ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ
2000–2004

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ 2000-2004

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

предлагавшиеся ученикам математического класса
57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д»)

Под редакцией В. Доценко

Москва
Издательство МЦНМО
2004

УДК 51 (023)
ББК 22.1
315

Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического
315 класса 57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д») / Под ред. В. Доценко. — М.: МЦНМО, 2004. — 224 с.: ил.

ISBN 5-94057-153-0

Книга содержит учебные материалы, составлявшие содержание курса «математического анализа» в математическом классе 57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д»). В неё включены задачи вечерней математической школы и собеседований, задачи всех трёх лет обучения (включая контрольные работы и экзамены), список тем прочитанных лекций и избранные курсовые работы школьников.

ББК 22.1

Тексты, составляющие книгу, являются свободно распространяемыми и доступны по адресу
`ftp://ftp.mccme.ru/pub/users/dotsenko/school/d2004`

В оформлении книги использованы
гравюра П. Брейгеля «Осёл в школе»,
иллюстрация Г. Доре к «Божественной Комедии» Данте Алигьери,
гравюра А. Дюрера из цикла «Апокалипсис»,
гравюра Г. Мютцеля «Водосвинка, или капибара»,
гравюра Рембрандта ван Рейна «Христос изгоняет торжников»,
гравюра У. Хогарта «Учёные на лекции»,
гравюра неизвестного художника конца 19 века,
а также графические работы А. Подкопаева.

Книга набрана шрифтами типа Times, изготовленными
Д. Медниковым, М. Ушаковым и А. Шенем.

ISBN 5-94057-153-0

Оглавление

Введение

В этой книге собраны материалы по курсу математики в одном из классов московской Пятьдесят седьмой школы (выпуск 2004 года, класс «Д»). По традиции в каждом классе курс математики строится по-своему: не только набор задач, но и список тем в разных классах могут быть совершенно разными. Подборки задач такого рода несколько раз публиковались (см., например, [1] и [2]; материалы по курсам математики в Пятьдесят седьмой школе можно найти в книжках [3] и [4]).

Преподавание математики в классе делилось на три части: алгебра (два часа в неделю), геометрия (два часа) и занятия по задачам (четыре часа), которые по традиции назывались «математическим анализом», хотя в течение первого года задач по анализу практически не было.

Занятия по геометрии вёл Рафаил Калманович Гордин, занятия по алгебре — Пётр Валентинович Сергеев. На этих занятиях значительная часть времени отводилась на решение задач и их обсуждение в классе. Занятия по математическому анализу состояли в выдаче заданий и индивидуальной проверке решений, рассказываемых школьниками; этим занималась большая группа преподавателей (см. главу «Ученики и учителя»).

В течение года перед набором класса мы вели занятия математических кружков; многие (хотя далеко не все) школьники будущего класса бывали на этих занятиях. Задачи, предлагавшиеся на занятиях кружков (и вступительных собеседованиях), также приведены в книге.

Классы «Д» в Пятьдесят седьмой школе набирают, когда школьники заканчивают восьмой класс; курс математики, таким образом, рассчитан на три года. Задачи каждого года в книге выделены в отдельную главу. Каждая из глав начинается краткими комментариями методического характера и заканчивается материалами экзамена за соответствующий год обучения.

В конце книги приведены решения к некоторым задачам. Выбор задач, для которых стоит привести решения, — дело тонкое; мы пытались отдавать предпочтение относительно нетривиальным или малоизвестным задачам. Иногда «решение» является скорее указанием или методическим комментарием — этому совершенно не нужно удивляться.

Хочется поблагодарить всех учителей и сотрудников Пятьдесят седьмой школы, работавших с классом, в частности, Д. И. Аникеева (классный руководитель), Б. М. Давидовича (завуч математических классов) и С. Л. Менделевича (директор школы).

Вместо предисловия

Оценки успеваемости в академии генерального штаба (1880 год)[1]

- 1 степень: Успехи слабые

  Ученик едва прикоснулся к науке, по действительному ли недостатку природных способностей, требуемых для успеха в ней, или потому, что совершенно не радел при наклонностях к чему-либо иному.

- 2 степень: Успехи посредственные

  Ученик знает некоторые отрывки из преподанной науки, но и те присвоил себе одною памятью. Он не проник в её основание и в связь частей, составляющих полное целое. Посредственность сил, может быть, происходит и от некоторой слабости природных способностей, особливо от слабости того самомышления, которого он не мог заменить трудом и постоянным упражнением. Отличные дарования при легкомыслии и празднолюдии влекут за собой те же последствия.

- 3 степень: Успехи удовлетворительные

  Ученик знает науку в том виде, как она была ему преподана. Он постигает даже отношения всех частей к целому в изложенном ему порядке, но он ограничивается книгой или словами учителя, приходит в замешательство от соприкосновенных вопросов, предлагаемых на тот конец, чтобы он сблизил отдалённейшие точки. Даже выученное применяет он не иначе, как с трудом и напряжением.

  На сей степени останавливаются одарённые гораздо более памятью, нежели самомышлением; но они прилежанием своим доказывают любовь к науке. Эту степень можно назвать степенью удовлетворительных успехов потому, что ученик, достигнув оной, в состоянии бывает следовать за дальнейшим развитием науки и применять её в случае надобности. Притом и размышление, всегда позже памяти нас посещающее, пробуждается часто даже среди этой механической работы.

- 4 степень: Успехи хорошие

  Ученик отчётливо знает преподанное ему учение; он умеет изъяснить все части из начал, постигает взаимосвязь их и легко применяет усвоенные истины к обыкновенным случаям. Тут действующий разум ученика не уступает памяти, и он почитает невозможным выучить что-либо, не понимая. Один недостаток прилежания и упражнения препятствует

[1] Этот текст любезно предоставлен С. Г. Смирновым.

такому ученику подняться выше. С другой стороны, и то правда, что самомышление в каждом человеке имеет известную степень силы, за которую черту при всех напряжениях перейти невозможно.

- 5 степень: Успехи отличные

Ученик владеет наукой: весьма ясно и определённо отвечает на вопросы, легко сравнивает отдалённейшие точки учения, с проницательностью, довольно изощрённою упражнениями, разбирает новые и сложные предлагаемые ему случаи, знает слабые стороны учения, места, в коих сомневаться должно, и что можно возразить против теории... Только необыкновенный ум, при помощи хорошей памяти, в соединении с пламенной любовью к наукам, а следовательно, и с неутомимым прилежанием, может подняться на такую высоту в области знания.

Ученики и учителя

Список учеников, принятых в класс:

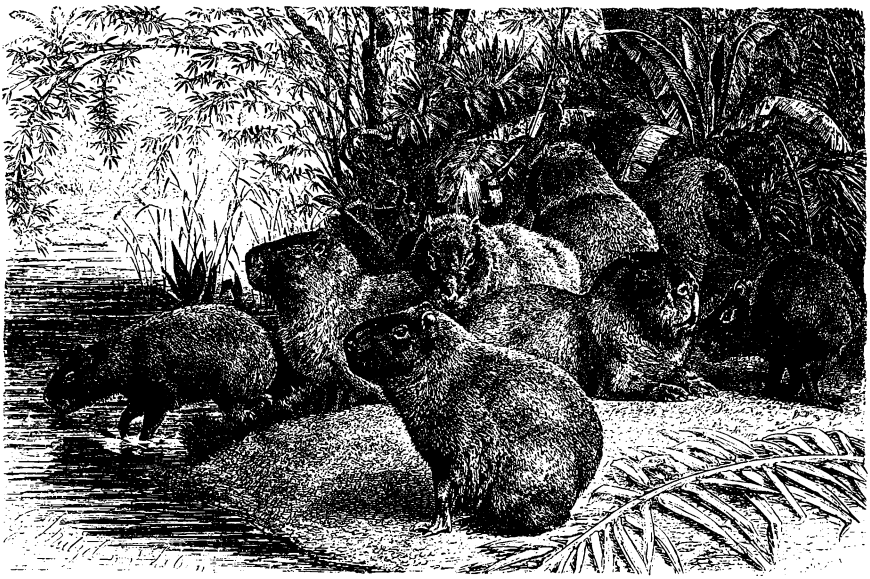
Александров Денис
Антоненко Лидия
Бородкина Виктория
Буряк Александр
Вакуленко Леонид
Дёмина Анастасия
Дронов Михаил
Загоскин Данил
Зарубин Дмитрий
Лохматиков Алексей
Луговкин Владимир
Мазурчик Григорий
Медников Дмитрий
Минасян Александр
Никитин Александр
Подкопаев Антон
Подлевских Александр
Попков Кирилл
Рисенберг Дмитрий
Савченко Руслан
Самохин Александр
Фурсов Андрей
Хачатурьян Мария
Шагам Лев
Шпильман Алексей

На уроках математического анализа с классом работали

Анно Рина
Бабенко Максим
Бурман Юрий
Вьюгин Илья
Доценко Владимир
Кондратьев Владимир
Миронов Денис
Немытов Виктор
Ромащенко Андрей
Сальников Сергей
Трушков Владимир

Ушаков Максим
Финкельберг Михаил
Хангулян Дмитрий
Шварц Дмитрий
Шень Александр
Шрамов Константин
Шувалов Виктор
Эршлер Давид
Якимова Оксана
Ian Le

и другие. В проведении занятий по программированию участвовали Григорий Пупков и Александр Суханов. Лекции школьникам прочитали Константин Кохась, Валерий Рыжиков, Алексей Савватеев и Дмитрий Якобсон. Принимать экзамены по математическому анализу нам помогали Сергей Дориченко, Роман Кузнец, Сергей Маркелов, Семён Посицельский, Евгений Фейгин и Иван Ященко. Наконец, большая группа преподавателей помогала вести занятия Вечерней математической школы.



Вечерняя математическая школа

Вечерняя математическая школа — это кружок по математике, который традиционно работает в пятьдесят седьмой школе для московских школьников 7 и 8 классов. Одна из основных целей этого кружка — найти будущих учеников школы, хотя по традиции независимо от своих успехов на кружке школьники седьмых и восьмых классов сдают вступительные экзамены (традиционно называемые «собеседованиями») на общих основаниях.

Занятия ВМШ (вечерней математической школы) проходят раз в неделю (по средам), обычно в пяти – семи группах (в каждой параллели) по одним и тем же задачам. Каждое занятие продолжается два часа. Приходить может любой школьник, начиная с любого занятия. Обычно занятие происходит так: выдаются листки с задачами; школьник, решивший задачу, поднимает руку, к нему подходит кто-то из преподавателей и слушает решение. Иногда решение разбирается у доски. Задачи одного занятия, как правило, соответствуют одному из стандартных кружковских сюжетов.

Параллельно с занятиями ВМШ мы вели занятия математического кружка в МЦНМО (московском центре непрерывного математического образования); эти занятия проходили по субботам. Чтобы не перегружать школьников двумя кружками, на занятиях кружка мы почти полностью дублировали занятия ВМШ; (немногие) отличия отмечены в книге.

Мы приводим также задачи вступительных собеседований. Первые два собеседования (29 марта и 4 апреля) были письменными: школьникам предлагалось записать ответы и краткие решения задач. Следующие собеседования уже были устными (и проходили примерно так же, как и занятия кружка).

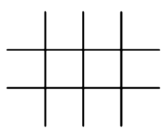
Задачи после звёздочек — дополнительные.

1. Занятие 4 октября 2000 года

1. Имеется 4 монеты, одна из них фальшивая и отличается от настоящих по весу. Как на чашечных весах без гирь за два взвешивания определить фальшивую монету?

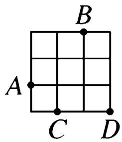
2. В кино 15 рядов по 13 мест. Сколько билетов должен купить Вася, чтобы быть уверенным, что среди них будут два билета на соседние места в одном ряду?

3. Можно ли разрезать арбуз на 4 части так, чтоб после еды осталось 5 корок? Когда ешь, ломать и резать корки нельзя.



4. Дороги идут с севера на юг и с востока на запад. Нарисуйте точки, для которых ближайшая к ним дорога идёт с востока на запад (горизонтально).

5. Нарисуйте точку X, для которой сумма расстояний от X до точек A, B, C, D минимальна.



6. Можно ли среди чисел $1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ выбрать 17, дающих в сумме 1?

* * *

7. (Продолжение задачи 6) Могут ли у этих 17 дробей быть только нечётные знаменатели?

8. Можно ли поместить квадраты со сторонами $1/2, 1/3, \ldots, 1/100000000$ в прямоугольник размера 1×2 без перекрытий?

2. Занятие 11 октября 2000 года

Остатки

1. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

2. (**а**) Найдите наименьшее пятизначное число, которое делится на 123 нацело. (**б**) Какой остаток даёт число $12345678910111213 14\ldots979899$ при делении на 25? (**в**) Какой остаток даёт число 123321 при делении на 999?

[Напоминание: целое число a даёт остаток r при делении на целое положительное d, если $a = q \cdot d + r$ и $0 \leqslant r < d$. При положительных a это можно объяснить так: связывая a книг в пачки по d в каждой, получаем q полных пачек и одну неполную (возможно, пустую).]

3. (**а**) На числовой оси отметьте тремя разными знаками целые числа, дающие остатки $0, 1, 2$ при делении на 3. (Достаточно изобразить числа от -10 до 10.) (**б**) Отметьте числа, дающие остаток 2 при делении на 5. (**в**) Найдите все числа от 1 до 100, которые дают остаток 2 при делении на 5 и в то же время дают остаток 1 при делении на 3. (**г**) Закончите фразу: «остаток от деления положительного целого числа на 10 — это его...». Что можно сказать про отрицательные числа?

4. (**а**) Какова последняя цифра числа 13^{13}? (**б**) Какой остаток при делении на 4 даёт число 5^7?

5. (**а**) Из трёхзначного числа abc вычли сумму его цифр $(a + b + c)$. Докажите, что полученная разность делится на 9. (**б**) Сформулируйте и докажите признак делимости на 9. (**в**) Найдите остаток при делении числа $111\ldots111$ (100 единиц) на 9. (**г**) Придумайте признак делимости на 11, использующий сложение цифр с чередующимися знаками.

6. На плоскости нарисован угол, равный (**а**) 40°; (**б**) 50°. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 10°.

* * *

7. Верно ли, что если сумма цифр числа делится на 27, то само число делится на 27?

8. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6, а четырёх — на 24.

9. Какой цифрой оканчивается число 3^{2000}?

10. Произведение трех натуральных чисел равно 10987654321. Может ли их сумма быть равной 124816 ?

11. У числа 19^{19} сложили все цифры, затем сложили все цифры этой суммы и так далее, пока не получилось однозначное число. Что это за число?

3. Занятие 18 октября 2000 года

Принцип Дирихле

1. (**а**) В классе 13 учеников. Докажите, что найдутся двое, родившиеся в один и тот же месяц. (**б**) В классе 30 учеников. Докажите, что найдутся трое, родившиеся в один и тот же месяц. Можно ли гарантировать, что найдутся четверо, родившиеся в один и тот же месяц?

2. Карлсон хочет дать 10 малышам конфеты так, чтобы никакие два не получили конфет поровну. Сможет ли он это сделать, если у него 40 конфет?

3. Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что найдутся двое мужчин, сидящих друг напротив друга (по диаметру).

