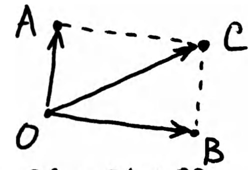
Приди — и насладися благ.
Г.Р. Державин.

Векторы на плоскости

I. Направленные отрезки: сложение и умножение на число.

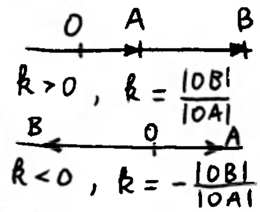

Направленный отрезок AB

Направленным отрезком называется отрезок, у которого одна из крайних точек объявлена началом, а другая – концом. Отрезок с началом A и концом B обозначается AB и изображается стрелкой. (Таким образом, AB и BA – разные направленные отрезки.)


$OC = OA + OB$

Суммой направленных отрезков OA и OB с общим началом называется направленный отрезок OC, где C – такая точка, что $OACB$ – параллелограмм.

Произведением числа k и направленного отрезка OA называется такой направленный отрезок OB, лежащий на прямой OA, что: (а) $|OB| = |k| \cdot |OA|$; (б) точки A и B лежат по одну сторону от O при $k > 0$ и по разные – при $k < 0$.



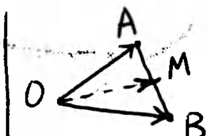
Направленный отрезок, у которого начало совпадает с концом, называется нулевым.

1. Доказать ассоциативность сложения направленных отрезков: $OA + (OB + OC) = (OA + OB) + OC$.

2. Доказать, что $x \cdot (OA + OB) = x \cdot OA + x \cdot OB$

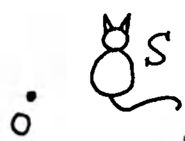
3.* Определить разумным способом сумму $OA + OB$ в случае, если точки O, A и B лежат на одной прямой, и доказать, что $(x+y) \cdot OX = x \cdot OX + y \cdot OX$

4. Дан отрезок OA. Построить отрезок OB, для которого $OA + OB$ равно нулевому отрезку OO.

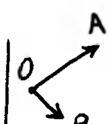


5. Точка M – середина отрезка AB. Выразить OM через OA и OB.

6. Точка A принадлежит фигуре S. Где может находиться точка B, если: (1) $OB = 2 \cdot OA$; (2) $OB = (1/2) \cdot OA$; (3) $OB = (-1/2) \cdot OA$?



7. Нарисованы отрезки OA и OB. Где может находиться точка C, если $OC = OA + x \cdot OB$, x – любое?



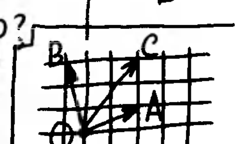
8. (Продолжение)...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $x \geq 0$, $y \leq 0$?

9. (Продолжение) ...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $0 \leq x \leq 1$, $y \leq 0$?

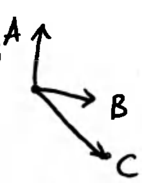
10. (Продолжение) ...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$?

11.* (Продолжение) ...если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$, $x + y = 1$?

12.* Найти x и y, если $OC = x \cdot OA + y \cdot OB$ Каждая клеточка – квадрат!



13. Известно, что $x \cdot OA + y \cdot OB + z \cdot OC = x_1 \cdot OA + y_1 \cdot OB + z_1 \cdot OC$; следует ли отсюда, что $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$?



2. Направленные отрезки: эквивалентность.

Направленные отрезки AB и CD эквивалентны, если $|AB| = |CD|$, $AB \parallel CD$ и AB и CD направлены в одну сторону.

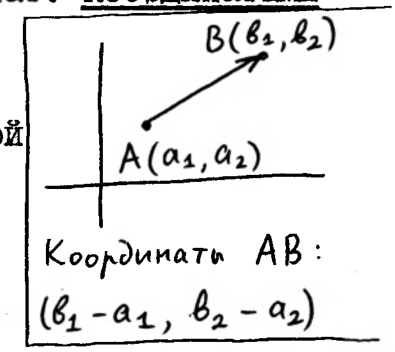
1. Доказать, что AB эквивалентен CD (запись: $AB \equiv CD$) тогда и только тогда, когда $ABDC$ – параллелограмм.

2. Доказать, что $AB \equiv CD$ тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.

3. Дана точка C и отрезок AB. Построить точку X так, чтобы выполнялось соотношение: (1) $CX \equiv AB$; (2) $XC \equiv AB$.

4*. Рассмотрим множество M всех отрезков, эквивалентных данному (направленному) отрезку. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством M и множеством всех точек плоскости.

Пусть на плоскости задана система координат. Координатами направленного отрезка AB называются числа, которые получатся, если из координат его конца вычесть координаты его начала. Например, нулевой направленный отрезок имеет координаты (0, 0).



