Множество задач.

В этом листке собраны самые разные задачи, как простые, так и не очень простые.

1. В вершинах шестиугольника написаны числа 0,1,0,1,0,0 (по часовой стрелке). За один шаг разрешается к двум соседним числам прибавить по 1. Можно ли за несколько таких шагов сделать все числа равными?

2. В кружке 20 участников. На дом задали несколько задач. Получилось так, что каждую задачу решили 2 участника, а каждый участник решил 3 задачи. Сколько было задач?

3. Какое наименьшее число распилов необходимо, чтобы распилить куб со стороной 3 см на 27 маленьких кубиков? (Распил производится по плоскости; части разрешается перекладывать и пилить сразу несколько частей.)

4. Может ли шахматный конь попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле по одному разу?

5. Прямоугольник замостили плитками размеров 2·2 и 1·4. Затем одну из плиток 2·2 потеряли, но нашли лишнюю плитку 1·4. Доказать, что замостить тот же прямоугольник не удастся.

6. Из шахматной доски вырезали два противоположных угловых квадратика. Можно ли после этого разрезать её на прямоугольники 1·2 ?

7. Сто разных фишек поставлены в ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно поменять местами. Удастся ли переставить фишки в обратном порядке?

8. В 12 домах, покрашенных в белый и красный цвет, живут 12 гномов. У каждого гнома нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который покрашены дома большинства его друзей. В феврале это делает второй,..., в декабре - двенадцатый. Доказать, что через несколько лет цвета домов перестанут меняться.

9. На окружности в каком-то порядке нарисовано 20 плюсов и 20 минусов. Доказать, что число пар соседних плюсов равно числу пар соседних минусов.

10. В последовательности из нескольких различных фишек 1983 раза поменяли местами какие-то пары соседних фишек. Могла ли после этого получиться исходная последовательность?

11. На полке стоят в беспорядке тома энциклопедии. Найдя какие-то два тома, стоящие в обратном порядке (том с большим номером левее тома с меньшим номером), мы меняем их местами. Доказать, что в каком бы порядке мы это не делали, рано или поздно мы расположим тома в порядке возрастания номеров.

12. На доске написаны числа 0,0,0,1. За один шаг разрешается прибавить по 1 к любым двум из них. Можно ли, повторяя это, добиться, чтобы все числа стали равными?

13. С последовательностью из 10 нулей и 10 единиц несколько раз производится такая операция: стоящие рядом цифры 10 заменяются на 0...01 (число нулей любое). Доказать, что эта операция не может применяться бесконечно много раз подряд.

14. Во всех клетках таблицы 100·100 стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, в которой 1983 минуса ?

15. В таблице $5 \cdot 5$ стоят целые числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел одного столбца или у всех чисел одной строки. Докажите, что, повторяя это, можно добиться, чтобы сумма всех чисел в каждой строке и в каждом столбце была неотрицательной.

16. Игра домино состоит из 28 костей, соответствующим 28 парам цифр от 0 до 6. Кости выложены в цепочку, причем друг к другу прикладываются одинаковые цифры. На одном конце цепочки цифра 5. Какая цифра на другом конце?

17. Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояних (гореть или не гореть). На пульте несколько переключателей, переключение каждого из них приводит к изменению состояния группы лампочек (каждому переключателю соответствует своя группа). Вначале лампочки не горят. Доказать, что число возможных состояний табло есть степень 2. Найти его, если табло есть прямоугольник $m \times n$, а переключателей $m+n$ (соответствующих m строкам и n столбцам).

18. Несколько окружностей разбивают плоскость на части. Нужно покрасить некоторые части белой краской, а некоторые - черной, причем так, чтобы любые соседние (имеющие общую границу) части были покрашены по-разному. Доказать, что это всегда возможно.

19. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в 2 цвета. Доказать, что найдутся две вертикальные и две горизонтальные прямые, на пересечении которых стоят 4 точки одного цвета.

20. Доказать, что число натуральных делителей натурального числа n не превосходит $2\sqrt{n}$.