4. Докажите, что в бригаде из 7 пожарных с суммарным возрастом 332 года найдутся трое с суммарным возрастом не менее 142. (Возраст каждого — целое число.)

5. (**а**) Девять друзей послали друг другу поздравительные открытки, причём каждый послал пять открыток. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу. (**б**) Докажите, что найдутся такие двое (А и Б), что А послал открытку Б, но не получил от него открытки.

6. В строку выписано 1000 целых чисел. Докажите, что всегда найдутся несколько идущих подряд чисел (возможно, одно), сумма которых делится на 1000.

* * *

7. В квадрате со стороной 1 м произвольным образом расположили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 21 см.

8. Некоторые клетки таблицы 5×5 окрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что можно найти четыре клетки, окрашенные одним цветом, которые находятся на пересечении двух строк и двух столбцов.

4. Занятие 25 октября 2000 года

1. Из города А в город Б ведут 2 дороги, из города Б в город В ведут 3 дороги, из города В в город Г ведут 7 дорог. Сколько различных маршрутов ведут из А в В через Б? Сколько различных маршрутов ведут из А в Г через Б и В?

2. (**а**) Телефоны в Изумрудном городе состоят из четырёх цифр. Сколько там можно составить различных номеров? (**б**) Сколько существует номеров, все цифры которых нечётны? (**в**) Сколько существует номеров, все цифры которых нечётны и различны?

3. (**а**) Каких чисел среди первого миллиона больше: содержащих в записи единицу или не содержащих? (**б**) То же, среди первых десяти миллионов.

4. Прямоугольник 7×9 разбит на клетки 1×1. Требуется закрасить 4 клетки, образующие квадрат 2×2. Сколькими разными способами можно выбрать такой квадрат?

5. Сколько существует способов расставить числа от 1 до 6 на гранях кубика? (Расстановки считаются разными, если они не совмещаются поворотами кубика.)

6. Какие провода натянуты ниже – троллейбусные или трамвайные?

* * *

7. (**а**) Забор сколочен из 100 досок. Требуется раскрасить каждую доску в один из четырёх цветов так, чтобы никакие две доски одного цвета не были рядом. Сколькими различными способами это можно сделать? (**б**) То же, но забор кольцевой.

8. Сколькими способами можно разменять 20 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей?

5. Занятие 1 ноября 2000 года

Задачи на построение

Во всех задачах на построение можно использовать циркуль и линейку без делений, которые позволяют а) *проводить прямую через две отмеченные точки;* б) *проводить окружность данного радиуса с центром в отмеченной точке.*

1. Постройте ромб по (**а**) диагоналям (**б**) высоте и диагонали.

2. На плоскости нарисован круг. Постройте его центр.

3. Восстановите треугольник по серединам сторон.

4. Постройте трапецию по четырём сторонам.

5. На плоскости дан угол и точка внутри него. Постройте отрезок с концами на сторонах угла, который делится данной точкой пополам.

6. У Вас есть вырезанный из бумаги круг, внутри которого отмечена точка. Можно ли разрезать круг на 2 части, после перекладывания которых получится круг с отмеченным *центром*?

* * *

7. На бумаге нарисованы две прямые, пересекающиеся вне листа. Постройте биссектрису образованного ими угла.

8. Можно ли отрезками прямых и дугами окружностей разрезать квадрат на части, из которых можно сложить круг той же площади?

9. У Вас есть линейка и «маленький» циркуль (с раствором 10 см). (**а**) Постройте равносторонний треугольник на данном основании. (**б**) Опустите из данной точки перпендикуляр на данную прямую.

6. Занятие 15 ноября 2000 года

Не поискать ли мне тропы иной,
Приёмов новых, сочетаний странных?
У. Шекспир. Сонет 76.

1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8×8 (**а**) белую и чёрную ладьи, не бьющие друг друга? (**б**) две белые ладьи, не бьющие друг друга? [В чём разница между этими задачами?] (**в**) 8 белых ладей, не бьющих друг друга?

2. Сколько надо отрезков, чтобы попарно соединить 2000 точек?

(вариант, кружок в МЦНМО) Сколько диагоналей в 2000-угольнике (диагональ — отрезок, соединяющий две несоседних вершины)?

3. Перестановка букв слова называется его *анаграммой*. (**а**) Сколько анаграмм у слова `ПАСЛИНЬЕ`? Найдите среди них название фрукта и породу собаки. (**б**) Сколько анаграмм у слова `ПЕНЁК`? Как изменится ответ, если не отличать Е и Ё? (**в**) Сколько анаграмм у слова `МИМИКРИЯ`?

(вариант, кружок в МЦНМО) Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах `ТОЧКА`, `ЛИНИЯ` и `ПОТОП`? Почему ответы в этих трёх случаях оказываются разными?

4. На приборной доске есть 10 лампочек, причём каждая из них может гореть или не гореть независимо от остальных. (**а**) Какое количество «узоров» из горящих лампочек можно получить? (**б**) Тот же вопрос, если в узоре должно быть нечётное число горящих лампочек.

5. (**а**) Сколько существует способов назначить старосту, ответственного за проездные и дежурного (это должны быть разные люди) в классе из 20 человек? (**б**) Сколько существует способов назначить в этом классе 3 дежурных?

(вариант, кружок в МЦНМО) (**а**) В Британии министры избираются из числа депутатов парламента. Сколько существует способов назначить премьер-министра, министра экономики, министра сельского хозяйства и министра мясной и молочной промышленности, если в парламенте 10 депутатов? (**б**) Сколько существует способов выбрать депутатскую комиссию из 4 членов, если в парламенте 10 депутатов?

6. В Вашей квартире живёт клоп, который мучает Вас по ночам. Оказалось, что он умеет ползать по любой поверхности и падать вертикально вниз, но не умеет плавать. Как защитить Ваш сон?

(вариант, кружок в МЦНМО) Фирма «Русский сувенир» обнаружила в результате маркéтинга, что многие граждане хотели бы иметь на память десятитысячную купюру, номер на которой совпадает с их телефонным номером. Но их начальный капитал недостаточен, чтобы приобрести купюры со всеми возможными номерами. Тем не менее фирма нашла выход из положения. Какой?

* * *

7. Сколько существует 7-значных чисел, составленных из цифр 1 и 2, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

8. В выпуклом 20-угольнике проведены все диагонали, причём никакие три из них не пересекаются в одной точке. В скольких точках внутри 20-угольника пересекаются проведённые диагонали?

9. Проведено 10 горизонтальных и 10 вертикальных прямых. Сколько существует прямоугольников, все стороны которых лежат на этих прямых?

7. Занятие 22 ноября 2000 года

1. Являются ли старейший художник среди шахматистов и старейший шахматист среди художников одним и тем же лицом — или это не обязательно? Являются ли лучший шахматист среди художников и лучший художник среди шахматистов одним и тем же лицом?

2. Число x — натуральное. Из неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $3x > 25$, $x \geqslant 10$, $x > 5$ два неверных и три верных. Чему равно число x?

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественнику встретились два островитянина, один из них сказал: «По крайней мере один из нас лжец». Кто он? Кто второй островитянин?

4. В коробке лежат карточки, на противоположных сторонах которых написаны соседние натуральные числа: на одной — числа 1 и 2, на другой — числа 2 и 3 и так далее. Двум мудрецам А и Б, сидящим друг напротив друга, сообщают о том, какие карточки имеются в коробке и показывают одну из них (каждый видит свою сторону). (**а**) Происходит такой разговор. А. Я не знаю, что на Вашей стороне. Б. А я не знаю, что на Вашей стороне. А. А теперь я знаю, что на Вашей стороне. Что было на карточке? (**б**) Та же задача, но разговор был такой: А. Я не знаю, что на Вашей стороне. Б. Я это предвидел. А. А теперь я знаю, что на Вашей стороне.

5. «Произведение трех натуральных чисел равно 36» — сказал Петя. «Что это за числа?». Коля, подумав, ответил: «Данных недостаточно». Тогда Петя сообщил сумму этих чисел. «Всё равно данных недостаточно» — подумав, ответил Коля. Чему была равна сумма, сообщённая Петей?

6. Ученик записался в два математических кружка, которые занимаются в одно и то же время, но в разных концах города. В них ему нужно ехать на метро, причём в противоположные стороны. Он едет в тот кружок, в сторону которого раньше приходит поезд. В конце года оказалось, что в одном кружке он бывал в 2 раза чаще, чем в другом. Как могло это случиться? (Конечно, школьник попадает в метро не всегда в одно и то же время: иногда он приходит немного раньше, иногда немного позже. Однако поезда в обе стороны ходят с одинаковыми интервалами.)

* * *

7. Петя задумал число от 1 до 1000. Вася хочет узнать это число, задавая Пете вопросы, на которые возможны ответы «да» и «нет». (**а**) Какие вопросы он должен задавать, чтобы гарантированно узнать задуманное число после 10 вопросов? (**б**) Может ли он сделать то же самое, если список из 10 вопросов он должен составить заранее?

(вариант, кружок в МЦНМО) Петя загадал одно из трех чисел 1, 2 и 3. Какой вопрос, допускающий ответ «да», «нет», «не знаю», нужно задать, чтобы определить задуманное число? (Петя всегда говорит правду.)

8. Несколько шахматистов играли по круговой системе (каждый по одному разу с каждым); при этом ничьих не было, и абсолютного победителя (выигравшего у всех остальных) не оказалось. Докажите, что найдутся такие участники А, Б и В, что А выиграл у Б, Б выиграл у В и В выиграл у А.

9. На острове Пасхи есть 3 каменные статуи — бога Правды, бога Лжи и бога Дипломатии. Все они отвечают «да» и «нет» на задаваемые им вопросы, причём бог Правды отвечает правду, бог Лжи — ложь, а бог дипломатии — что угодно. Приехал путешественник. Сколько вопросов он должен задать, чтобы узнать, кто есть кто: (**а**) достаточно ли 2 вопросов; (**б**) достаточно ли 3 вопросов; (**в**) можно ли, задав каждому по вопросу, узнать требуемое?

8. Занятие 29 ноября 2000 года

1. В таблице 10×15 поставлены числа так, что в каждой строке сумма равна 75, а во всех столбцах суммы равны — чему они равны?

2. В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвует 10000 человек. Сколько будет сыграно партий?

3. На окружности стоят числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается прибавлять к любым двум соседним числам по единице. Можно ли, повторяя эту операцию несколько раз, сделать все числа равными?

4. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 10$. Разрешается стереть любые 2 числа a и b и записать вместо них (**а**) $a + b$; (**б**) $a + b - 1$. Через некоторое время на доске останется только одно число. Какое?

(вариант, кружок в МЦНМО) На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2001$. Разрешается стереть любые 2 числа a и b и записать вместо них число $|a - b|$. Может ли через некоторое время оказаться, что на доске остался только один нуль?

5. 500 точек соединены 500 отрезками. Каждую минуту какие-то пересекающиеся отрезки AC и BD заменяют на отрезки AB и CD. Докажите, что через некоторое время делать будет нечего.

6. В таблице 57×43 записаны числа. Разрешается поменять знаки у всех чисел в любой строке или в любом столбце. Докажите, что после нескольких таких операций можно получить таблицу, в которой сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательна.

* * *

7. В таблице (**а**) 4×4 (**б**) 3×3 в левом нижнем углу стоит число 1, а в остальных клетках — число -1. Разрешается поменять знак у всех чисел в любой строке или в любом столбце. Можно ли через некоторое время все числа сделать равными?

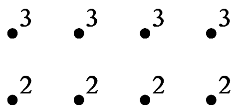
8. В таблице 4×4 на поле a2 стоит число 1, а остальных клетках — число -1. Разрешается поменять знак у всех чисел в любой строке, в любом столбце или на любой прямой, параллельной одной из диагоналей (в частности, в угловых клетках). Можно ли через некоторое время все числа сделать равными?

9. В каждой клетке таблицы 8×8 написано целое число. Разрешается выбирать в таблице любой квадрат 3×3 или 4×4 и увеличивать на 1 все числа, в нём стоящие. Всегда ли с помощью этих преобразований можно получить таблицу, в которой все числа делятся на 3?

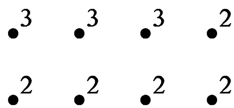
9. Занятие 6 декабря 2000 года

1. В доску вбиты гво́здики, рядом с которыми написаны цифры. Можно ли соединить гво́здики шнурами так, чтобы цифра, написанная около гвоздика, равнялась числу шнуров, за него завязанных?

(**а**)



(**б**)



2. Марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что марсиан, у которых нечётное количество рук, чётное число.

3. (**а**) Можно ли расположить на плоскости 4 точки, соединённые отрезками, так чтобы каждая точка была соединена с 3 другими, а отрезки не пересекались? (**б**) Та же задача для 6 точек, причём каждая точка должна соединяться ровно с 4 другими. (**в**) Та же задача для 7 точек, причём каждая должна соединяться ровно с 5 другими, и отрезкам разрешено пересекаться.

4. В шахматном турнире участвовало 19 человек. Наблюдавший за турниром Вася считает, после первого дня каждый шахматист сыграл 1, 3 или 5 партий. Может ли так быть?

5. В тридевятом царстве города соединены авиалиниями. Из столицы выходит 101 авиалиния, из города Дальний — 1 авиалиния, а из всех прочих городов — по 20 авиалиний. Докажите, что из столицы можно добраться самолётом до города Дальнего (возможно, с пересадками).

6. На шахматной доске 3×3 стоят по углам четыре коня, сверху — два белых, снизу — два чёрных. (**а**) За какое наименьшее число ходов белых и чёрных коней можно поменять местами? (**б**) Можно ли за несколько ходов поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

* * *

7. Существует ли многогранник, у которого 17 треугольных граней и 2 четырехугольных?

8. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых (если Петя знаком с Васей, то Вася знаком с Петей).

9. Сеть линий метро такова, что из любой станции можно проехать в любую (возможно, с пересадками). Докажите, что можно закрыть одну из станций (запретив проезд через неё) так, чтобы с любой оставшейся станции можно было по-прежнему проехать в любую оставшуюся.

10. Занятие 9 декабря 2000 года (кружок в МЦНМО)

1. Правила приличия запрещают мужчине стоять в очереди перед женщиной. В очереди из ста человек первый мужчина. Докажите, что в этой очереди нет женщин.

2. В последовательности 1, 3, 7, ... первый член равен 1, а каждый следующий получается, если умножить предыдущий на 2 и прибавить 1. Докажите, что 1000-й член этой последовательности равен $2^{1000} - 1$.

3. Любую сумму денег, начиная с 8 золотых, можно уплатить (без сдачи) монетами в 5 золотых и 3 золотых. Почему?

4. На сколько частей делят плоскость 20 прямых, любые две из которых пересекаются и никакие три из которых не имеют общей точки?

5. В комнате расставляют перегородки, одна сторона которых зеркальная, а другая нет. Докажите, что среди полученных комнаток всегда найдётся хотя бы одна, в которой нет ни одного зеркала.

6. На доске написаны десять цифр — нулей или единиц. Разрешается выполнять одно из следующих действий: (1) изменить первую цифру (ноль меняется на единицу и наоборот); (2) изменить цифру, стоящую за первой единицей. Докажите, что из любой начальной последовательности можно получить любую другую.