5. Доказать, что координаты суммы направленных отрезков OA и OB равны сумме координат OA и координат OB.

6. Доказать, что координаты направленного отрезка $c \cdot OA$ получаются из координат направленного отрезка OA умножением на c.

7. Вывести из задач 5 и 6 утверждения задач 1 – 3 предыдущего пункта ("Направленные отрезки: сложение и умножение на число").

8. Доказать, что направленные отрезки эквивалентны тогда и только тогда, когда их координаты равны.

9. Даны координаты точек $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$. Найти координаты точки D, если $AB \equiv CD$.

3. Векторы.

Вектором (точнее, вектором на плоскости) называется пара чисел (a_1, a_2). Числа a_1 и a_2 называются компонентами, или координатами, вектора (a_1, a_2). Суммой векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ называется вектор $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Произведением числа c и вектора a называется вектор $ca = (ca_1, ca_2)$. Вектор (0, 0) называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Вектор $(-a_1, -a_2)$ называется противоположным к вектору $a = (a_1, a_2)$ и обозначается $-a$.

1. Проверьте, что для любых векторов a, b, c выполнены равенства $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a+0=a$, $a+(-a)=0$.

2. Проверьте, что для любых векторов a, b и чисел k, l выполнены равенства а) $k\cdot(a+b)=k\cdot a+k\cdot b$; б) $(k+l)\cdot a=k\cdot a+l\cdot a$.

3. Дано, что $(2,4)=x\cdot(2,1)+y(-1,3)$. Найти x и y.

Пусть на плоскости задана система координат. Тогда каждому направленному отрезку AB ставится в соответствие вектор, образованный из координат этого отрезка. Он обозначается $\overrightarrow{AB}$.

4. Доказать, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $AB\equiv CD$.

Таким образом, эквивалентным направленным отрезкам ставится в соответствие один и тот же вектор. Можно сказать, что векторы – это просто "направленные отрезки, если считать эквивалентные отрезки равными". Следующие задачи показывают, что определения сложения для направленных отрезков и векторов согласованы.

5. Доказать, что если направленный отрезок OC равен сумме отрезков OA и OB, то векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ равны.

6. Доказать, что если направленный отрезок OC равен $\lambda\cdot OA$, то $\overrightarrow{OC}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA}$.

7. Доказать, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

8. Дана точка A с координатами (a_1,a_2) и вектор $v=(v_1,v_2)$. Доказать, что существует и единственна точка B, для которой $\overrightarrow{AB}=v$. Найти её координаты. (Таким образом, от любой точки можно отложить любой вектор, причем единственным образом.)

9. На плоскости нарисован правильный шестиугольник. Рассмотрим множество всех векторов вида $\overrightarrow{AB}$, где A и B – вершины шестиугольника. Сколько элементов в этом множестве?

4. Сводка результатов.

Мы определили понятия вектора, суммы векторов, нулевого вектора, противоположного вектора, произведения числа и вектора. При этом выполняются такие свойства: (λ,μ – числа, a, b – вектора)

В1. $a+b=b+a$ В2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ В3. $a+\vec{0}=a$ В4. $a+(-a)=\vec{0}$	В5. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ В6. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ В7. $1\cdot a=a$	В8. $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$. В9. $0\cdot a=\vec{0}$

Они называются аксиомами векторного пространства. Обратите внимание, что в них входят два нуля – число 0 и вектор $\vec{0}$. В следующих задачах предлагается вывести из них некоторые следствия (не обращаясь к определениям!).

1.* Вывести из аксиом (B1) – (B9), что если $a+c=b+c$, то $a=b$.

2.* Вывести (B8), (B9) из (B1) – (B6).

3.* Доказать, что $a+a=2\cdot a$.

4.* Доказать, что $(-1)\cdot a=-a$.

5.* Доказать, что если $x\cdot a=\vec{0}$ (x – число, a – вектор), то $x=0$ или $a=\vec{0}$.

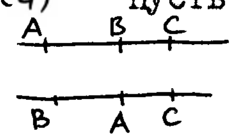
Векторы связаны с точками плоскости следующим образом. Каждой паре точек A и B соответствует некоторый вектор, обозначаемый $\overrightarrow{AB}$. При этом:

(C1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ – параллелограмм;

(C2) для всякой точки A и всякого вектора a существует и единственна точка B, для которой $\overrightarrow{AB}=a$;

(C3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(C4) Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Тогда:



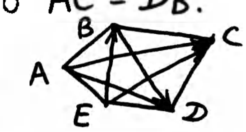
если B между A и C, то $\overrightarrow{AC}=(|AC|/|AB|)\overrightarrow{AB}$;
если A между B и C, то $\overrightarrow{AC}=-(|AC|/|AB|)\overrightarrow{AB}$

6.* Вывести из перечисленных свойств, что $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

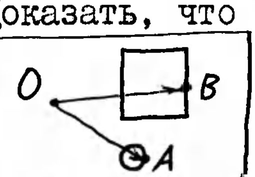
5. Задачи.

