Соизмеримость и несоизмеримость.

Определения. Отрезки a и b называются соизмеримыми, если существует их общая мера, т.е. отрезок c, укладывающийся и в a, и в b целое число раз.

Натуральным числом называется одно из чисел 0, I, I+I, I+I+I,... Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$. Целыми числами называются натуральные числа и противоположные к ним. Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$. Рациональными числами называются числа, равные m/n, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Задачи.

I. Отрезки a и b соизмеримы $\Longleftrightarrow$ $b/a \in \mathbb{Q}$

2. Отрезки a и b соизмеримы $\Longleftrightarrow$ существует их общее кратное, т.е. отрезок c, в котором они оба укладываются целое число раз.

3. Если a и b соизмеримы и b и c соизмеримы, то a и c соизмеримы.

4. По кольцевой дороге длиной I км отправляется эстафета, каждый этап которой имеет длину x км ($0 < x < 1$). Доказать, что один из этапов эстафеты кончится в точке старта тогда и только тогда, когда число x рационально.

5* (Продолжение.) Если x иррационально, то существует этап эстафеты, который закончится в точке, отстоящей от точки старта менее чем на I см.

6. Доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. (Указание. Пусть m/n – несократимая дробь, $(m/n)^2 = 2$, $m^2 = 2n^2$. Докажите, что m четно. Докажите затем, что n четно и получите противоречие с несократимостью.)

7. Из теоремы Пифагора следует, что если b – диагональ квадрата, сторона которого равна a, то $b^2 = 2a^2$. Докажите, что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы и что их отношение – иррациональное число (число, не являющееся рациональным).

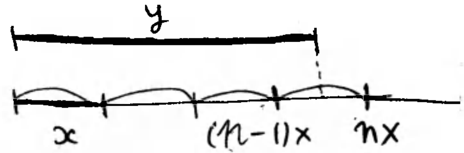
8. Если $x, y \in \mathbb{Q}$, то $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$, $x/y \in \mathbb{Q}$

9. а) Известно, что $x \notin \mathbb{Q}$, $y \notin \mathbb{Q}$. Можно ли утверждать, что $x+y \notin \mathbb{Q}$? б) Известно, что $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$. Можно ли утверждать, что $x+y \notin \mathbb{Q}$?

IO. Прямая $y = kx$ проходит через целочисленную точку (точку вида $\langle m, n \rangle$, где $m, n \in \mathbb{Z}$), отличную от начала координат тогда и только тогда, когда k рационально.

II* На плоскости нарисованы окружности радиуса 0,00I с центрами во всех целочисленных точках, кроме начала координат. Докажите, что любой луч, выходящий из начала координат, упирается в одну из них.

Соизмеримость и несоизмеримость - 2



<u>Аксирма Архимеда</u>. Пусть x, $y>0$. Тогда существует такое натуральное n, что $(n-1)x \le y < nx$

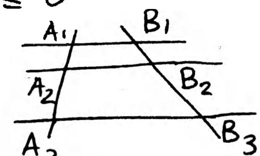
(Это утверждение названо аксиомой, так как оно не выводится из известных нам свойств действительных чисел.)

I2. Для всякого x найдется натуральное n, большее x.

I3* Вывести аксиому Архимеда из утверждения задачи I2.

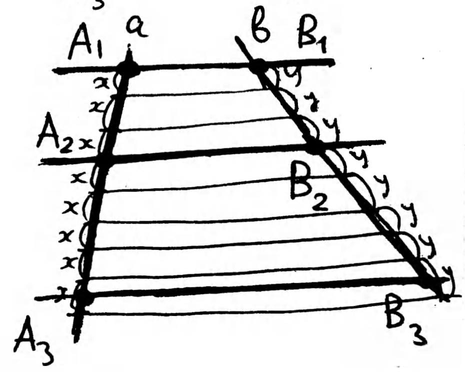
I4. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$

I5. Если $x \le \frac{1}{n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $x \le 0$



I6. Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$

то $A_1A_2 / A_2A_3 = B_1B_2 / B_2B_3$



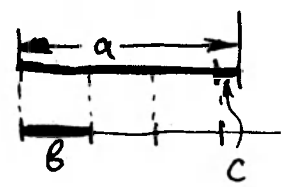
Указание. Пусть n - произвольное натуральное число. Разделим отрезок A_1A_2 на n равных частей, каждая длиной x. По аксиоме Архимеда найдется такое m, что $(m-1)x \le A_2A_3 < mx$ Отметим соответствующие точки и проведем через них параллельные прямые. Они высекут на прямой b равные отрезки; обозначим их длину y Тогда $B_1B_2 = ny$, $(m-1)y \le B_2B_3 < my$, откуда

$$\frac{m-1}{n} \le \frac{A_2A_3}{A_1A_2} < \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{m-1}{n} \le \frac{B_2B_3}{B_1B_2} < \frac{m}{n}$$

Выведите отсюда, что $|B_2B_3/B_1B_2 - A_2A_3/A_1A_2| \le \frac{1}{n}$ и, используя задачу I5, что $B_2B_3/B_1B_2 = A_2A_3/A_1A_2$

I7* Докажите, что в любом интервале $]a,b[$ с $a<b$ есть а) рациональное число; б) иррациональное число.

I8* Постройте взаимно однозначную функцию $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.



I9* <u>Алгоритм Евклида</u>. Пусть a и b - пара отрезков, причем $a > b$. <u>Преобразование Евклида</u> переводит эту пару в пару b, c, где c - "остаток от деления a на b", т.е. отрезок, оставшийся после вычитания из a максимально возможного числа отрезков длиной b (Это возможно по аксиоме Архимеда.) <u>Алгоритм Евклида</u> состоит в применении преобразования Евклида до тех пор, пока не получится пара отрезков вида $(d, 0)$. Если такая пара получается, то применение алгоритма Евклида заканчивается и результатом считается d.

Докажите:

(а) Если применение алгоритма Евклида к отрезкам a и b заканчивается и дает отрезок d, то a и b соизмеримы и d - их общая мера.

(б) Если отрезки a и b соизмеримы, то применение алгоритма Евклида к ним заканчивается.

(в) Пусть X - общая мера отрезков a и b, d - результат применения к ним алгоритма Евклида. Тогда d кратно X.

(продолжение задачи I9) Из свойств (а) - (в) вытекает, что применение алгоритма Евклида к отрезкам a и b

- не заканчивается, если a и b несоизмеримы;

- дает общую меру a и b, кратную любой другой общей мере ("наибольшую общую меру"), если a и b соизмеримы.

20*. К паре отрезков a и b, длина которых не превосходит I м, применили 20 раз преобразование Евклида. Доказать, что длина получившихся отрезков не превосходит I мм.

2I*. Блоха прыгает по прямой прыжками двух видов - длины a и длины b. Доказать, что:

(а) если a и b соизмеримы, d - их наибольшая общая мера, то блоха может сдвинуться на любое расстояние, кратное d и не может сдвинуться на расстояние, не кратное d;

(б) если a и b несоизмеримы, то блоха может попасть из любой точки в любой заданный отрезок;

(в) вывести из результата (б) утверждения задач 5 и II.