* * *

7. На бесконечном листе бумаги n клеток окрашены в чёрный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа, а именно, каждая клетка приобретает цвет, который имеет большинство из трёх клеток: её самой и двух соседей сверху и справа. Докажите, что чёрные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$.

8. Докажите, что квадрат $2^n \times 2^n$, из которого удалили (**а**) угловую; (**б**) любую клетку, можно разрезать на уголки из трёх квадратов.

9. Докажите, что для каждого натурального n найдётся число, делящееся на 2^n, в десятичной записи которого есть только единицы и двойки.

11. Занятие 13 декабря 2000 года

В задачах 1 – 5 взвешивания производятся на чашечных весах без гирь, которые позволяют определять, на какой из чашек лежит предмет большего веса.

1. (**а**) Есть 3 монеты, среди которых одна фальшивая (легче остальных). Как за одно взвешивание её найти? (**б**) Сколько взвешиваний понадобится, если известно лишь, что фальшивая монета отличается по весу?

2. Имеется (**а**) 7 (**б**) 77 монет, одна из которых фальшивая (легче остальных). Как найти эту монету?

3. Есть 100 монет, одна из которых фальшивая (отличается по весу). Как за два действия узнать, легче она или тяжелее (находить её не требуется)?

4. Есть 9 монет, две из которых фальшивые (легче остальных). Как за четыре взвешивания их определить?

5. Есть 3 пары шаров: красных, зелёных и синих. Среди шаров каждого цвета один лёгкий и один тяжёлый, причём массы всех лёгких одинаковы, всех тяжёлых — тоже. Как за два взвешивания узнать, какой из шаров в каждой паре легче?

6. У царя Гороха было 12 сыновей. Известно, что каждый из его потомков либо имел двух сыновей, либо умер бездетным. Всего у царя Гороха было 100 потомков. Сколько среди них умерли бездетными?

* * *

7. За сколько взвешиваний можно выделить фальшивую монету из 12?

8. Докажите, что в любой компании из 10 человек найдутся либо 4 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых человека.

12. Занятие 20 декабря 2000 года

В задачах 1 – 5 речь идёт об играх, в которых у одного из играющих есть *выигрышная стратегия*, т. е. он может выиграть при любом способе игры другого (быть может, играя по-разному в разных случаях). В этих задачах требуется определить выигрывающего игрока и составить для него стратегию.

1. Шоколадка 4 см на 7 см разделена углублениями на 28 квадратиков 1 см на 1 см. Двое по очереди разламывают её на дольки, за ход разрешается разломить один из кусков, кто не может сделать хода — проигрывает.

2. На столе лежит (**а**) 9 (**б**) 10 монет, игроки по очереди берут по одной или по две монеты. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. Есть две кучки камней: в одной 9, в другой 10. За один ход можно взять любое количество камней из любой кучки или по одному камню из каждой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

4. На шахматной доске в левом нижнем углу стоит фигура «чуня», которая может ходить (**а**) на любое количество клеток вправо или на любое количество клеток вверх (**б**) вверх на одну клетку или вправо на одну клетку. Двое по очереди делают ходы этой фигурой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Двое по очереди ставят на шахматную доску (**а**) ладей (**б**) слонов (**в**) коней так, чтобы стоящие на доске фигуры не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. В неизвестном месте поля 10 на 10 для игры в морской бой расположен линкор — прямоугольник размером 4 на 1. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантировать, что будет попадание? Куда нужно стрелять? Можно ли обойтись меньшим числом выстрелов?

* * *

7. Даны n точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Двое играют в такую игру — по очереди, начиная с некоторой точки последовательно соединяют их отрезками, получая ломаную (возможно, самопересекающуюся). Тот, кто не может сделать ход (все отрезки из его точки уже проведены), проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнёр? Как он должен играть?

8. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной доске по таким правилам: первый ставит два крестика, второй — нолик, первый — снова два крестика, второй — нолик и т. д. Первый выигрывает, когда на одной вертикали или горизонтали стоит рядом 100 крестиков. Докажите, что первый всегда может добиться победы.

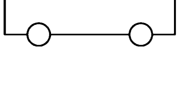
13. Занятие 27 декабря 2000 года

1. Двое играют в такую игру: по очереди кладут пятаки на прямоугольный стол (класть монеты поверх уже имеющихся или сдвигать лежащие на столе монеты нельзя). Кто не может положить монету (так, чтобы она не упала со стола), проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В селе два парикмахера — один подстрижен хорошо, другой плохо. К кому из них стоит идти стричься?

3. Костя подошёл к столу, на котором лежал кусок верёвки, взял его за концы и, не выпуская их из рук, завязал на ней узел. Как он это сделал?

4. В какую сторону едет автобус на рисунке?



5. Вырежьте в листе бумаги отверстие и пролезьте через него.

6. Как провести сквозь пластмассовый лист раскалённый проволочный каркас куба, чтобы лист не распался на части? (При контакте с раскалённой проволокой лист проплавляется и образуется щель.)

7. Из спичек выложено неверное равенство VII = I (7 спичек). Какое минимальное число спичек нужно переложить, чтобы сделать получить верное утверждение? чтобы получить верное равенство?

8. Сколько спичек надо переложить в III = I (6 спичек), чтобы получилось верное равенство?

9. Число 57 можно представить в виде $2^5 + 5^2$. Можно ли представить число 57^2 аналогичным образом ($a^b + b^a$, где a, b — целые положительные числа)?

10. На руки двум людям надеты верёвочные петли: на каждой руке по кольцу, и кольца связаны между собою. Кольца зацеплены друг за друга. Могут ли они расцепиться?

14. Домашняя олимпиада

1. Один градус Цельсия соответствует $9/5$ градусов Фаренгейта (шкала, принятая в США), и $0°$ по Цельсию составляют 32 градуса по шкале Фаренгейта. Есть ли температура, выражающаяся одинаковым числом градусов по обеим шкалам?

2. Разбейте число 100 в сумму целых положительных слагаемых с максимальным произведением и докажите, что большего произведения быть не может.

3. Можно ли квадрат 10×10 разбить на прямоугольники 1×4?

4. На плоскости проведено 100 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что если разрезать плоскость по этим прямым, то будет хотя бы один треугольник.

5. Придумайте многоугольник и точку внутри него, из которой ни одна из сторон этого многоугольника не видна полностью.

6. Может ли так быть для точки вне многоугольника?

7. По окружности расставлены 100 целых чисел, их сумма равна 1. Группу подряд стоящих чисел (в ней может быть от 1 до 100 чисел) назовём положительной, если их сумма положительна. Найдите число положительных групп (и докажите, что оно всегда одно и то же).

8. На кольцевой дороге стоят несколько бензоколонок. Всего бензина хватит на один круг. Докажите, что машина с пустым баком может проехать полный круг, заправляясь по пути, если правильно выберет начальную колонку.

А. Из трёх карандашей (или китайских палочек для еды) с помощью ниток сделайте жёсткую конструкцию (нитки не дают карандашам смещаться друг относительно друга), в которой карандаши не касаются.

Б. Придумайте способ измерения толщины магнитной ленты в кассете (без её разрушения) простыми домашними средствами. При возможности выполните это измерение на практике.

15. Занятие 17 января 2001 года

1. Жёсткий отрезок AB длины 3 соединён шарниром с жёстким отрезком BC длины 1. В каких пределах может меняться расстояние между точками A и C?

АКСИОМА РАССТОЯНИЯ:
$AC \leqslant AB + BC$ («неравенство треугольника»)

2. Используя эту аксиому, докажите, что (**а**) любая сторона треугольника не больше суммы двух его других сторон и не меньше их разности; (**б**) сторона AD четырёхугольника $ABCD$ не больше суммы сторон AB, BC и CD; (**в**) любая сторона многоугольника не превосходит половины его периметра (периметр многоугольника — сумма его сторон);

3. (**а**) Что можно сказать о точках A, B, C, если $AC = AB + BC$ («неравенство треугольника обращается в равенство»)? (**б**) Расстояние от Москвы до Клина 90 км, от Клина до Солнечногорска 24 км, от Солнечногорска до Зеленограда 36 км, от Зеленограда до Москвы 30 км. Можно ли определить расстояние от Солнечногорска до Москвы, зная только эти данные?

4. Дана прямая l и точки A и B. (**а**) Найдите на прямой l точку C, для которой разница между расстояниями AC и BC максимальна. (**б**) При каком положении точки C эта эта разность минимальна?

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются. Докажите, что сумма длин AC и BD (**а**) больше половины периметра; (**б**) меньше периметра. (Периметр многоугольника — сумма длин его сторон.) Иными словами, построив дороги AC и BD вместо кольцевой дороги $ABCD$, мы выиграем по длине, но менее чем вдвое.

6. В треугольнике ABC провели медиану AM. Докажите, что сумма длин сторон AB и AC больше удвоенной длины AM.

* * *

7. На прямой улице стоят шесть домов (расстояние между соседними 100 метров). Где надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от каждого из домов до колодца была минимальной?

8. В пятиугольник вписана пятиконечная звезда. Докажите, что периметр этой звезды не меньше периметра пятиугольника и не меньше удвоенного периметра.

16. Занятие 24 января 2001 года

1. Три подряд идущие стороны четырёхугольника равны 1, 2 и 4 см. Какова может быть его четвёртая сторона?

2. Многоугольник разрезали на две части по прямой. Докажите, что у каждой из частей периметр меньше, чем у исходного многоугольника.

3. Треугольник DEF лежит внутри треугольника ABC. Можно ли утверждать, что (**а**) любая сторона треугольника ABC больше любой стороны треугольника DEF? (**б**) любая сторона треугольника ABC больше хотя бы одной стороны треугольника DEF? (**в**) периметр треугольника ABC больше периметра треугольника DEF?

4. Дана прямая l и точки A и B. Найдите на прямой l точку C, для которой сумма расстояний AC и BC минимальна. (Указание: сначала разберите случай, когда A и B находятся по разные стороны от прямой l.)

5. Точка X лежит внутри острого угла AOB с вершиной в точке O. Найдите точки Y и Z на сторонах угла, для которых периметр треугольника XYZ является минимально возможным.

6. Прямая l проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна этому отрезку. Точка X лежит по ту же сторону от l, что и точка A. Докажите, что X ближе к A, чем к B.

* * *

7. На каждой из сторон прямоугольника выбрано по точке. Докажите, что периметр четырёхугольника с вершинами в этих точках не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.

8. Более половины участников шахматного турнира живёт в Нью-Васюках. Докажите, что Нью-Васюки являются наилучшим местом проведения турнира (при котором сумма всех расстояний от мест проживания до места турнира минимальна).

(вариант, кружок в МЦНМО) Охотник вышел из А и пришёл в Б, двигаясь по кривой. Через некоторое время из А выбежала собака, которая в каждый момент времени бежала в направлении охотника и также прибежала в Б. Докажите, что длина пути собаки не больше длины пути охотника. (Можно считать, что охотник и собака движутся по очереди.)

17. Занятие 31 января 2001 года

Принцип крайнего

1. (**а**) По кругу написано 99 чисел, причём каждое из них равно среднему арифметическому (полусумме) двух своих соседей. Докажите, что все эти числа равны между собой. (**б**) Та же задача, но числа расставлены в клетках шахматной доски, и каждое равно среднему арифметическому своих соседей (двух, трёх или четырёх в зависимости от положения клетки).

2. Можно ли нарисовать на плоскости десять различных точек так, чтобы каждая из них была серединой какого-то отрезка между двумя из нарисованных точек?

3. На плоскости выбрано 100 точек. Докажите, что некоторые три из них являются вершинами треугольника, внутри которого нет других выбранных точек.

4. Можно ли занумеровать вершины куба числами $1, 2, \ldots, 8$ так, чтобы числа на концах любого ребра отличались не более чем на 2?

5. Числа от 1 до 64 расставлены в клетках шахматной доски. Докажите, что найдутся две соседние клетки, в которых числа отличаются по крайней мере на 5.

6. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону, а не на продолжение.

* * *

7. В клетках бесконечной клетчатой бумаги написаны целые положительные числа, причём каждое равно среднему арифметическому соседей. Докажите, что все эти числа равны.

8. Докажите, что любые 10 точек на плоскости являются концами 5 непересекающихся отрезков.

18. Занятие 7 февраля 2001 года

Рассуждая логически,...

1. Третьекласснику Васе на дом задали разделить некоторое число на 2, 3 и 6. Он сказал: «Я забыл, какое число задали, и делил другое число, и два раза разделилось без остатка, а один раз остаток был». Учительница сказала: «Ты ошибся», даже не спросив, какое число он делил. Почему она так сказала?

2. Говорят, что из A следует B, если B верно во всех случаях, когда верно A. Указать все такие пары для четырёх высказываний:

(1) Любой восьмиклассник выше некоторого семиклассника.

(2) Некоторый восьмиклассник выше некоторого семиклассника.

(3) Любой восьмиклассник выше любого семиклассника.

(4) Некоторый восьмиклассник выше любого семиклассника.

Как Вы думаете, какие из четырёх высказываний верны для учеников Вашей школы?

3. А говорит: «Кто не с нами, тот против нас». Б говорит: «Кто не против нас, тот с нами». Есть ли разница (с точки зрения логики) между их высказываниями?

4. На контрольной пятёрка ставилась тем, кто решил больше половины задач, и больше половины класса получили пятёрку. Задача считается простой, если её решили больше половины класса. Могло ли простых задач быть меньше половины?

5. Не все носки в ящике одного цвета. Не все носки в ящике одного размера. Докажите, что клоун Гриша может выбрать из ящика два носка, которые отличаются и по цвету, и по размеру.

6. Турнир проходил в один круг (каждый играл с каждым), и ничьих не было. При этом абсолютного победителя (выигравшего у всех) не оказалось. Докажите, что есть такие три участника А, Б, В, что А выиграл у Б, Б выиграл у В и В выиграл у А.

19. Занятие 14 февраля 2001 года

Промежуточные значения

1. Футбольный матч между двумя командами закончился со счётом 4 : 3 в пользу первой. (**а**) Можно ли утверждать, что обязательно был такой момент, когда обе команды вместе забили 4 гола? (**б**) Докажите, что был такой момент, когда первой команде осталось забить столько мячей, сколько к этому моменту забила вторая.

2. (**а**) В строчку написаны 12 чисел, причём сумма любых трёх рядом стоящих положительна. Можно ли утверждать, что сумма всех 12 чисел положительна? (**б**) Тот же вопрос для 10 чисел.

3. На плоскости имеется 100 различных точек. Докажите, что можно провести прямую, которая делит их на две части по 50 точек (и не проходит ни через одну из выбранных точек).

4. (**а**) Какие прямые делят прямоугольник на две равные по площади части? (**б**) Даны прямоугольник и круг. Проведите прямую, которая делит обе фигуры на равные по площади части. Сколько решений имеет задача? (**в**) Дан прямоугольник с круглой дыркой. Проведите прямую, которая делит его на две равные по площади части. Сколько решений имеет задача?

5. Может ли при увеличении числа на единицу его сумма цифр уменьшиться? уменьшиться более чем на 100? уменьшиться ровно на 15?

6. Целое положительное число a имеет сумму цифр 100, а большее (целое положительное) число b имеет сумму цифр 200. Докажите, что между a и b найдётся целое число с суммой цифр 143.