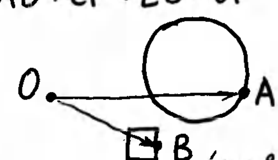
При решении этих задач следует по возможности ссылаться на перечисленные свойства векторов, а не на определения.

1. Доказать, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.
2. Доказать, что $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.
3. Доказать, что свойства $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ равносильны.
4. Известно, что $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{XD}$. Доказать, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$.
5. Выразить $\overrightarrow{AD}$ через $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EB}$



6. Дан параллелограмм $ABCD$ с центром O. Доказать, что $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CX}+\overrightarrow{DX}=4\overrightarrow{OX}$ для любой точки X.
7. Известно, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Доказать, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.
8.* Где может лежать точка X, если $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, A лежит на окружности, B – на границе квадрата?





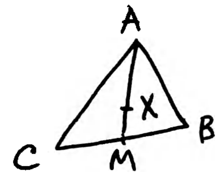
(рис. 2)

9.* Тот же вопрос, если рисунок такой (рис. 2):

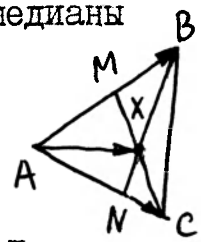
10.* Дано 10 векторов. Сумма любых 7 из них равна 0. Доказать, что все вектора равны 0.

11. Точка X делит отрезок AB в отношении $m:n$. Доказать, что $\overrightarrow{OX}=(n/m+n)\overrightarrow{OA}+(m/n+m)\overrightarrow{OB}$.
(Указание. $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$.)

12. Точка X делит медиану AM треугольника ABC в отношении 2 : 1. Выразить OX через OA, OB и OC.



13. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.



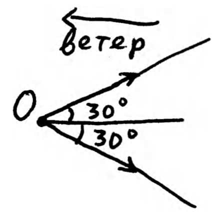
14.* Точка M делит AB в отношении $p : q$, точка N делит AC в отношении $k : l$. Выразить $\vec{AX}$ через $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

15. Даны 3 точки O, A и B, причем $A \neq B$. Доказать, что множество тех точек C, для которых $\vec{OC} = \lambda \vec{OA} + (1-\lambda)\cdot\vec{OB}$, есть прямая AB. (Указание. $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$)

16. (Продолжение.) Какое множество получится, если рассматривать только $\lambda \geqslant 0$?

17. (Продолжение.) ... только $\lambda \in [0,1]$

18. Парусник может плыть галсами под углом 30° против ветра в одном из двух направлений со скоростью 10 км/ч. (1) В какие точки он может приплыть из точки O ? (2)*...приплыть не более чем за час? (3)* ровно за час?



19.* Те же вопросы, если не разрешается плыть в одном направлении более 5 минут подряд.

20.* Даны три различные точки O, A, B Точка X такова, что $\vec{OX} = x\cdot\vec{OA} + y\cdot\vec{OB}$. При каких x и y точка X лежит: (1) внутри треугольника OAB ? (2) на границе треугольника OAB ? (Изобразить искомые множества пар $\langle x, y\rangle$ на координатной плоскости.)

21.* Пусть имеется система точек $A_1, \ldots, A_n$, каждой из которых приписано неотрицательное число ("масса") m_i. Точка M называется центром масс системы, если для любой точки O выполнено равенство $(m_1 + \ldots + m_n)\vec{OM} = m_1\vec{OA_1} + \ldots + m_n\cdot\vec{OA_n}$. Доказать, что центр масс всегда существует и единствен.

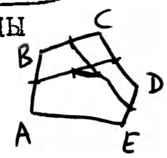
22.* Сформулировать и доказать утверждение о том, что при нахождении центра масс можно заменить часть точек одной точкой, находящейся в центре масс заменяемых точек и имеющей массу, равную сумме их масс.

23.* Где может находиться точка X, если
$\vec{OX} = x\cdot\vec{OA} + y\cdot\vec{OB} + z\cdot\vec{OC}$, $x+y+z=1$, $x,y,z \geqslant 0$?
(Указание. Где может находиться центр масс трех точек?)

24.** Где может находиться точка X, если
$\vec{OX} = x\cdot\vec{OA} + y\cdot\vec{OB} + z\cdot\vec{OC} + u\cdot\vec{OD}$, $x+y+z+u=1$, $x,y,z,u \geqslant 0$?

