, т.е. представим в виде  $k(x-a_1)\dots(x-a_n)$ , где  $n$  - степень  $P$ ,  $a_1, \dots, a_n$  и  $k$  - комплексные числа.

104. Доказать, что если  $z$  - (комплексный) корень многочлена с действительными коэффициентами, то  $\bar{z}$  - также его корень.

105. Как изменятся корни многочлена с комплексными коэффициентами и его разложение на линейные множители (задача 103), если все коэффициенты многочлена заменить на комплексно-сопряженные?

106. Доказать, что в разложении на линейные множители (задача 103) многочлена с действительными коэффициентами все множители  $(x - \alpha)$  с  $\alpha \notin \mathbb{R}$  можно разбить на пары  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$  комплексно сопряженных.

107. Доказать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами, т.е. представим в виде  $c(x - a_1) \dots (x - a_k)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s)$ .

Обратите внимание, что в условии этой задачи нет ни слова о комплексных числах — они появляются только в её решении!

108. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

109. Найти многочлен с действительными коэффициентами наименьшей степени, для которого  $1 + i$ ,  $2 - i$  и  $3$  — корни.

110. Разложить на линейные множители (с комплексными коэффициентами) многочлены  $x^2 + 1$ ,  $x^4 + 1$ ,  $x^n - 1$ ,  $x^n + 1$ .

111. Пусть  $P$  — многочлен с комплексными коэффициентами,  $x_1, \dots, x_s$  — его корни,  $k_1, \dots, k_s$  — их максимальные кратности. Доказать, что  $P = a(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s}$  где  $a$  — старший коэффициент многочлена  $P$ .

112. Доказать, что многочлен степени  $n$  имеет  $n$  (комплексных) корней, если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность.

113. Доказать, что для любых двух многочленов  $P$  и  $Q$  свойства (1)  $P : Q$  и (2) всякое комплексное число  $z$ , являющееся корнем  $Q$  кратности  $k$ , является корнем  $P$  кратности  $k$ , — равносильны. (Напомним, что согласно нашему определению всякий корень кратности  $k$  является корнем кратности  $l$  при  $l < k$ !)

114. Доказать, что если многочлен с действительными коэффициентами принимает во всех действительных точках неотрицательные значения, то его можно представить в виде  $P = Q_1^2 + \dots + Q_\ell^2$  где  $Q_1, \dots, Q_\ell$  — многочлены с действительными коэффициентами.

115. Пусть  $P$  — произвольный многочлен степени  $n \geq 1$  с комплексными коэффициентами. Доказать, что задаваемая им функция  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  является наложением.

116. (Продолжение.) Доказать, что при этом отображении каждая точка  $\mathbb{C}$ , за исключением конечного числа точек, имеет ровно  $n$  прообразов.

117. Доказать, что в задаче 114 можно положить  $\ell = 2$ .

Е. Различные множества коэффициентов

Все рассмотренные в пп. А – Г свойства многочленов справедливы для многочленов с коэффициентами в любом поле (полем называется множество с операциями сложения, умножения, взятия обратного и противоположного, 0 и 1, удовлетворяющим обычным аксиомам). В частности, все эти свойства справедливы для многочленов с рациональными, действительными и комплексными коэффициентами.

Однако если мы рассматриваем многочлены с целыми коэффициентами, то ситуация меняется (т.к.  $\mathbb{Z}$  не поле: нет взятия обратного).

II8. Привести примеры, показывающие, что теорема о делении с остатком и теорема о главных идеалах не выполняются для многочленов с целыми коэффициентами.

К многочленам с целыми коэффициентами мы еще вернемся; рассмотрим теперь, что меняется при переходе от одного поля к другому (от  $\mathbb{Q}$  к  $\mathbb{R}$  и от  $\mathbb{R}$  к  $\mathbb{C}$ ). Соответствующие множества многочленов обозначаются  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$  и  $\mathbb{C}[x]$

II9. Доказать, что свойство делимости не меняется при расширении поля: если  $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ , то  $P:Q$  в  $\mathbb{Q}[x]$  равносильно  $P:Q$  в  $\mathbb{R}[x]$ . (Аналогично для  $\mathbb{R}[x]$  и  $\mathbb{C}[x]$ .)

