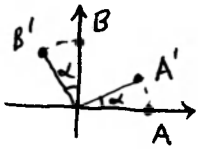
Повороты и тригонометрия

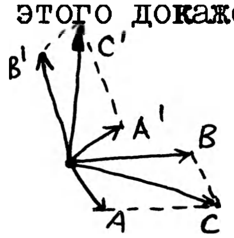
Выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Мы будем рассматривать повороты вокруг начала координат.



I. Найти координаты точки, в которую переходит точка $A\langle 1, 0\rangle$ при повороте на угол α вокруг начала координат.

2. Тот же вопрос для точки $B\langle 0, 1\rangle$.

Мы хотим выяснить, куда переходит произвольная точка $\langle x, y\rangle$. Для этого докажем некоторые свойства поворотов.*)

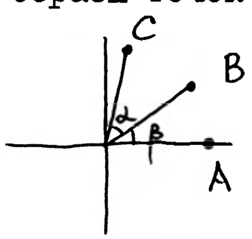


3. (Аддитивность.) Пусть $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ и точки A', B', C' получаются из A, B, C поворотом вокруг точки O. Тогда $\vec{OC'} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$.

(Указание. При повороте – как и при всяком движении – параллелограмм переходит в параллелограмм.)

4. (Однородность.) Пусть $\vec{OB} = k\cdot\vec{OA}$ и точки A', B' получаются из точек A, B поворотом вокруг O. Тогда $\vec{OB'} = k\cdot\vec{OA'}$

5. Доказать, что точка $\langle x,y\rangle$ при повороте на угол α переходит в точку $\langle x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\rangle$. (Указание. Согласно задаче 3, для нахождения образа точки $\langle x,y\rangle$ достаточно найти образы точек $\langle x, 0\rangle$ и $\langle 0,y\rangle$; это делается с помощью I,2,4.)



6. Точка B получается из точки $A\langle 1, 0\rangle$ поворотом на угол β. Пользуясь задачей I и предыдущей задачей, найти координаты точки C, получающейся из B поворотом на угол α, т.е. точки $R^{\alpha}(R^{\beta}(A))$

7. Пользуясь результатом предыдущей задачи и тем, что $R^{\alpha}(R^{\beta}(A)) = R^{\alpha+\beta}(A)$, выразить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$ через $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$.

Замечание. Как отмечалось в "Геометрических преобразованиях", можно определить R^{α} при любых α (а не только при $|\alpha|\leq 180$) так, что $R^{\alpha}\circ R^{\beta} = R^{\alpha+\beta}$. Определив $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ как координаты точки $R^{\alpha}(\langle 1, 0\rangle)$, мы видим, что выведенные в задаче 7 формулы справедливы при всех α и β.

8. Вывести "формулы приведения" для $\cos(\alpha+90^\circ)$, $\cos(\alpha+180^\circ)$, $\cos(\alpha+270^\circ)$, $\sin(\alpha+90^\circ)$, $\sin(\alpha+180^\circ)$, $\sin(\alpha+270^\circ)$, выражающие их через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

9.* При каких a существует такое x, что (I) $\sin x = a$ и $\cos x = 4/5$; (2) $\sin x = a$ или $\cos x = 4/5$?

10.* Известно, что числа a и b таковы, что $\cos x + \sqrt{3}\sin x = a\cos(x+b)$ при всех x. Найти a и b.

*) Преобразования, обладающие этими свойствами, называются <u>линейными</u>. Повороты, как и все движения, сохраняющие точку O, линейны (но не исчерпывают всех линейных преобразований.