* * *

7. На окружности выбрано 100 точек. Докажите, что можно провести диаметр, по обе стороны которого лежат 50 точек (из числа выбранных).

8. В ряд стоят двадцать сапог: 10 левых и 10 правых (в произвольном порядке). Докажите, что можно найти группу из 10 подряд стоящих сапог, среди которых 5 левых и 5 правых.

9. Можно ли нарисовать фигуру так, что никакая прямая не делит её на две равные по площади части?

20. Занятие 21 февраля 2001 года

Индукция

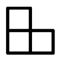
1. Докажите, что (**а**) число 111111111 делится на 9; (**б**) число $11\ldots1$ (27 единиц) делится на 27.

2. (Продолжение) Докажите, что число $11\ldots1$ (3^n единиц) делится на 3^n при любом натуральном n.

3. (**а**) Докажите, что $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$;

(**б**) Докажите, что $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} < 2$ (всего 2000 операций извлечения корня).

4. Назовём *уголком* фигуру из трёх клеток, изображённую на рисунке. (**а**) Из квадрата 4×4 клетки удалили одну клетку, не лежащую ни на стороне, ни в углу. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на уголки. (**б**) Тот же вопрос в случае, когда удалённая клетка лежит на стороне или в углу. (**в**) Из квадрата 8×8 (шахматной доски) удалили одну из четырёх центральных клеток (для шахматистов: одну из клеток d4, d5, e4 или e5). Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на уголки. (**г**) Тот же вопрос в случае, когда удалили произвольную клетку.



5. (Продолжение) Из квадрата $2^n\times2^n$, (n — натуральное число) удалили произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на уголки.

6. (**а**) Правильный 5-угольник разрезали двумя способами диагоналями на треугольники. Докажите, что при этом получилось одинаковое количество треугольников. Какое именно? (**б**) Тот же вопрос про 6-угольник и 7-угольник. (**в**) Тот же вопрос про n-угольник, где n — произвольное натуральное число.

* * *

Последовательность *чисел Фибоначчи* задаётся таким правилом: первые два её члена равны 1, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих (то есть $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$ и т. д.). Докажите следующие утверждения про числа Фибоначчи:

7. $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$;

8. $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$;

9. $u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;

10. $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$;

11. $u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}$;

12. если m делится на n, то u_m делится на u_n.

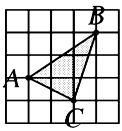
21. Занятие 28 февраля 2001 года

Клетчатая бумага

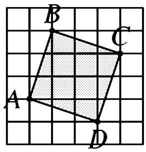
1. Какова площадь (измеренная в клеточках) треугольника ABC?

2. Найдите площадь квадрата $ABCD$ с помощью теоремы Пифагора и без неё.

3. Проведите высоту из вершины C в треугольнике ABC на клетчатой бумаге, имея только линейку (и клетчатую бумагу).



К задачам 1,3



К задаче 2

4. Четыре кузнечика, сидящих в вершинах квадрата 1×1 на клетчатой бумаге, начинают играть в чехарду: один перепрыгивает через другого (попадая в симметричную точку). Могут ли они через несколько прыжков оказаться в вершинах квадрата 2×2?

5. В прямоугольнике 7×13 клеток, вырезанном из клетчатой бумаги, провели диагональ. Сколько клеток она пересекает?

6. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой бумаге по таким правилам: первый ставит два крестика, второй отвечает одним ноликом, первый ставит ещё два крестика, второй ещё нолик и так далее. Докажите, что первый всегда сможет выиграть, если для выигрыша ему нужно поставить 30 крестиков подряд по вертикали или горизонтали.

* * *

7. Точки A, B, C находятся в узлах сетки (вершинах клеток). Может ли площадь треугольника ABC равняться $4/3$ площади клетки?

8. Можно ли провести на клетчатой бумаге прямую, которая не проходит ни через один узел сетки? ровно через один узел сетки? ровно через два узла сетки?

22. Занятие 7 марта 2001 года

Формулы и вычисления

1. Докажите геометрически формулу $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, разрезав квадрат со стороной $a+b$ на квадраты $a \times a$ и $b \times b$, а также два прямоугольника $a \times b$.

2. Упростите выражение

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots(2^{512}+1).$$

3. Известно, что $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$. Продолжите эту последовательность и докажите обнаруженную Вами закономерность.

4. Вычислите

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

при $n = 3, 4, 5, \ldots, 100$.

5. Разложите на множители

$$a^2c - ac^2 + c^2b - b^2c + b^2a - a^2b$$

6. Про числа a, b и c известно, что $a+b+c=0$ и $ab+bc+ac=0$. Докажите, что $a=b=c=0$.

* * *

7. Попробуйте придумать геометрические толкования для других известных Вам формул, например, для некоторых из следующих формул: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a+b+c)^2 = \ldots$, $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$.

8. Что больше:

$$(2^2-2+1)(2^4-2^2+1)\ldots(2^{512}-2^{256}+1) \quad \text{или} \quad \frac{2^{1024}+2^{512}+1}{7}?$$

9. Что больше: $\frac{11\cdot 12\cdot\ldots\cdot 20}{1024}$ или $3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot 19$?

10. Что больше:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

или

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+\ldots+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)?$$

11. Про числа a, b и c известно, что $a+b+c=0$. Докажите, что

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

12. Докажите, что

$$1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\ldots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=(1+2+\ldots+n)+\\+(1+2+\ldots+(n-1))+\ldots+(1+2)+1.$$

13. Вычислите

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\\+\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 9\cdot 10}.$$

14. Что больше:

$$1\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\\+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\ldots+1\right)\quad\text{или}\quad\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{20}?$$

23. Занятие 14 марта 2001 года

Пространство

1. Сколько у куба вершин, граней, рёбер? На сколько частей разбивают пространство продолжения его граней?

2. Муха сидит в вершине куба и умеет ползать по его поверхности. Каков для неё кратчайший путь в противоположную (наиболее удалённую от неё) вершину?

3. Даны несколько одинаковых кирпичей и линейка. Как измерить диагональ кирпича?

4. Можно ли завернуть куб $1\times 1\times 1$ в платок размера 3×3, не разрезая платка?

5. Как разрезать куб плоскостью, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник?

6. (**а**) Можно ли закрыть точечный источник света на плоскости тремя кругами (радиусы Вы можете выбирать произвольно)? (**б**) Можно ли сделать то же самое в пространстве с помощью четырёх сфер?

* * *

7. Как расставить 64 ладьи в кубике $8\times 8\times 8$ так, чтобы они не били друг друга? (Трёхмерные ладьи бьют по всем трём направлениям, параллельным рёбрам кубика.)

8. Сколько углов может быть у тени куба, освещённого параллельным пучком лучей?

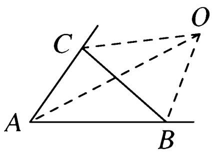
9. Можно ли получить в сечении куба правильный пятиугольник?

24. Собеседование 29 марта 2001 года (письменное)

Вариант 1

1. Расположите в порядке возрастания числа $5/8$, $7/11$ и $12/19$, не пользуясь калькулятором. В каком отношении среднее по величине число делит промежуток между двумя другими?

2. (**а**) Разложите на множители: $2x^2 + 3xy + y^2$. (**б**) Нарисуйте на плоскости, где расположены точки $M(x, y)$, для которых $2x^2 + 3xy + y^2 < 0$.



3. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O, причём $\angle BOC = 70°$. (**а**) Найдите угол BAC. (**б**) Найдите угол OAC.

4. Из А в Б каждые полчаса выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 20 км/ч. Из Б в А навстречу им каждые 20 минут выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 30 км/ч. Пассажиры, едущие в каждом поезде, отмечают по часам интервал между встречными поездами. У кого этот интервал будет больше: у едущих из А в Б или у едущих из Б в А?

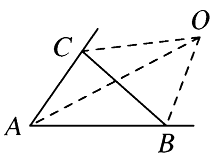
5. Докажите, что существует целое положительное число, делящееся на 2001, десятичная запись которого начинается с цифр 1234. Найдите наименьшее такое число.

6. (Дополнительная задача) На плоскости чернилами нарисована окружность радиуса 12 см. По ней прокатили цилиндрический валик из промокашки, на котором окружность оставила след. Сколько у этого следа точек самопересечения, если длина окружности валика 5 см?

Вариант 2

1. Расположите в порядке возрастания числа $4/5$, $15/19$ и $19/24$, не пользуясь калькулятором. В каком отношении среднее по величине число делит промежуток между двумя другими?

2. (**а**) Разложите на множители: $x^2 - 3xy + 2y^2$. (**б**) Нарисуйте на плоскости, где расположены точки $M(x, y)$, для которых $x^2 - 3xy + 2y^2 > 0$.



3. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O, причём $\angle BOC = 50°$. (**а**) Найдите угол CAB. (**б**) Найдите угол OAB.

4. Из А в Б с интервалами в 20 минут выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 15 км/ч. Из Б в А навстречу им с интервалами 15 минут выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 20 км/ч. Пассажиры, едущие в каждом поезде, отмечают по часам интервал между встречными поездами. У кого этот интервал будет больше: у едущих из А в Б или у едущих из Б в А?

5. Докажите, что существует целое положительное число, делящееся на 2001, десятичная запись которого начинается с цифр 1248. Найдите наименьшее такое число.

6. (Дополнительная задача) На плоскости чернилами нарисована окружность радиуса 12 см. По ней прокатили цилиндрический валик из промокашки, на котором окружность оставила след. Сколько у этого следа точек самопересечения, если длина окружности валика 7 см?

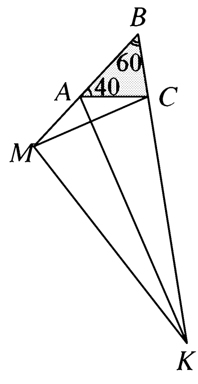
25. Собеседование 4 апреля 2001 года (письменное)

Вариант 1

1. Найдите наименьшее целое положительное число, сумма цифр которого равна 44.

2. (**а**) Число $x = 2$ является корнем уравнения $x^3 + ax^2 + x + 6 = 0$ (где a — некоторый числовой коэффициент). Найдите ещё хотя бы один корень этого уравнения. (**б**) Та же задача для уравнения $x^6 + ax^2 - 17 = 0$.

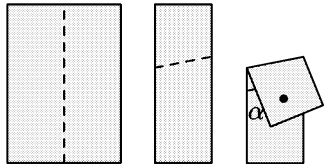
3. В треугольнике ABC угол A равен 40°, а угол B равен 60°. Биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке K, а перпендикуляр, опущенный из C на эту биссектрису, пересекает прямую AB в точке M. Найдите угол BKM.



4. Из А в Б каждые 6 часов выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 60 км/ч. Из Б в А навстречу им каждые 4 часа выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 40 км/ч. В тех местах, где какие-то два поезда встретились, делаются пометки на рельсах. На каком расстоянии друг от друга будут соседние пометки? (Две пометки, сделанные в одном и том же месте рельсов, не считаются соседними.)

5. Сколько существует различных чисел t, для которых $0 \leqslant t \leqslant 1$ и (**а**) $\{6t\} = \{21t\}$; (**б**) $\{6t\} + \{21t\} = 1$? (Здесь $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a; например, $\{2{,}7\} = 0{,}7$ и $\{0\} = \{5\} = 0$.)

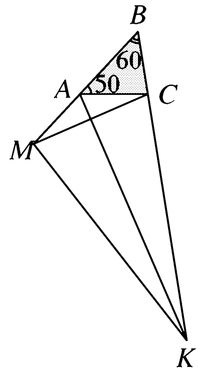
6. Листок бумаги сложили вдвое, потом ещё раз вдвое (см. рисунок), и прокололи иголкой все четыре слоя. Затем листок развернули и соединили отрезками все отверстия; получился четырёхугольник. Найдите углы этого четырёхугольника, если $\angle\alpha = 25^\circ$.



Вариант 2

1. Найдите наименьшее целое положительное число, сумма цифр которого равна 55.

2. (**а**) Число $x = 2$ является корнем уравнения $x^3 - ax + 6 = 0$ (где a — некоторый числовой коэффициент). Найдите ещё хотя бы один корень этого уравнения. (**б**) Та же задача для уравнения $x^6 + ax^2 - 13 = 0$.

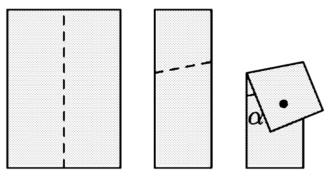


3. В треугольнике ABC угол A равен 50°, а угол B равен 60°. Биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке K, а перпендикуляр, опущенный из C на эту биссектрису, пересекает прямую AB в точке M. Найдите угол BKM.

4. Из А в Б каждые 6 часов выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 30 км/ч. Из Б в А навстречу им каждые 4 часа выходят поезда, которые едут с постоянной скоростью 20 км/ч. В тех местах, где какие-то два поезда встретились, делаются пометки на рельсах. На каком расстоянии друг от друга будут соседние пометки? (Две пометки, сделанные в одном и том же месте рельсов, не считаются соседними.)

5. Сколько существует различных чисел t, для которых $0 \leqslant t \leqslant 1$ и (**а**) $\{10t\} = \{14t\}$; (**б**) $\{10t\} + \{14t\} = 1$? (Здесь $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a; например, $\{2{,}7\} = 0{,}7$ и $\{0\} = \{5\} = 0$.)

6. Листок бумаги сложили вдвое, потом ещё раз вдвое (см. рисунок), и прокололи иголкой все четыре слоя. Затем листок развернули и соединили отрезками все отверстия; получился четырёхугольник. Найдите углы этого четырёхугольника, если $\angle\alpha = 15^\circ$.



26. Собеседование 7 апреля 2001 года

1. Отрезок $[0, 1]$ разделили на 2^{15} равных частей (от 0 до $1/2^{15}$, от $1/2^{15}$ до $2/2^{15}$ и так далее). В каком отношении число $1/5$ делит ту из них, в которую попадает (считая слева направо)?

2. На доске написано 100 чисел: одна единица и 99 нулей. За один шаг разрешается уравнять любые два числа, заменив каждое из них на их полусумму. Мы хотим, чтобы все числа стали равными. Докажите, что это невозможно.

3. Имеются слова: ДУМА, КАМА, КЕША, ДАША, КАША, ДАМА, КУМА. Сколькими способами можно выписать слова в столбик так, чтобы каждое следующее слово получалось из предыдущего заменой одной буквы (остальные остаются на своих местах)?

4. Из фанеры выпилен прямоугольный треугольник с катетами 4 и 5. Он лежит на дне неподвижного прямоугольного ящика 6×7. Можно ли его повернуть на 360°, не отрывая от дна ящика?

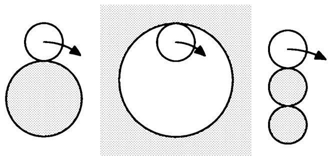
5. (Продолжение) Какова наименьшая возможная площадь прямоугольника, внутри которого можно повернуть этот треугольник?

27. Собеседование 11 апреля 2001 года

1. Найдите все положительные числа x, при которых $[x] + [x^2] = 9$. (Здесь $[a]$ обозначает целую часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Например, $[2] = 2$ и $[5{,}3] = 5$.)