II0. Доказать, что наибольший общий делитель не меняется при расширении поля: если  $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$  и  $R$  – их наибольший общий делитель, то он останется их наибольшим общим делителем в  $\mathbb{R}[x]$ .

II1. Какие многочлены являются неприводимыми (I) в  $\mathbb{C}[x]$ ; (2) в  $\mathbb{R}[x]$  ?

II2. Будут ли неприводимыми в  $\mathbb{Q}[x]$  многочлены (1)  $x - 1$ ; (2)  $x^2 - 1$ ; (3)  $x^2 - 2$ ; (4)  $x^2 + 1$  (5)  $x^3 - 2$ ; (6)  $x^2 + x + 1$ ; (7)  $x^3 + x^2 + x + 1$ ; (8)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ; (9)  $x^4 - 2$  ?

II3. Разложить многочлены предыдущей задачи на неприводимые множители в  $\mathbb{C}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$ ,  $\mathbb{Q}[x]$ .

Как видно из приведенных примеров, неприводимость (= простота), в отличие от взаимной простоты, существенно зависит от поля коэффициентов.

II4. При каких  $n$  многочлен  $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1$  неприводим в  $\mathbb{Q}[x]$  ?

Наиболее прост, как всегда, комплексный случай.

II5. Доказать, что многочлены  $P, Q \in \mathbb{C}[x]$  не взаимно просты тогда и только тогда, когда они имеют общий корень, т.е. существует такое  $z \in \mathbb{C}$ , что  $P(z) = Q(z) = 0$ .

126. Пусть  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{C}[x]$ . Доказать, что следующие свойства равносильны:

(1) существуют такие многочлены  $Q_1, \dots, Q_n \in \mathbb{C}[x]$ , что  $P_1 Q_1 + \dots + P_n Q_n = 1$ ;

(2) не существует такого  $z \in \mathbb{C}$ , что  $P_1(z) = \dots = P_n(z) = 0$

127. Доказать, что если многочлен  $P \in \mathbb{Q}[x]$  имеет кратный корень в  $\mathbb{C}$ , то он приводим в  $\mathbb{Q}[x]$  (т.е. разлагается на множители с рациональными коэффициентами).

Изучим теперь подробнее  $\mathbb{Z}[x]$  (кольцо многочленов с целыми коэффициентами)

128. Доказать, что если  $\alpha$  — целый корень многочлена  $P \in \mathbb{Z}[x]$  то  $P = (x - \alpha) \cdot Q$ , где  $Q$  — многочлен с целыми коэффициентами (теорема Безу для  $\mathbb{Z}[x]$ ; напомним, что теорема о делении с остатком, вообще говоря, неверна в  $\mathbb{Z}[x]$  !)

129. Доказать, что если  $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$  таковы, что  $P(x) = Q(x+1)$  при всех  $x$ , то они одновременно приводимы или неприводимы в  $\mathbb{Z}[x]$ .

Назовем содержанием многочлена с целыми коэффициентами наибольший общий делитель его коэффициентов.

130. (Лемма Гаусса.) Доказать, что произведение двух многочленов с содержанием 1 есть многочлен с содержанием 1. (Указание. Если все коэффициенты произведения  $PQ$  делятся на некоторое простое число  $p$ , а для сомножителей это не так, то произведение двух "ненулевых по модулю  $p$ " многочленов  $P$  и  $Q$  — "нулевой по модулю  $p$  многочлен".)

131. Доказать, что содержание произведения многочленов равно произведению их содержаний.