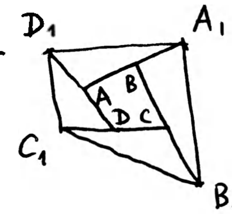
25.** Обобщить утверждение предыдущей задачи для большего числа точек.

26. Середины сторон AB и CD, BC и DE пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Середины полученных отрезков снова соединены отрезком. Доказать, что последний отрезок параллелен AE AE и длина его равна $(1/4)\cdot|AE|$.



27.* Построить 5-угольник по серединам его сторон.

28.* На доске был нарисован 4-угольник $ABCD$. Его стороны продолжили на расстояния, равные их длинам, получив точки A_1, B_1, C_1, D_1. После этого рисунок стерли, оставив точки A_1, B_1, C_1, D_1. Восстановить четырёхугольник $ABCD$.

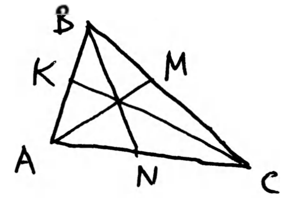


29.* Точки $X_1, \ldots, X_n$ лежат по одну сторону от прямой, проходящей через точку O. Может ли сумма $\overrightarrow{OX_1} + \ldots + \overrightarrow{OX_n}$ равняться $\vec{0}$?

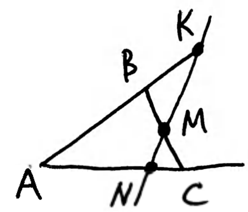
30.* Дано, что $\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + \ldots + \overrightarrow{OX_n} = 0$. Доказать, что существуют такие i и j, что угол X_iOX_j больше или равен 120°.

31.* (Теорема Чевы.) В треугольнике ABC проведены отрезки AM, BN, CK, соединяющие каждую вершину с точкой на противоположной стороне. Доказать, что эти отрезки тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда

$$(AK/KB)\cdot(BM/MC)\cdot(CN/NA) = 1$$



32.* На сторонах треугольника ABC и на их продолжениях взяты точки K, M, N. Доказать, что эти точки тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда $(AK/KB)\cdot(BM/MC)\cdot(CN/NA) = 1$ (Теорема Менелая.)

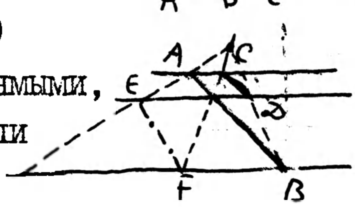


33.* (Частный случай теоремы, обратной к теореме Дезарга.) Стороны треугольника ABC параллельны соответственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

34.* (Частный случай теоремы Паскаля.) Доказать, что если $AB' \parallel BC'$ и $A'B \parallel B'C$, то $AA' \parallel CC'$

35.* (Частный случай теоремы Брианшона.) Три параллельные прямые пересечены тремя прямыми, выходящими из одной точки. Доказать, что если

$$AB \parallel CD, \text{ то } CD \parallel EF$$



36.* Доказать, что если O – центр правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, то $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

6.* Приложение. Векторы как классы эквивалентности.

Мы определяли векторы как пары чисел. При этом требовалось введение системы координат. Это не совсем хорошо, так как на плоскости *a priori* нет никаких координат. Опишем классический способ введения векторов без использования системы координат.

I.* Доказать, что множество всех направленных отрезков можно разбить на классы так, что: а) каждый направленный отрезок попадет хотя бы в один класс; б) классы не пересекаются; в) все отрезки одного класса эквивалентны друг другу; г) отрезки из разных классов не экивалентны.

Вектором называется класс эквивалентных направленных отрезков из задачи I.

Пусть a и b – два вектора, т.е. класса эквивалентности. Определим их сумму (снова класс!) следующим образом. Выберем на плоскости точку O и направленные отрезки $OA \in a$ и $OB \in b$ (почему это можно?). Суммой $a+b$ будем считать класс, содержащий направленный отрезок $OA + OB$. Аналогично определим произведение вектора на число. Чтобы все сказанное имело смысл, нужно еще проверить, что классы $a+b$ и $x \cdot a$, определенные указанным образом, не зависят от выбора точки O и представителей OA, OB: если мы выберем их иначе, то получится тот же самый класс.

2.* Проверьте корректность введенных определений суммы векторов и произведения вектора на число.

3.* Назовем направленные отрезки AB и CD параллельными, если прямые AB и CD параллельны, а направленные отрезки AB и CD направлены в одну и ту же сторону. Проверьте, что утверждение задачи I останется верным, если заменить эквивалентность на параллельность. Назовем "стрелой" класс параллельных направленных отрезков. Можно ли определить (аналогично тому, как мы это сделали для векторов) произведение стрелы на число и сумму стрел?

4.* Проверьте все свойства векторов, указанные в "Сводке результатов".