2. (Продолжение) Для каждого положительного числа x вычислили сумму $[x]+[x^2]$. При этом получаются неотрицательные целые числа, но не все. Перечислите двузначные числа, которые нельзя получить таким образом.

3. Одна монета неподвижна, другую обкатывают вокруг первой. При этом она делает два оборота вокруг своей оси (проверьте — у кого нет монет, мы выдадим). Сколько оборотов вокруг своей оси сделает монета, если обкатить её вокруг монеты вдвое большего радиуса? внутри круглой дырки, радиус которой втрое больше радиуса монеты? вокруг двух касающихся монет того же размера, что она сама?



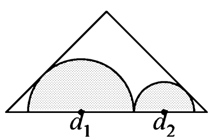
4. Окружность касается боковой стороны равнобедренного треугольника с углом при вершине 120° и продолжений двух других его сторон («вневписанная окружность»). Найдите радиус окружности, если основание треугольника равно a.

5. (Дополнительная) Возьмём отрезок $[0, 1]$. Отрежем от него четверть слева, потом четверть (от оставшейся части) справа, потом снова четверть (от оставшейся части) слева и так далее. Укажите точку, которая никогда не будет отрезана.

6. (Дополнительная) Найдите все двузначные числа, куб которых оканчивается на само число (например, $25^3 = 156\underline{25}$) и докажите, что других нет.

28. Собеседование 14 апреля 2001 года

1. Центры двух полуокружностей лежат на диагонали прямоугольного равнобедренного треугольника. Диаметры окружностей равны d_1 и d_2. Найдите сумму $d_1 + d_2$, если катеты треугольника равны a.



2. Четырёхзначное число $\overline{abcd}$, составленное из цифр a, b, c, d, будем считать хорошим, если оно делится и на $\overline{ab}$, и на $\overline{cd}$. (Например, число 2346 хорошее, так как делится и на 23, и на 46, а число 1957 — нет, так как делится на 19, но не на 57.) Сколько существует хороших чисел среди чисел от 1000 до 9999?

3. Расставляя по-разному скобки в выражении 2 : 3 : 5 : 7 : 11 : 13, можно получить разные дроби. (Например, для выражения 2 : 3 : 5 есть два варианта: $2 : (3 : 5) = 10/3$ и $(2 : 3) : 5 = 2/15$.) Можно ли получить выражение (**а**) $\frac{2\cdot5\cdot7}{3\cdot11\cdot13}$? (**б**) $\frac{2\cdot3\cdot7}{5\cdot11\cdot13}$?

(**в**) Приведите пример, в котором две разные расстановки скобок дают одно и то же число.

4. (Продолжение) (**а**) Сколько существует различных чисел, которые можно получить расстановкой скобок в указанном выражении? (**б**) Найдите произведение всех таких чисел.

5. Две машины едут с постоянными скоростями в 40 км/ч по прямым дорогам, пересекающимся под углом 90°, и проезжают перекрёсток с интервалом в 1 час. В какой момент расстояние между машинами будет наименьшим и чему оно равно?

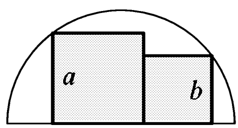
29. Собеседование 18 апреля 2001 года

1. Прямоугольник 5×10 выложен (в один слой) 25 доминошками 1×2. В нём проведена средняя линия — прямая, делящая его на два прямоугольника 5×5. Докажите, что эта прямая пересекает хотя бы одну доминошку (деля её на два квадрата 1×1).

2. Прямоугольник 8×8 выложен (в один слой) 32 доминошками 1×2. Докажите, что можно так выложить второй слой (также из 32 доминошек), чтобы ни одна из них не повторяла положение доминошки первого слоя (лёжа в точности над ней).

3. Часы с круглым циферблатом показывают 9 часов. Лёша повернул циферблат (не меняя положения стрелок), и получилось 12 часов с минутами, причём положения часовой и минутной стрелок согласованы (часовая стрелка указывает на ту же долю часа, что показывает минутная). Какое время показывают часы? (Требуется дать точный ответ в долях часа.)

4. Два примыкающих друг к другу квадрата (размеров $a\times a$ и $b\times b$) вписаны в полуокружность, как показано на рисунке (нижние стороны лежат на диаметре, боковые углы — на окружности). Докажите, что $a^2+b^2=r^2$, где r — радиус окружности.



5. Мистер и миссис Браун и четыре других супружеских пары встретились за чаем. Некоторые из десяти участников поздоровались, пожав друг другу руки (дважды не здороваясь с одним и тем же;

муж не пожимал руку своей жене). После этого мистер Браун спросил каждого из оставшихся 9 участников, сколько рукопожатий тот сделал, и все числа оказались разными. Сколько рукопожатий сделала миссис Браун?

30. Собеседование 21 апреля 2001 года

1. На клетчатой бумаге n клеток покрашены в чёрный цвет, остальные белые. Каждая клетка на следующем шаге приобретает цвет, который имело большинство из пяти клеток — самой клетки и четырёх её соседей (слева, сверху, снизу и справа). Например, белая клетка внутри чёрной области становится чёрной, а чёрный квадрат 2×2 на белом поле остаётся без изменений. Докажите, что число чёрных клеток после одного шага не превосходит $(5/3)n$.

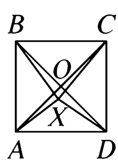
2. (Продолжение) Докажите, что (для некоторых n и для некоторых начальных позиций с n чёрными клетками) число чёрных клеток после некоторого количества шагов может стать больше $1{,}9n$.

3. (Продолжение) Докажите, что число чёрных клеток никогда не превзойдёт $4n$, если изначально их было n.

4. (Продолжение) Может ли число чёрных клеток через несколько шагов превзойти $2n$, если изначально их было n?

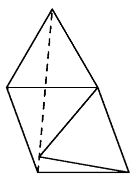
5. Корабль начинает плыть из точки с широтой и долготой $0°$ (это недалеко от западного берега Африки) и плывёт с постоянной скоростью и постоянным азимутом. Через сутки он имеет координаты $10°$ широты и $10°$ долготы. Капитан рассчитал, что ещё через сутки он будет в точке с координатами $20°$ широты и $20°$ долготы. Прав ли он? Если нет, то в какую сторону он ошибся по широте и по долготе? (Азимут — это угол между направлением движения и направлением на северный полюс. Землю считать шаром.)

6. (**а**) Как Вы думаете, давление внутри мыльного пузыря меньше или больше атмосферного? (**б**) Какой эксперимент Вы бы поставили, чтобы выяснить, в каком мыльном пузыре давление больше — в большом или маленьком? (**в**) Какой эксперимент Вы бы поставили, чтобы по возможности точнее измерить в домашних условиях давление внутри мыльного пузыря?



7. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка X. Докажите, что сумма углов $\angle XAB+\angle XBC+\angle XCD+\angle XDA$ не меньше $135°$.

31. Собеседование 25 апреля 2001 года



1. На соседних сторонах ромба построены два правильных треугольника; один внутрь, другой наружу (см. рисунок). Докажите, что их третьи вершины и противоположная вершина ромба лежат на одной прямой.

2. Социологи говорят, что 10% самых богатых людей в некоторой стране владеют 30% собственности, в то время как ниже черты бедности живут 85% людей, которые владеют всего 50% собственности. Докажите, что социологи ошибаются.

3. Плитка имеет форму выпуклого пятиугольника, причём никакие две стороны его не параллельны. При этом такими плитками можно выложить бесконечную плоскость без пробелов и перекрытий. Приведите пример такой плитки.

4. Покажите, что в последовательности

$$53, 503, 5003, 50003, 500003, \ldots$$

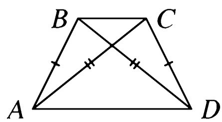
есть хотя бы одно составное число.

32. Собеседование 28 апреля 2001 года

1. Дан острый угол. Где может находиться центр окружности, если известно, что она пересекает границу угла в четырёх точках?

2. В шахматном турнире из 21 участника каждый играет с каждым одну партию, за выигрыш дают 1 очко, за ничью —0,5 очка, за проигрыш — 0. Какое максимальное число участников могли набрать по 15 очков?

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны AB и CD равны; кроме того, диагонали AC и BD равны. Докажите, что противоположные стороны AD и BC параллельны.



4. Запишем подряд числа от 1 до 99, затем заменим каждое число на сумму его цифр, получится последовательность

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 17, 18.$$

С полученной последовательностью разрешается предпринять такое действие: взять несколько подряд идущих чисел и увеличить их на 1; можно также взять несколько подряд идущих чисел и уменьшить их на 1. Какое минимальное число операций потребуется, чтобы сделать все числа равными?

5. Течение реки становится медленнее по мере приближения к устью. Плывя вниз по реке на лодке, рыбак обогнал плот, плывущий по течению. Через пять минут после этого он повернул обратно и поплыл вверх по течению. Сколько времени ему потребуется, чтобы вернуться к плоту: 5 минут? больше? меньше? (Скорость рыбака относительно воды постоянна.)

6. В каждую клетку квадратной таблицы 25×25 вписано одно из чисел 1 или -1. Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце, справа от каждой строки — произведение всех чисел строки. Может ли сумма всех 50 произведений равняться нулю?

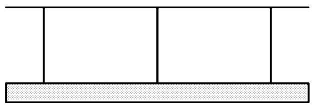
33. Тест по физике

1. Канал имени Москвы пересекает Ленинградский проспект по эстакаде (русло канала на опорах проходит над дорогой). Как меняется нагрузка на опоры, когда по каналу над дорогой проходит тяжёлая баржа?

2. На внутреннем из двух стёкол оконной рамы в поезде написано «Не высовываться»; пассажир рассматривает эту надпись, отражённую во внешнем стекле. Видит ли он её в зеркальном изображении или обычным образом?

3. В стенке тонкостенной цилиндрической консервной банки объёмом 1 литр и высотой 10 см проделали дырку на расстоянии 3 см от донышка. Какое максимальное количество воды можно налить в банку, чтобы вода не проливалась? (Банку можно наклонять.)

4. Брусок подвешен к потолку тремя верёвками: две по краям и одна в середине. Левая верёвка натянута с силой 5 ньютонов, средняя — 10 ньютонов. (**а**) Каково натяжение правой верёвки? (**б**) Сколько весит брусок?



5. Две лампочки накаливания (100-ваттная и 25-ваттная, обе на 220 вольт) соединены последовательно и включены в сеть 220 вольт. (**а**) Будут ли они гореть ярче или тусклее, чем включённые поодиночке (обычным способом)? (**б**) Могут ли они перегореть из-за перегрузки? (**в**) Какая из лампочек будет гореть ярче? (**г**) Будет ли потребляемая от сети мощность больше, чем у одной 100-ваттной лампочки (при обычном подключении)? (**д**) у одной 25-ваттной лампочки?

Задачи 2001 – 2002 года (9 класс)

В течение первого года (9 класс) большáя часть курса состояла из отдельных (иногда весьма непростых) сюжетов, не объединённых общими идеями и методами и даже порой не предполагающих особенного продолжения в дальнейшем. В отличие от «основных» листков, решение листка на такую тему было скорее почётно, чем обязательно. Такие листки были снабжены иллюстрациями — отсканированными рисунками («листки с цветочком»), которые воспроизведены в книге. В конце главы приведены задачи экзамена за 9 класс.

34. Доказательство неравенств

1. Докажите, что из всех прямоугольников периметра 40 наибольшую площадь имеет квадрат (со стороной 10).

2. Товар подорожал на 7,31%, а затем подешевел на 7,31%. Стал ли он дороже или дешевле в результате?

3. Самолёт летал из А в Б и обратно три раза с одной и той же скоростью. Первый раз он летел без ветра, второй раз — при постоянном ветре по направлению из А в Б, третий раз — при постоянном ветре той же силы, перпендикулярном АБ. В каком случае самолёт потратил меньше всего времени, а в каком — больше всего?

4. Какую максимальную площадь может иметь фигура на клетчатой бумаге, если её граница (идущая по клеточкам) имеет длину не более 19 клеток?

5. Сколько цифр в числе 2^{100}?

6. Рычажные весы нечестные (плечи разной длины), но гири правильные. Можно ли честно отвесить 2 килограмма сахарного песка в два приёма: сначала килограммовая гиря с одной стороны, а потом с другой?

7. Заменим в произведении $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ все числа на 150. Увеличится оно от этого или уменьшится? Тот же вопрос для суммы.

8. Увеличится или уменьшится сумма $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$, если все члены в ней заменить на $1/150$?

9. Представьте число 40 в виде суммы нескольких целых положительных слагаемых так, чтобы их произведение было максимально.

10. В последовательности Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Докажите, что сотый её член состоит не более чем из 32 цифр в десятичной записи и не менее чем из 15.

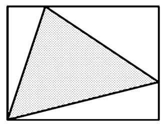
11. Укажите какое-нибудь целое n, при котором $1{,}001^n > 10$.

12. Укажите какое-нибудь целое n, при котором $0{,}999^n < 0{,}1$.

13. На краю пустыни имеется неограниченный запас бензина. Машина может взять бензина только на 50 км пути, но можно делать запасы, сливая часть бензина в канистры и оставляя их в пустыне. (Канистр в машине сколько угодно.) Можно ли так добраться до другого края пустыни, если её ширина — 1000 км?

14. Новобранцы стоят в строю, сержант скомандовал «Нале-ВО», но часть из них по ошибке повернулась направо. Далее происходит вот что: каждую секунду те, кто видят, что стоят лицом друг к другу, оба поворачиваются кругом. Докажите, что (**а**) они когда-нибудь остановятся (**б**) они остановятся не позднее, чем через 2^n секунд, где n — длина шеренги; (**в**) они остановятся не позднее, чем через n^2 секунд, где n — длина шеренги; (**г**) найти максимально возможное число секунд до остановки.

15. Треугольник вписан в прямоугольник: одна его вершина совпадает с вершиной прямоугольника, а две других лежат на несмежных с ней сторонах (см. рисунок). Докажите, что площадь треугольника не больше половины площади прямоугольника.



16. Найдётся ли такое n, при котором

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>10?$$

17. Найдётся ли такое n, при котором

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}>10?$$

18. Имеется 20 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что нельзя, отложив в сторону некоторые из них, разделить оставшиеся на две кучи равного веса. Докажите, что общий вес гирь превосходит 1 тонну.

19. Составьте из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (использовав каждую по одному разу) три трёхзначных числа так, чтобы их произведение было максимально.

35. Координаты

1. Лежат ли точки $A(6, 8)$, $B(9, 13)$ и $C(1, 0)$ на одной прямой?

2. Является ли треугольник с вершинами $A(1, 1)$, $B(4, 5)$, $C(9, -5)$ прямоугольным?

3. Нарисуйте на координатной плоскости множество всех точек $M(x, y)$, для которых $x^2 \geqslant y^2$.

4. Точка $C(3, 2)$ является серединой отрезка, один из концов которого — точка $A(x, y)$. Найдите координаты второго конца отрезка.

5. Найдите координаты четвёртой вершины и центра параллелограмма, если три его вершины суть $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(0, 2)$. (Укажите все варианты.)

6. Нарисуйте на координатной плоскости множество всех точек $M(x, y)$, для которых (**а**) $\{x\} + \{y\} = 1$; (**б**) $[x] = [y]$. (Здесь $[x]$ обозначает *целую часть* числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x: например, $[5{,}7] = 5$, $[-5{,}7] = -6$; $\{x\}$ — это *дробная часть* числа x, равная $x - [x]$.)