132. Доказать, что если многочлен  $P \in \mathbb{Z}[x]$  разлагается на множители с рациональными коэффициентами:  $P = RS$ ,  $R, S \in \mathbb{Q}[x]$ , то он разлагается и на множители с целыми коэффициентами  $P = R_1 S_1$ , причем  $R_1$  и  $S_1$  отличаются от  $R$  и  $S$  лишь рациональным множителем.

Таким образом, если многочлен  $P \in \mathbb{Z}[x]$  неприводим в  $\mathbb{Q}[x]$ , то он неприводим и в  $\mathbb{Z}[x]$ .

133. Вывести из предыдущей задачи утверждение о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами (если  $p/q$  — несократимая дробь, являющаяся корнем  $P = a_n x^n + \dots + a_0$ , то  $a_0 : p$ ,  $a_n : q$ ).

134. Придумать алгоритм, позволяющий по любому многочлену с целыми коэффициентами определить, будет ли он неприводим в  $\mathbb{Z}[x]$  и  $\mathbb{Q}[x]$ . (Указание. (1) Если  $P : Q$ , то  $P(a) : Q(a)$  при любом  $a$ ; (2) Многочлен степени  $n$  определяется своими значениями в  $n+1$  точке.)

135. Доказать, что любой многочлен с целыми коэффициентами, отличный от 1 и  $-1$ ; однозначно разлагается на неприводимые в  $\mathbb{Z}[x]$  множители. (Указание. Воспользуйтесь установленной связью между разложениями в  $\mathbb{Z}[x]$  и  $\mathbb{Q}[x]$ , а также однозначностью разложения в  $\mathbb{Q}[x]$ .)

136. Доказать, что в  $\mathbb{Z}[x]$  существуют НОД и НОК любой пары многочленов. (Напомним, что НОД — это общий делитель, делящийся на любой общий делитель, а НОК — общее кратное, делящее любое общее кратное.)

## Разные задачи о многочленах

1. (Формула Тейлора) Доказать, что если  $P$  - многочлен, то  $P(a+h) = P(a) + P'(a)h + P''(a)h^2/2! + \dots + P^{(n)}(a)h^n/n!$  (правая часть продолжается до тех пор, пока слагаемые не обращаются в нуль).

2. Доказать, что если многочлен  $P \in \mathbb{R}[x]$  степени  $n$  имеет  $n$  (различных) вещественных корней, то многочлен  $P'$  имеет  $n-1$  (различных) вещественных корней. Остается ли это утверждение верным, если разрешить корням совпадать и учитывать кратности?

3. Доказать, что многочлен  $1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n!$  не имеет кратных корней

4. Пусть  $P$  - многочлен с комплексными коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Доказать, что найдется точка  $z \in \mathbb{C}$  с  $|z|=1$ , для которой  $|P(z)| \geq 1$ .

5. Дан пятиугольник  $ABCDE$  и окружность радиуса 1. Доказать, что на окружности найдется точка  $M$ , для которой  $|MA| \cdot |MB| \cdot |MC| \cdot |MD| \cdot |ME| \geq 1$

6. Доказать, что комплексные корни многочлена  $P'$  лежат в выпуклой оболочке корней многочлена  $P$ . (Это значит, что если вбить в комплексную плоскость гвозди в корнях  $P$  и натянуть на них резинку, то корни  $P'$  окажутся внутри.)

7. (Оценка корней многочлена через коэффициенты.) Доказать, что любой корень многочлена  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  со старшим коэффициентом 1 не превосходит  $\max(1, |a_{n-1}| + \dots + |a_0|)$

8. Доказать, что для любого  $p$  найдется многочлен степени  $p$  с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, все значения которого в целых точках делятся на  $p$ .

9. (Продолжение.) Доказать, что для простого  $p$  не существует многочлена меньшей степени со свойством, указанным в предыдущей задаче.

Комплексное число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Все остальные числа называются трансцендентными.

10. Доказать, что существуют трансцендентные числа.