21. В метровом стержне просверлил дырки, разделившие его на q равных частей, а затем просверлили (независимо) дырки, делящие его на p равных частей. Затем его распилили на $p+q$ равных частей. Доказать, что если p и q - различные простые числа, то получатся две части без дырок (крайние), а в каждой из остальных частей будет по одной дырке.

22. Можно ли изобразить участок шара (например, Земного) на плоской карте так, чтобы расстояние между точками на шаре (измеренное по прямой - длина прямого туннеля) было бы равно расстоянию между их изображениями на карте?

23. В последовательности Фибоначчи два первых члена равны 1, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих. Могут ли два соседних члена этой последовательности делиться на 57?

24. Доказать, что если сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 7, то каждое из них делится на 7.

25. В Зазеркалье 1984 города. Некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города можно проехать в каждый, но если мы закроем хотя бы одну из дорог, то это свойство нарушится. Доказать, что в Зазеркалье ровно 1983 дороги.

26. Сеть линий метро такова, что из любой станции можно проехать в любую (возможно, с пересадками). Доказать, что можно закрыть одну из станций (запретив проезд через нее) так, чтобы из любой оставшейся станции можно было по-прежнему проехать в любую оставшуюся.

27. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $2^x + 3^y + 5^z$, где x, y, z - натуральные числа.

28. На клетчатой бумаге играют А и Б. Одним ходом можно соединить две соседние вершины (находящиеся на расстоянии I). Начинает А, дальше игроки ходят по очереди. Доказать, что Б может помешать А образовать из своих линий замкнутый многоугольник.

29. Двое играют в крестики-нолики по таким правилам: первый ставит два крестика, второй - нолик, затем первый - два крестика, второй - нолик и т. д. Первый выигрывает, когда на одной горизонтали или одной вертикали стоит рядом 1984 крестика. Доказать, что первый может всегда добиться победы.

30. Из каждой вершины треугольника проведен отрезок, соединяющий её с некоторой точкой, лежащей внутри противоположной стороны. Доказать, что середины этих отрезков не могут лежать на одной прямой.

31. На кольцевом шоссе есть несколько бензоколонок, в каждой из них какой-то запас бензина. Всего бензина достаточно, чтобы объехать по шоссе кругом. Доказать, что есть такая бензоколонка, отправляясь от которой машина с первоначально пустым баком может объехать шоссе по кругу, заправлясь по пути.

32. В клетках бесконечной клетчатой доски расположены натуральные числа, причем каждое из них равно среднему арифметическому четырех соседних (справа, слева, вверху и внизу). Доказать, что все числа равны.

33. Какое максимальное количество натуральных чисел от I до 50 можно выбрать, чтобы среди них не было отличающихся ровно в 2 раза?

34. Некоторые поля шахматной доски заминированы, причем так, что ни с какого поля левого края доски король не может добраться до правого края доски, минуя заминированные поля. Доказать, что ладья может пройти из некоторого поля верхнего края доски до нижнего края, двигаясь только по заминированным полям.

35. В шеренгу выстроено 20 восьмиклассников, за каждым из них стоит семиклассник, меньший его по росту. Доказать, что если перестроить восьмиклассников и семиклассников по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего за ним семиклассника.

36. Триста человек построены в 30 шеренг и IO рядов. Из каждой шеренги выбрали самого высокого, а из этих 30 - самого низкого. Потом из каждого ряда выбрали самого низкого, а из низких - самого высокого. Кто окажется выше: самый высокий из низких или самый низкий из высоких?

37. 20 школьников получили на дом список из 20 задач. Каждый школьник решил 2 задачи, и каждую задачу решили 2 школьника. Доказать, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал по одной задаче (из решенных им) и все задачи были бы рассказаны.

38. В школе работает некоторое количество кружков. Администрация хочет назначить в каждом кружке старосту так, чтобы ни один человек не был старостой двух кружков сразу. Доказать, что это невозможно сделать в том и только том случае, если имеется k кружков, для которых количество школьников, ходящих хотя бы в один из них, меньше k .

39. Доказать утверждение задачи 37, если каждый школьник решил IO задач и каждую задачу решили IO школьников.

40. Комиссия собиралась 40 раз, каждый раз присутствовало IO человек и никакие двое из членов комиссии не встречались на заседаниях более одного раза. Доказать, что число членов комиссии больше 60.