7. Нарисуйте на координатной прямой множество всех чисел x, для которых $x(x-1)(x-2)\ldots(x-10) \geqslant 0$.

8. Неравенство $x^3 + ax^2 + bx + 7 \geqslant 0$ имеет следующее множество решений:

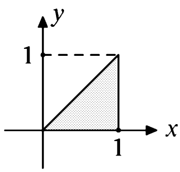
$$[-1, 2] \cup [3, +\infty)$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ или } x \geqslant 3$$

Найдите коэффициенты a и b.

9. Нарисуйте на координатной плоскости множество всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

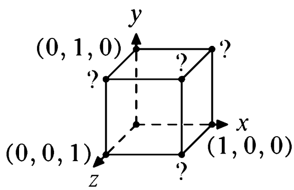
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$$

10. Напишите систему неравенств, решения которой изображены на рисунке.



11. Вершины треугольника — точки $A(0, 0)$, $B(5, 8)$, $C(8, 13)$. Вычислите его площадь.

12. (**а**) Найдите координаты (x, y, z) вершин куба, обозначенных на рисунке знаком вопроса. (**б**) Для каких точек $M(x, y, z)$ этого куба $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$?



13. Для каких точек $M(x, y, z)$ куба из предыдущей задачи выполнено равенство $x + y + z = 3/2$?

14. Известно, что $|x + y| \leqslant 1$, а $|2x - y| \leqslant 2$. Какие значения может принимать y?

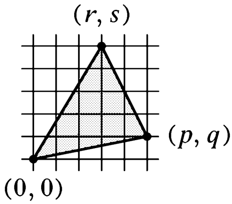
36. Многоугольники на клетчатой бумаге

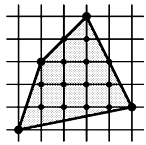
На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) будем рассматривать многоугольники с вершинами в углах клеток (точках с целыми координатами).

1. Какова минимально возможная площадь треугольника с вершинами в углах клеток? Найдите площадь треугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(p, q)$ и $C(r, s)$.

2. Многоугольник с вершинами в углах клеток содержит внутри себя k точек с целыми координатами, а его стороны проходят через l точек с целыми координатами (не считая вершин, которых n). Придумайте формулу, позволяющую найти площадь многоугольника при известных k, l и n, и проверьте её на разных примерах.

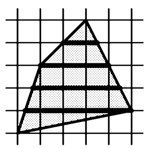
3. Докажите придуманную Вами формулу.





$k = 11$, $l = 2$, $n = 4$

4. Многоугольник с вершинами в углах клеток не имеет горизонтальных сторон. Докажите, что его площадь равна суммарной длине всех горизонтальных отрезков сетки, попадающих внутрь многоугольника.

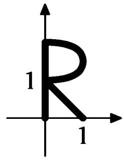


5. Каков минимально возможный объём многогранника, вершины которого имеют (в пространстве) целые координаты?

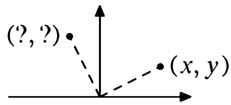
37. Координаты и преобразования

1. Как переместится точка A с координатами (x, y), если (**а**) увеличить x на единицу? (**б**) изменить знак координаты y? (**в**) изменить знаки у обеих координат? (**г**) поменять местами x и y?

2. (**а**) Какая фигура получится из буквы R на рисунке, если ко всем её точкам применить преобразование координат $(x, y) \mapsto (x+2, y+3)$ (увеличить все абсциссы на 2, а ординаты — на 3)? (**б**) $\ldots (x, y) \mapsto (-x, y)$? (**в**) $\ldots (x, y) \mapsto (x, 2-y)$? (**г**) $\ldots (x, y) \mapsto (y, x)$? (**д**) $\ldots (x, y) \mapsto (2x, 2y)$? (**е**) $\ldots (x, y) \mapsto (x, 2y)$? (**ж**) $\ldots (x, y) \mapsto (x, y+x)$? (**з**) Какое преобразование нужно сделать, чтобы получить на том же месте букву Я?



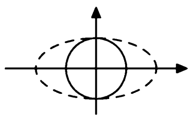
3. Найдите координаты точки, в которую переходит точка (x, y) при повороте на 90° относительно начала координат против часовой стрелки.



4. (**а**) Тот же вопрос для поворота на 90° вокруг точки $(2, 1)$. (**б**) Тот же вопрос для поворота на 45° вокруг начала координат. (**в**) Тот же вопрос для поворота на 30° вокруг начала координат.

5. (**а**) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат имеет уравнение $x^2+y^2=1$. Объясните, почему это так. (**б**) Напишите уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 2. (**в**) Напишите уравнение окружности с центром в точке $(3, 4)$ и радиусом 5.

6. Окружность радиуса 1 с центром в начале координат нарисовали на резиновой плёнке, которую растянули вдвое в направлении оси x. Напишите уравнение получившейся кривой (она показана пунктиром на рисунке).



38. Комбинаторика — искусство счёта

1. Сколько всего существует 15-значных чисел? У скольких из них последняя цифра чётная? первая цифра чётная, последняя нечётная, а восьмая не равна 6? (Первая цифра числа не может равняться нулю.)

2. Сколькими способами можно распределить между n школьниками роли в школьном спектакле? (Предполагается, что каждый должен играть ровно одну роль.)

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга? Ладья бьёт все клетки, находящиеся с нею на одной вертикали или на одной горизонтали. (Все ладьи одинаковые.)

4. В установке цветомузыки n разноцветных лампочек. Каждую можно включить или выключить независимо от других. Сколько различных узоров можно получить, включая и выключая лампочки? Тот же вопрос при условии, что гореть должно нечётное количество лампочек.

5. В классе n учеников. В субботу некоторые из них пошли в поход. Сколько имеется вариантов состава группы для похода? Как связана эта задача с предыдущей?

6. Сколько диагоналей имеется в выпуклом n-угольнике?

7. Британское правительство состоит из депутатов парламента. Сколько существует способов назначить k министров, если всего в парламенте n депутатов? Ответ этой задачи называется «числом размещений k элементов по n местам» и обозначается A_n^k (в данном случае «размещаются» k министерских портфелей по n депутатам).

8. Сколько существует способов назначить k членов депутатской комиссии, если в парламенте n депутатов? Ответ этой задачи называется «числом сочетаний из n элементов по k элементов» и обозначается C_n^k. (Читается: «цэ из эн по ка».)

9. Сколько существует различных сдач в преферанс? (При игре в преферанс раздают трём игрокам по 10 карт, а две карты оставляют на столе. Карты и игроки считаются различными.)

10. Сколько различных бус можно составить из 5 красных, 3 жёлтых и 7 белых бусин? (Бусины нанизывают на кольцевую нитку.)

11. Сколько существует различных способов раскраски сторон правильного n-угольника в n цветов (каждый цвет нужно использовать один раз)? Раскраски, отличающиеся только поворотом n-угольника, считаются одинаковыми.

12. Сколько существует различных способов раскраски граней куба в 6 цветов (каждый цвет нужно использовать один раз)? Раскраски считаются одинаковыми, если их можно совместить поворотом куба.

13. Сколько существует различных способов раскраски граней куба в 2 цвета? Раскраски считаются одинаковыми, если их можно совместить поворотом куба.

14. При переезде с квартиры на квартиру нужно разложить k хрустальных бокалов в n ящиков с опилками. Сколькими способами это можно сделать, если в каждый ящик можно положить произвольное количество бокалов? Все ящики разные, а бокалы совершенно неотличимы.

15. Сколько существует 7-значных чисел, в записи которых участвует цифра 6?

16. Сколько восьмизначных чисел можно можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если в каждом числе цифра 1 должна содержаться 3 раза, а остальные цифры по одному разу?

17. Сколько чисел первой сотни делятся или на 2, или на 3, или на 5?

18. Флаг состоит из трёх цветных полос равной ширины (полосы одного цвета не могут находиться рядом). Сколько флагов можно составить, если имеются полосы ткани 5 различных цветов? Тот же вопрос при условии, что одна из полос должна быть белой (белый — один из имеющихся цветов).

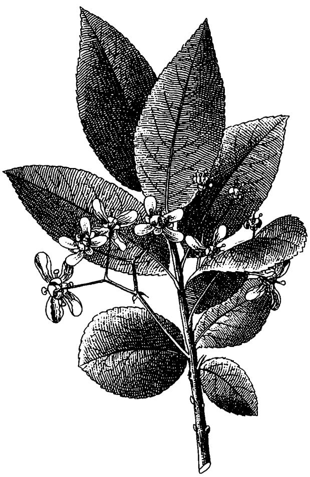
19. В классе 23 ученика. Каждый знает хотя бы один из трёх языков — русский, эстонский или английский. По-русски говорят 11 человек, по-эстонски — 9 и по-английски — 11. На русском и эстонском одновременно говорят трое, на русском и английском — четверо, на эстонском и английском — трое. Сколько учеников класса говорят на всех трёх языках?

20. Сколько решений в натуральных (целых неотрицательных) числах имеет (**а**) уравнение $x + y + z = n$ (для данного натурального числа n)? (**б**) уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$? (**в**) система $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, $1 \leqslant x_1 \leqslant 2, \ldots, 1 \leqslant x_k \leqslant 2$?

21. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они держали под боем все клетки доски? Все ладьи одинаковые.

22. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения диагоналей у этого n-угольника?

39. Угадай предел



1. Требуется найти (угадать, а если удастся, то и обосновать более или менее убедительно), к чему приближаются указанные выражения с ростом n. (Представьте себе, например, что надо найти три-четыре десятичных знака при $n = 10^{1000}$.)

(**а**) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n};$$

(**б**) $$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^n};$$

(**в**) $$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}.$$

2. Та же задача для $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$ (n шестёрок). Другими словами, $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ при $n \geqslant 1$; требуется найти a_n при больши́х n.

3. Та же задача для

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}$$

($a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 1/(1+a_n)$).

4. Та же задача для $\sqrt{n^2+n} - n$.

5. Та же задача для $(1-1/4)(1-1/9)(1-1/16)\ldots(1-1/n^2)$.

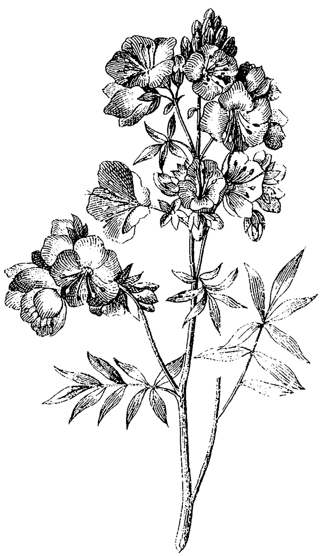
6. Та же задача для $(1^2+2^2+\ldots+n^2)/n^3$.

7. Та же задача для отношения двух соседних чисел Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

(каждое следующее равно сумме двух предыдущих).

40. Мирные фигуры



1. Какое максимальное число (**а**) ладей; (**б**) слонов; (**в**) королей; (**г**) коней; (**д**) ферзей, не бьющих друг друга, можно расставить на шахматной доске 8×8?

2. (Продолжение) Сколькими способами можно расставить максимальное число (**а**) ладей; (**б**) слонов; (**в**) коней, не бьющих друг друга, на шахматной доске?

3. Докажите, что число способов расставить на шахматной доске максимальное число не бьющих друг друга ферзей чётно.

4. Докажите, что число способов расставить на шахматной доске максимальное число не бьющих друг друга королей нечётно.

5. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске три не бьющих друг друга ладьи?

6. (**а**) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске четыре не бьющих друг друга ладьи, ни одна из которых не стоит на диагонали a1 – h8 (идущей из левого нижнего угла доски в правый верхний)? (**б**) Тот же вопрос для восьми ладей.

7. Какое максимальное число (**а**) ладей; (**б**) слонов; (**в**) королей; (**г**) коней, не бьющих друг друга, можно поставить на квадратную доску $n \times n$?

8. (Продолжение) Сколькими способами можно расставить максимальное число (**а**) ладей; (**б**) слонов; (**в**) коней, не бьющих друг друга, на квадратной доске $n \times n$?

41. Целые числа

Во всех задачах этого листка латинские буквы обозначают целые числа.

Делимость

Мы говорим, что *a делится на b* (*a кратно b, b делит a, b — делитель a*) и пишем $a \vdots b$, если существует целое c, для которого $a = bc$ (другими словами, если a/b целое или $a = b = 0$).

1. Какие из следующих утверждений верны: (**а**) если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$; (**б**) если $a \vdots b$ и $b \not\vdots\, c$, то $a \not\vdots\, c$; (**в**) если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $a + c \vdots b$; (**г**) если $a \vdots b$ и $c \not\vdots\, b$, то $a + c \not\vdots\, b$; (**д**) если $ab = cd$ и $a \vdots c$ ($c \neq 0$), то $d \vdots b$; (**е**) если $ab \vdots c$, то $a \vdots c$ или $b \vdots c$? Докажите верные утверждения и приведите контрпримеры к неверным.

Докажите, что

2. $a^3 + b^3 \vdots a + b$;

3. если $a^2 \vdots a + b$, то и $b^2 \vdots a + b$;

4. если a чётно и не делится на 4, то количество чётных делителей a равно количеству нечётных делителей a.

5. Найдите все натуральные числа, имеющие нечётное число натуральных делителей.

6. Докажите, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число, т. е. не существует таких a и b, что $a^2/b^2 = 2$.

7. Докажите, что $7^{2n} - 4^{2n} \vdots 33$ при любом целом $n \geqslant 1$.

Остатки и сравнения по модулю

Если $a - b \vdots m$, то говорят, что *a сравнимо* с *b по модулю m*. Обозначение: $a \equiv b (\text{mod } m)$.

Докажите следующие свойства сравнений:

8. если $a \equiv b (\text{mod } m)$ и $c \equiv d (\text{mod } m)$, то $a + c \equiv b + d (\text{mod } m)$;

9. если $a \equiv b (\text{mod } m)$ и $c \equiv d (\text{mod } m)$, то $ac \equiv bd (\text{mod } m)$;

10. если $a \equiv b (\text{mod } m)$, то $ac \equiv bc (\text{mod } mc)$;

11. $a^n \equiv b^n (\text{mod } a - b)$;

12. $a^{2001} \equiv -b^{2001} (\text{mod } a + b)$.

13. Изобразите на числовой прямой целые числа a, для которых (**а**) $a \equiv -1 (\text{mod } 7)$; (**б**) $a \equiv 15 (\text{mod } 5)$. Какие числа вы пометили дважды?

Напомним, что *разделить* число a на $b > 0$ *с остатком* означает найти такие целые k (неполное частное) и r (остаток), что $a = kb + r$ и $0 \leqslant r < b$. Это можно сделать так. Отметим на прямой все числа, кратные b. Они разбивают прямую на отрезки длины b. Пусть kb — левый конец отрезка, содержащего точку a, тогда разность $r = a - kb$ лежит между 0 и b, и мы получаем требуемое представление $a = kb + r$.

14. Докажите, что частное и остаток определены однозначно: если $a = k_1 b + r_1 = k_2 b + r_2$, причём $0 \leqslant r_1, r_2 < b$, то $r_1 = r_2$ и $k_1 = k_2$.