11. Если иррациональное число  $\alpha$  таково, что при любом  $n$  неравенство  $|\alpha - p/q| \leq 1/q^n$  имеет бесконечное число целочисленных решений, то  $\alpha$  трансцендентно (теорема Лиувилля).

12. Доказать, что число  $\alpha = 0,11000100\dots$  (единицы стоят на 1, 2, 6 (=3!), 24 (=4!), ... местах после запятой) трансцендентно.

13. Доказать, что если  $\alpha \neq 0$  - алгебраическое, то и  $1/\alpha$  - алгебраическое число.

14. Доказать, что если  $\alpha$  и  $\beta$  — алгебраические числа, то  $\alpha + \beta$  и  $\alpha \cdot \beta$  — алгебраические.

15. Доказать, что комплексное число  $z$  является алгебраическим тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$  являются алгебраическими.

16. Пусть  $\alpha$  — алгебраическое число. Рассмотрим все многочлены  $P \in \mathbb{Q}[x]$ , для которых  $P(\alpha) = 0$ . Пусть  $P_0$  — многочлен наименьшей степени среди них. Доказать, что любой многочлен  $P \in \mathbb{Q}[x]$  для которого  $P(\alpha) = 0$ , делится на  $P_0$ . (Указание. Множество таких  $P$  — идеал.) Многочлен  $P_0$  называется минимальным многочленом алгебраического числа  $\alpha$ .

17. Найти минимальный многочлен чисел  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

18. Пусть  $f: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  таково, что  $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ ,  $f(PQ) = f(P) \cdot f(Q)$  и  $f(c) = c$  ( $c$  — константа = многочлен нулевой степени). Такие  $f$  называют автоморфизмами кольца  $\mathbb{R}[x]$ . Описать все автоморфизмы  $\mathbb{R}[x]$ . Какие из них являются взаимно однозначными?

19. Доказать, что если значения многочлена  $P$  степени  $n$  в  $n+1$  идущих подряд целых точках — целые, то его значения во всех целых точках — целые.

20. Многочлен  $P$  с комплексными коэффициентами таков, что  $P(x)$  действительно при действительных  $x$ . Доказать, что его коэффициенты действительны. Что можно сказать о коэффициентах  $P$ , если  $P(ix) \in \mathbb{R}$  при всех действительных  $x$ ?

21. (Критерий Эйзенштейна.) Доказать, что если многочлен  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  с целыми коэффициентами таков, что все коэффициенты (кроме старшего, равного 1) делятся на некоторое простое  $p$ , причем  $a_0$  не делится на  $p^2$ , то он неприводим в  $\mathbb{Z}[x]$ . (Указание. "По модулю  $p$ " — т.е. пренебрегая кратными  $p$  членами — этот многочлен есть  $x^n$ , поэтому его сомножители должны быть степенями  $x$  (по модулю  $p$ ), а тогда  $a_0$  делится на  $p^2$ .)

22. Доказать, что многочлен  $Q(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \dots + 1$  неприводим в  $\mathbb{Z}[x]$  тогда и только тогда, когда  $p$  простое. (Указание. Рассмотреть многочлен  $Q(x+1)$  и воспользоваться критерием Эйзенштейна.)

23. Доказать, что если значение многочлена  $P \in \mathbb{Z}[x]$  в трех целых точках равно 1, то он не имеет целых корней.

24. Определить кольцо  $\mathbb{R}[x, y]$  "многочленов от двух переменных" и доказать однозначность разложения на неприводимые в нем.



(Краткое указание. Многочлены с двумя переменными можно рассматривать как многочлены с одной переменной, коэффициенты которых — многочлены от другой переменной; далее поступать аналогично случаю  $\mathbb{Z}[x]$ .)

25. Доказать, что многочлен  $1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n!$  имеет не более одного вещественного корня.

26. (Теорема Декарта.) Назовем числом перемен знака в последовательности действительных чисел  $a_0, a_1, \dots, a_n$  число пар соседних членов разных знаков (если в последовательности есть нули, выкинем их и подсчитаем число пар после этого). Доказать, что число положительных корней (с учетом кратности) многочлена с действительными коэффициентами равно числу перемен знаков в последовательности его коэффициентов или меньше его на (положительное) четное число.