Найдите остатки от деления

15. -123234345 на 123;

16. 7^{2001} на 8;

17. 7^{2001} на 25;

18. 7^{2001} на 100;

19. $11^{100} - 8^{100}$ на 57;

20. $n^7 - n$ на 7;

21. $n^2 + 3n - 7$ на $n + 2$ (при $n = 0, 1, 2, \ldots$);

22. $33\ldots3$ (n троек) на $33\ldots3$ (k троек), где n и k — целые положительные числа;

23. $2^n + 1$ на $2^k + 1$, где n и k — целые положительные числа.

Существует ли целое число, дающее

24. при делении на 12 остаток 6, а при делении на 20 остаток 8;

25. при делении на 8 остаток 7, а при делении на 25 остаток 18?

26. Докажите, что любое натуральное число n и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 9.

27. Как найти остаток от деления натурального числа на 11, если известна его десятичная запись? Сформулируйте и докажите признак делимости на 11.

Разрешимы ли в целых числах уравнения:

28. $x^2 - y^2 = 2002$;

29. (**а**) $x^2 + y^2 = 1991$; (**б**) $x^2 + y^2 + z^2 = 999$?

Задачи этого листка сдаются только в письменном виде!

42. Математическая индукция

1. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат со стороной (**а**) 16 клеток (**б**) 2^k клеток (k — натуральное число). Из этого квадрата удалена одна клетка (неизвестно, какая). Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

2. Докажите, что (**а**) число, записанное 81 единицей, делится на 81; (**б**) для любого натурального n число, записанное 3^n единицами, делится на 3^n.

3. Число $x + 1/x$ является целым. Докажите, что тогда для любого натурального n число $x^n + 1/x^n$ тоже целое.

4. Докажите, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ число $(2 - \sqrt{3})^n$ представимо в виде разности $\sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ для некоторого целого m.

5. На плоскости проведены несколько прямых. Докажите, что части, на которые они делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы одноцветные части не соприкасались сторонами (вершинами соприкасаться можно).

6. Докажите, что сумма первых n натуральных чисел равна $n(n+1)/2$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про сумму первых n чётных чисел; первых n нечётных чисел.

7. Докажите, что сумма квадратов первых n натуральных чисел равна $n(n+1)(2n+1)/6$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$.

8. Подберите коэффициенты (числа) a, b, c, d, e так, чтобы сумма кубов первых n натуральных чисел равнялась $an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ (при любом n) и докажите полученную формулу.

9. Докажите, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

10. Докажите, что сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

11. Рассмотрим последовательность чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, ... (другими словами, $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$). Докажите, что каждый член этой последовательности меньше 2 и больше предыдущего её члена.

12. При каких натуральных n выполнено неравенство (**а**) $2^n > n^2$? (**б**) $3^n > n^3$? (**в**) $k^n > n^k$ (натуральное число $k > 3$ фиксировано)?

13. Докажите, что при любом $k = 2, 3, \ldots$ выполнены неравенства

$$\sqrt{k} < 1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{k} < 2\sqrt{k}.$$

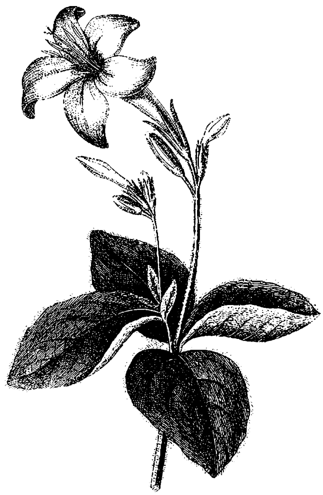
14. На сколько частей делят плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?

15. На сколько частей делят плоскость n окружностей, каждые две из которых пересекаются (не касаются) между собой и никакие три не пересекаются в одной точке?

16. Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Сколько треугольников могло получиться? сколько диагоналей провели?

17. В выпуклом n-угольнике провели все диагонали; никакие три их них не прошли через одну точку. На сколько частей делится при этом n-угольник?

43. Чёрные и белые клетки



На клетчатой бумаге некоторые клетки покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. На каждом шаге цвет клеток меняется по такому правилу: каждая клетка приобретает тот цвет, который на предыдущем шаге имело большинство из пяти клеток — её самой и её соседей слева, снизу, справа и сверху. (Все клетки меняют цвет одновременно.)

1. Число чёрных клеток конечно (вся плоскость белая, кроме конечной части). Может ли это число увеличиться после одного шага перекрашивания по описанным правилам?

2. Может ли это число увеличиться более чем в 2 раза после одного шага перекрашивания?

3. Может ли это число увеличиться более чем в 1,5 раза после одного шага перекрашивания?

4. Может ли это число увеличиться более чем в 4 раза после нескольких шагов?

5. Может ли это число увеличиться более чем в 3 раза после нескольких шагов?

6. Может ли это число увеличиться более чем в 2 раза после нескольких шагов?

7. Может ли это число увеличиться более чем в 1,5 раза после нескольких шагов?

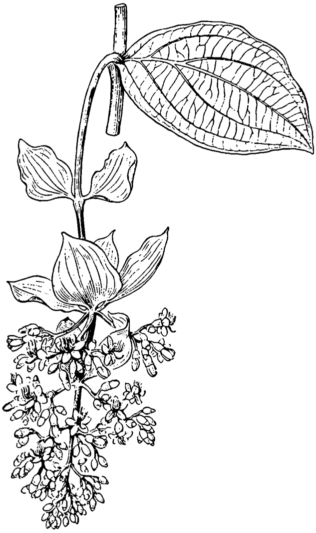
8. Изменим правила и будем считать, что каждая клетка приобретает цвет большинства из трёх клеток: её самой и соседей справа и сверху. Докажите, что в этом случае любое конечное множество чёрных клеток через несколько шагов исчезнет (все клетки станут белыми).

Предупреждение: мы не знаем решения некоторых из этих задач (но будем рады узнать!)[2]

[2]С того момента, как это было написано, каждая из задач была решена (общими усилиями преподавателей и школьников).

44. Ладейные многочлены

Будем называть доской любое конечное множество клеточек на листе бумаги. Будем считать, что ладья, стоящая на некоторой клетке доски, бьёт любую клетку доски, находящуюся с ней на одной вертикали или одной горизонтали (независимо от того, принадлежат ли доске клетки между ними). Для фиксированной доски $Д$ число способов расставить на ней k не бьющих друг друга ладей обозначим $Л_k(Д)$. Назовём две доски $Д_1$ и $Д_2$ эквивалентными, если для любого k $Л_k(Д_1) = Л_k(Д_2)$.



1. Докажите, что эквивалентные доски имеют одинаковые площади.

Ладейным многочленом доски $Д$ называется многочлен

$$Л(x, Д) = 1 + Л_1(Д)x + Л_2(Д)x^2 + \ldots$$

2. Придумайте (**а**) ладейный (**б**) не ладейный квадратный трёхчлен с целыми положительными коэффициентами и свободным членом, равным 1.

3. Пусть $Д$ есть объединение досок $Д_1$ и $Д_2$, причём с доски $Д_1$ ладья не может попасть на доску $Д_2$. Тогда $Л(x, Д) = Л(x, Д_1)Л(x, Д_2)$.

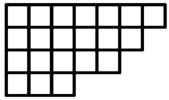
4. Пусть $к$ — произвольная клетка доски $Д$, $Д_1$ получается из $Д$ удалением $к$, $Д_2$ получается из $Д_1$ удалением всех клеток, куда можно попасть из $к$ за один ход. Докажите, что $Л(x, Д) = Л(x, Д_1) + xЛ(x, Д_2)$.

5. На доске $n \times n$ расставлено n ладей, не бьющих друг друга. Про каждую клетку можно узнать, стоит ли на ней ладья. Какое наименьшее число вопросов нужно, чтобы узнать всю расстановку?

Пусть $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$ — целые числа. Назовём *диаграммой Юнга* $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$ *со строками* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ доску, состоящую из клеточек, правые нижние углы которых имеют координаты

$$\begin{gathered}
(1, -1), (2, -1), (3, -1), (4, -1), \ldots, (k_1, -1), \\
\ldots, \\
(1, -n+1), \ldots, (k_{n-1}, -n+1), \\
(1, -n), \ldots, (k_n, -n).
\end{gathered}$$

Например, диаграмма Юнга $[7, 6, 5, 3]$ показана на рисунке.



6. Докажите, что квадратная доска доска $n \times n$ эквивалентна диаграмме Юнга $Д_n = [2n-1, \ldots, 3, 1]$.

7. Рассмотрим прямоугольник $m \times (n+k)$, который мы будем представлять себе состоящим из 2 частей: $А$ — прямоугольник $m \times n$ и $Б$ — прямоугольник $m \times k$. Пусть $В$ и $Г$ — две эквивалентные доски, расположенные внутри части $Б$. Тогда если добавить к ним часть $А$, то они останутся эквивалентными.

8. Пусть $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_m \geqslant 0$. Обозначим через $Д$ диаграмму Юнга $[b_1, b_2, \ldots, b_m]$. Докажите, что при $p \geqslant m$

$$\frac{p!}{(p-m)!} + Л_1(Д)\frac{p!}{(p-m+1)!} + Л_2(Д)\frac{p!}{(p-m+2)!} + \ldots + Л_m(Д) = \\ = (p+b_m)(p+b_{m-1}-1)\ldots(p+b_1-m+1).$$

9. С диаграммой Юнга $B = [b_1, b_2, \ldots, b_m]$ $(b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_m \geqslant 0)$ свяжем (неупорядоченный) набор чисел

$$S(B) = (b_m, b_{m-1}-1, \ldots, b_1-m+1).$$

Докажите, что диаграммы Юнга $Д_1$ и $Д_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $S(Д_1) = S(Д_2)$.

Пусть $БС_n(Д)$ — число способов расстановки n не бьющих друг друга белопольных слонов на доске $Д$, $ЧС_n(Д)$ — то же самое, но для чёрнопольных слонов, $БС(x, Д)$ и $ЧС(x, Д)$ — соответствующие «слоновые многочлены».

10. Пусть K_n — квадрат $n \times n$. Выразите многочлен $ЧС(x, K_{2n})$ через многочлены $ЧС(x, K_{2n+1})$ и $БС(x, K_{2n+1})$. (Напомним, что нижняя левая клетка **a1** чёрная.)

11. Докажите, что для каждой диаграммы Юнга существует единственная эквивалентная ей диаграмма Юнга, длины строк которой — различные ненулевые числа.

12. Докажите, что если две доски эквивалентны, то эквивалентны и их дополнения на любой прямоугольной доске, в которую они обе помещаются. (Если доска $Д$ помещена в доску $Д'$, то *дополнение* доски $Д$ — это доска, состоящая из всех клеток доски $Д'$, не принадлежащих $Д$.)

13. Пусть $f_{m,n}(x)$ — ладейный многочлен для прямоугольной доски $m \times n$. (**а**) Докажите, что $f_{m,n}(x) = f_{m-1,n}(x) + nxf_{m-1,n-1}(x)$. (**б**) Найдите $f_{m,n}(x)$.

14. Для данного n среди всех связных относительно хода ладьи досок из n клеточек найдите такую, на которую можно поставить несколько (не фиксированное количество) не бьющих друг друга ладей наибольшим числом способов. Чему равно это число способов?

15. Попробуйте развить теорию «королевских многочленов» $Кр(x, Д)$ (хотя бы для прямоугольных досок $1 \times n, 2 \times n, \ldots$).

45. Перестановки

1. В ряд стоят n ящиков (пронумерованные от 1 до n), в которых лежат n шаров, также пронумерованных от 1 до n. (В каждом ящике лежит один шар, но его номер может не совпадать с номером коробки.) Разрешается поменять два шара местами (научное название: *транспозиция*). Докажите, что можно добиться, чтобы каждый шар лежал в «родном» ящике (с тем же номером), сделав несколько транспозиций.

2. Тот же вопрос, если разрешается менять местами только шары в соседних ящиках.

3. Тот же вопрос, если разрешается менять местами только шары с соседними номерами.

4. Какое количество транспозиций может потребоваться (в худшем случае) в каждой из трёх предыдущих задач? (Надо указать для каждой из этих задач такое число N, что (1) при любом начальном положении можно решить задачу, сделав не более N транспозиций; (2) при некотором начальном положении меньшим числом транспозиций не обойтись.)

5. Имеются четыре шара и четыре ящика; придумайте последовательность транспозиций соседних ящиков, при которой шары возвращаются в начальное положение, побывав в каждом из 24 возможных положений по одному разу. Пример: для трёх шаров годится последовательность

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \to \boxed{1}\boxed{3}\boxed{2} \to \boxed{3}\boxed{1}\boxed{2} \to \boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} \to \boxed{2}\boxed{3}\boxed{1} \to \boxed{2}\boxed{1}\boxed{3} \to \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}.$$

6. (Продолжение) Докажите, что аналогичная последовательность существует для любого большего числа шаров.

7. Для четырёх шаров найдите все положения, в которых они могут оказаться после k транспозиций (начатых в исходном положении, когда шар i находится в i-м ящике), если $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Что будет для больших значений k?

8. После нескольких транспозиций (каждая меняла шары в двух *соседних* ящиках) шары вернулись в исходное положение (в котором они были до транспозиций). Докажите, что было сделано чётное число транспозиций.

9. (Продолжение) Докажите аналогичное утверждение для произвольных транспозиций (не обязательно в соседних ящиках).

10. (Продолжение) Докажите, что все расположения шаров в ящиках делятся на две группы: одни можно получить из исходного положения (когда i-й шар лежит в i-м ящике), сделав чётное число транспозиций (и нельзя получить после нечётного числа транспозиций), другие — наоборот. Сколько расположений n шаров относятся к первой группе, а сколько ко второй?

11. (Задача Н. Н. Константинова об обмене квартир) В некотором городе разрешены лишь «простые» обмены квартир (в которых участвуют две квартиры); более длинные цепочки обменов (например, если А въезжает в квартиру Б, который въезжает в квартиру В, который въезжает в квартиру А) не разрешены. Предположим, что каждый владелец квартиры может участвовать в день не более чем в одном обмене. Докажите, что тем не менее любой обмен может быть осуществлён за два дня. (В первый день производится какое-то число простых обменов, во второй — тоже, после чего все оказываются в тех квартирах, которые им назначены.)

12. Циклом длины 3 называется такая операция: шар А помещается на место шара Б, который помещается на место шара В, который помещается на место шара А. (Остальные шары остаются на месте.) Сколько различных конфигураций можно получить, применяя тройные циклы к заданной конфигурации четырёх шаров?

13. Тот же вопрос для n шаров (и тройных циклов).

14. Алгоритм шифрования заменяет каждую из 33 русских букв на какую-то другую букву, причём разные буквы заменяются на разные (чтобы можно было восстановить исходный текст). Докажите, что после нескольких применений этого алгоритма мы вернёмся к исходному тексту.

15. (Для видевших кубик Рубика) Пусть A — поворот передней грани по часовой стрелке на 90°, B — поворот правой боковой грани по часовой стрелке на 90°. Повторяя A или B четыре раза подряд, мы вернёмся в исходное положение (символически: $AAAA = 1$, $BBBB = 1$). Вернёмся ли мы в исходное положение, если будем многократно чередовать A и B: возможно ли $ABABABAB\ldots AB = 1$?