27. (Продолжение.) Доказать, что если все корни многочлена действительны, то в предыдущей задаче имеет место равенство.

28. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — корни степени  $n$  из единицы. Найти многочлен степени  $n-1$ , равный  $1$  в одном из этих корней и  $0$  в остальных. Установить, что модули всех его коэффициентов равны  $1/n$ .

29. В единичную окружность на комплексной плоскости вписан правильный  $n$ -угольник. Доказать, что если  $P \in \mathbb{C}[x]$  — многочлен степени  $n-1$ , один из коэффициентов которого по модулю не меньше  $1$ , то  $|P(z)| \geq 1$  хотя бы для одной точки  $z$ , являющейся вершиной  $n$ -угольника. (Ср. задачу 4)

30. Многочлен  $P_n$ , для которого  $P_n(\cos x) = \cos nx$ , называется  $n$ -ым многочленом Чебышёва. Доказать, что такой многочлен существует, единствен, имеет вещественные коэффициенты и степень  $n$ .

31. (Продолжение.) Найти корни многочленов Чебышёва и их старшие коэффициенты. (Указание. Ответ "старший коэффициент равен  $1$ " неверен.)

32. (Продолжение.) Найти число решений уравнений  $P_n = 1$  и  $P_n = -1$  на отрезке  $[-1, 1]$  ( $P_n$  —  $n$ -ый многочлен Чебышёва).

33. (Продолжение.) Доказать, что если многочлен  $P$  с действительными коэффициентами таков, что  $|P(x)| \leq 1$  при  $|x| \leq 1$ , то уравнение  $P(x) = P_n(x)$  имеет не меньше  $n$  решений ( $P_n$  —  $n$ -ый многочлен Чебышёва). (Указание. См. задачу 32.)

34. Доказать, что если  $P$  - многочлен степени  $n$  с действительными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1, то  $|P(x)| \geq 1/2^{n-1}$  хотя бы для одного  $x \in [-1, 1]$ . Эту оценку нельзя улучшить.

35. Даны  $n$  точек  $A_1, \dots, A_n$  и отрезок длины 1. Доказать, что на отрезке найдется точка  $M$ , для которой  $|MA_1| \cdot \dots \cdot |MA_n| \geq 1/2^{2n-1}$ .

36. Доказать, что многочлен  $(x-a_1) \dots (x-a_n) - 1$  где  $a_1, \dots, a_n$  - различные целые числа, неприводим в  $\mathbb{Z}[x]$ .

Комплексное число называется целым алгебраическим числом, если оно есть корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1.

37. Какие существуют целые алгебраические числа среди рациональных? Будет ли число  $\sqrt{2}/2$  целым алгебраическим?

38. Доказать, что сумма и произведение целых алгебраических чисел - целое алгебраическое число.

39. Доказать, что число  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2}$  иррационально.

40. Функция  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , сопоставляющая с каждой парой действительных чисел  $\langle x, y \rangle$  число  $f(x, y)$ , такова, что при каждом  $x$  функция  $y \mapsto f(x, y)$  совпадает с некоторым многочленом, а при каждом  $y$  функция  $x \mapsto f(x, y)$  совпадает с некоторым многочленом. Доказать, что  $f$  можно представить как сумму слагаемых вида  $c_{kl} x^k y^l$ . (Указание. Множество действительных чисел несчетно.)

41. Даны произвольные комплексные числа  $a_0, \dots, a_n$  (среди которых, возможно, есть совпадающие) и произвольные комплексные числа  $z_0, \dots, z_n$ . Доказать, что существует единственный многочлен  $P$  степени не выше  $n$ , для которого  $P(a_0) = z_0, P'(a_1) = z_1, P''(a_2) = z_2, \dots, P^{(n)}(a_n) = z_n$