16. (Для видевших игру «15») Докажите, что в игре в 15 нельзя получить конфигурацию, в которой фишки 14 и 15 поменялись местами, а остальные находятся в исходном положении.

46. Вероятность

1. Игральную кость бросают шесть раз подряд. Какова вероятность, что выпадет ровно пять шестёрок, если считать все 6^6 исходов равновероятными?

Пояснение. Исходом эксперимента будут записанные подряд результаты шести бросаний. Результат бросания — число от 1 до 6, так что у одного бросания 6 исходов, а у серии бросаний — 6^6 исходов. Надо взять число «благоприятных» исходов (когда выпало ровно пять шестёрок) и умножить его на $1/6^6$ (такова вероятность одного исхода, если все исходы равновероятны).

2. (Продолжение) Какова вероятность того, что не выпадет ни одной шестёрки? что выпадет ровно одна шестёрка? хотя бы одна шестёрка? более одной шестёрки?

3. Подсчитайте «математическое ожидание» числа шестёрок (так называют среднее арифметическое числа шестёрок, вычисленное для всех 6^6 исходов). Что более вероятно — что не будет ни одной шестёрки, или что будет более одной шестёрки?

4. В соревнованиях по кубковой системе принимают участие 2^n спортсменов. Силы спортсменов постоянны и попарно различны, более сильный всегда побеждает более слабого. Найдите вероятность того, что в финале встретятся 2 самых сильных спортсмена, если все варианты жеребьёвки равновероятны.

5. Монету бросают 99 раз, записывая подряд результаты бросаний. Какова вероятность того, что орлов будет больше, чем решек? что орлов будет чётное число? Какое множество равновероятных исходов использовано при подсчёте?

6. (Продолжение) Тот же вопрос, если монету бросают 100 раз.

7. Игрок в спортлото выбирает 6 чисел из 49 и зачёркивает их в карточке. Во время тиража также случайно выбираются 6 чисел. Каковы вероятности того, что верно угаданных чисел (т. е. чисел, которые были зачёркнуты игроком в карточке, а затем выпали во время тиража) окажется 4, 5 и 6? (Ответ легче вычислить с калькулятором.)

8. Из урны, в которой лежат 50 чёрных и 50 белых шаров, наугад достают 10 шаров. Какова вероятность того, что все они будут чёрными?

9. В партии из $n = 100$ деталей 5% бракованных. ОТК проверяет 10% деталей (выбирая их случайно). Какова вероятность того, что ни одна из бракованных деталей не будет обнаружена? Покажите, что вероятность того же события для $n = 10000$ меньше 10^{-10}.

10. Имеются две урны с шарами. В одной из них лежат 5 белых и 10 чёрных шаров, а в другой 6 белых и 2 чёрных шара. Из каждой урны наудачу вытаскивают по одному шару. Найдите вероятность того, что они одного цвета.

11. Какова вероятность того, что среди n школьников найдутся двое, отмечающие день рождения в один день? Найдите численное значение этой вероятности при $n = 22$, $n = 24$ [число учеников 9В и 9Д школы 57] и $n = 22 + 24$.

12. (Продолжение) Школьник поступил в класс, в котором n учеников (считая его самого). Какова вероятность того, что хотя бы один из его одноклассников отмечает свой день рождения в тот же день ($n = 22$, $n = 24$,

$n = 22 + 24$)?

13. Пятеро мужчин и пятеро женщин садятся за круглый стол. Будем называть парой мужчину и женщину, сидящих рядом (каждый человек может входить в 0, 1 или 2 пары). Каково среднее количество образуемых пар (математическое ожидание числа пар)?

14. В колоде 52 карты. Колоду перетасовывают и вынимают из неё карты до появления первого туза. Каково математическое ожидание числа вынутых карт (не считая туза)?

В следующих задачах нужно не просто подсчитать соответствующие дроби, но и воспользоваться здравым смыслом.

15. Двое играют в такую игру: бросают монету, пока не выпадет 10 орлов (тогда выигрывает первый) или 10 решек (тогда выигрывает второй). Они прервали игру, когда было 8 орлов и 9 решек. Каковы вероятности выиграть после возобновления игры у каждого из участников?

16. Двое играют в такую игру: каждый пишет на бумажке целое число, потом они одновременно открывают написанные числа. Если сумма этих чисел делится на 3, выигрывает первый (и второй ему платит рубль), если нет — выигрывает второй (и получает A рублей от первого). При каком значении A эта игра честная?

17. Каждый из двух игроков пишет на бумажке число 1 или 2, после чего они одновременно открывают свои бумажки. Если числа совпали, первый платит второму столько рублей, каковы эти числа; если нет, второй платит первому A рублей. При каком значении A эта игра честная?

18. Имеется десять чёрных и десять белых шаров. Вы можете распределить их произвольно по двум урнам (надо использовать все шары), после чего Вам предложат выбрать случайный шар из случайной урны (Вы не знаете, где какая урна). Как нужно действовать, чтобы максимально увеличить шансы вынуть белый шар?

47. Комплéксные числа

Пары чисел (точки координатной плоскости) можно складывать:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Такие пары называют *комплéксными числами*, или точками *комплéксной плоскости*. Говорят, что комплексное число $z = (a, b)$ имеет *действительную часть* $\operatorname{Re} z = a$ и *мнимую часть* $\operatorname{Im} z = b$. Обычные (действительные) числа становятся частным случаем комплексных, если добавить к ним нулевую мнимую часть: действительное число a отождествляют с парой $(a, 0)$. Комплексное число (a, b) записывают также как $a + b\sqrt{-1}$, что приводит к такому определению умножения:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = \\ = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1} = (ac - bd, ad + bc).$$

Пару $(0, 1)$ называют *мнимой единицей* и обозначают $\sqrt{-1}$ или i.

1. (**а**) Проверьте, что и в самом деле $i^2 = (-1, 0)$ (так что обозначение $\sqrt{-1}$ оправдано). (**б**) Вычислите i^{10}. (**в**) Вычислите $(1 + i)^{10}$.

2. Проверьте обычные свойства сложения и умножения, особенно ассоциативность умножения:

$$(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) = ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f).$$

3. Найдите комплексное число, квадрат которого равен (**а**) -4; (**б**) -3; (**в**) i; (**г**) $1 + i$.

4. Найдите комплексное число z, для которого $z^4 = -1$.

5. Найдите (хотя бы один) комплексный корень квадратного уравнения $z^2+z+1 = 0$ (комплексное число z, для которого выполнено это равенство).

6. Найдите комплексное число z, для которого $z^3 = 1$, но $z \neq 1$.

7. Нарисуйте, где находятся комплексные числа z, для которых (**а**) действительная часть z равна 1 (запись: $\operatorname{Re} z = 1$); (**б**) действительная часть z равна мнимой (запись: $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$); (**в**) iz действительно (имеет нулевую мнимую часть).

8. Рассмотрим все комплексные числа, у которых действительная часть равна единице. Докажите, что их квадраты лежат на повёрнутой параболе (парабола — график квадратного трёхчлена).

9. Докажите, что если $uv = 0$ для двух комплексных чисел u и v, то одно из чисел u и v равно нулю.

10. Докажите, что любое комплексное число (кроме нуля) имеет обратное: если $z \neq 0$, то найдётся w, для которого $z \cdot w = 1$.

11. Рассмотрим все комплексные числа, у которых действительная часть равна единице, и возьмём обратные к ним. Они лежат на некоторой кривой; что это за кривая?

12. Рассмотрим геометрическое преобразование $z \mapsto iz$ (каждая точка умножается на i). (**а**) Что это за преобразование? (**б**) Какое преобразование получится, если выполнить его дважды?

13. Куда переходит точка z комплексной плоскости после поворота на 90° против часовой стрелки вокруг точки $(1, 0)$? Как записать ответ с помощью комплексных чисел?

14. Куда переходит точка z комплексной плоскости после поворота на 30° против часовой стрелки вокруг начала координат? Как записать ответ с помощью комплексных чисел?

15. Число $\overline{z} = a - bi$ называется *сопряжённым* к комплексному числу $z = a + bi$. Докажите, что (**а**) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; (**б**) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ для любых комплексных чисел z_1 и z_2.

16. Рассмотрим геометрическое преобразование $z \mapsto \overline{z}$. (**а**) Что это за преобразование? (**б**) Тот же вопрос для преобразования $z \mapsto i\overline{z}$.

17. Куда переходит точка z при осевой симметрии с осью, проходящей через точки 0 и $4 + 3i$?

18. *Модулем* комплексного числа $a + bi$ называют расстояние от точки (a, b) до начала координат; модуль числа z обозначается $|z|$. Докажите, что (**а**) модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей; (**б**) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

19. Рассмотрим целые числа, представимые в виде суммы двух квадратов (например, $5 = 2^2 + 1^2$ и $9 = 3^2 + 0^2$ представимы, а 3 и 7 — нет). (**а**) Докажите, что если n представимо, то и $2n$ представимо. (**б**) Докажите более общее утверждение: произведение двух представимых чисел представимо.

48. Самостоятельная работа

1. Придумайте формулу для суммы

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$$

и докажите её. (Указание. Эта формула имеет вид $a + \frac{b+cn}{2^n}$ для некоторых чисел a, b, c.)

2. Честную монету бросают 100 раз и подсчитывают число орлов, непосредственно перед которыми была решка. Найдите математическое ожидание этого числа.

3. Двое по очереди обводят красным и синим цветом стороны клеток на клетчатой бумаге (за каждый ход можно обвести сторону одной клетки, если она ещё не обведена другим). Докажите, что второй (синий) игрок может помешать красному образовать красную замкнутую линию.[3]

4. На доске написано число 100. За один шаг разрешается разбить одно из написанных на доске чисел на два целых положительных слагаемых, записав на отдельной бумажке их произведение. (Например, после одного шага на доске могут быть числа 60 и 40, а на бумажке — 2400, а после второго — 60, 20 и 20, а на бумажке 2400 и 400.) Так делают, пока на доске не останутся одни единицы. Найдите сумму всех чисел на бумажке (и докажите, что она не зависит от порядка действий).

[3]Эта задача оказалась весьма сложной: после того, как никто не решил её на первой самостоятельной работе, она была предложена на второй самостоятельной (через неделю) — с тем же результатом.

49. Аксиомы и плоскости

A1. Для любых двух различных точек существует одна и только одна прямая, которая их содержит.

A2. Для любой прямой l и любой точки A, не лежащей на l, найдётся одна и только одна прямая, которая содержит A и параллельна прямой l (не имеет с l общих точек).

A3. Существуют три различные точки, не лежащие на одной прямой.

1. Используя только аксиомы A1 – A3, докажите, что (**а**) любые две прямые либо не имеют общих точек (*параллельны*), либо имеют ровно одну общую точку (*пересекаются*), либо совпадают; (**б**) если две прямые параллельны третьей, то они либо параллельны друг другу, либо совпадают; (**в**) если прямая l пересекает прямую m, то она пересекает и любую прямую m', параллельную m; (**г**) если прямая l пересекает прямую m, то любая прямая l', параллельная l, пересекает любую прямую m', параллельную m.

2. Докажите, что на плоскости не менее 4 точек.

3. Приведите пример системы из четырёх точек и некоторого числа прямых (прямая понимается как множество точек), обладающей свойствами A1 – A3.

Системы из точек и прямых, обладающие свойствами A1 – A3, называются *аффинными плоскостями.*

4. Покажите, что свойство A3 нельзя доказать, пользуясь только свойствами A1 и A2.

5. Можно ли доказать, пользуясь только свойствами A1 – A3, что диагонали параллелограмма пересекаются?

6. На прямой l аффинной плоскости ровно n точек. Сколько прямых проходит через точку A, не лежащую на l?

7. Покажите, что все прямые конечной аффинной плоскости содержат одно и то же число точек. Как установить взаимно однозначное соответствие между двумя прямыми?

8. (**а**) Сколько всего точек на аффинной плоскости, если прямая состоит из n точек? (**б**) Сколько прямых на этой плоскости?

9. Существует ли аффинная плоскость из (**а**) 6 точек; (**б**) 9 точек?

10. На кружок пришли школьники из n различных школ, из каждой школы было ровно n человек: один первоклассник, один второклассник,. . . , один n-классник. Можно ли всех выстроить в квадрат $n \times n$ так, чтобы ни в одном ряду и ни в одной колонне не оказалось двух ребят из одной школы или из одинаковых классов, если (**а**) $n = 3$; (**б**) $n = 5$; (**в**) $n = 4$; (**г**) $n = 6$? (Возможно, при переборе вариантов полезна программа.)

Следующие свойства называют аксиомами проективной плоскости:

П1. (=А1) Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.

П2. Любые две различные прямые пересекаются ровно в одной точке.

П3. (=А3) Существуют три различные точки, не лежащие на одной прямой.

П4. На каждой прямой есть по меньшей мере три различные точки.

11. Пополните обычную евклидову плоскость «бесконечно удалёнными» точками так, чтобы выполнялись аксиомы П1 – П4.

12. Фиксируем в пространстве некоторую точку O. Будем называть «точками» прямые, проходящие через O, а «прямыми» — плоскости, проходящие через O. «Прямая» (плоскость) l проходит через «точку» (прямую) A, если плоскость l содержит прямую A в обычном смысле. Какой смысл приобретают аксиомы П1 – П4 в этой интерпретации? Как вы думаете, верны ли они?

13. Объясните, почему в двух предыдущих примерах рассматривается по существу одна и та же проективная плоскость.

14. Докажите, что если из проективной плоскости (системы точек и прямых, обладающей свойствами П1 – П4) выбросить любую прямую вместе со всеми её точками, то получится аффинная плоскость (система, обладающая свойствами А1 – А3).

15. Сколько точек в конечной проективной плоскости, если на одной из её прямых n точек?

16. Постройте примеры проективных плоскостей из 7 и 13 точек.

17. Закрасьте (**а**) 21 клетку в квадрате 7×7; (**б**) 52 клетки в квадрате 13×13 — так, чтобы никакие 4 закрашенные клетки не оказались в углах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. (**в**) Оцените максимальное число клеток в квадратах 7×7 и 13×13, которые можно закрасить, не нарушая указанного свойства.

50. Самостоятельная работа

1. Сколько существует пар целых чисел x, y от 1 до 1000, для которых $x^2 + y^2$ делится (**а**) на 7; (**б**) на 49?

2. Найдите сумму всех шестизначных чисел, в десятичную запись которых входят лишь цифры $1, 2, 3$, причём никакие две одинаковых цифры не идут подряд.

3. Двое по очереди обводят красным и синим цветом стороны клеток на клетчатой бумаге (за каждый ход можно обвести сторону одной клетки, если она ещё не обведена другим). Докажите, что второй (синий) игрок может помешать красному образовать красную замкнутую линию.

4. Докажите, что для всех достаточно больших n выполнено неравенство $1{,}01^n > 10n$.

51. Наибольший общий делитель

Наибольший общий делитель. Пусть a и b — целые числа, не равные нулю одновременно. Наибольшее натуральное число, делящее как a, так и b, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается НОД(a, b). Числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД$(a, b) = 1$, то есть у них нет общих делителей, кроме ± 1.

Найдите НОД следующих чисел (в зависимости от m и n):

1. n и 0;

2. n и $n+1$;

3. n и $n+6$;

4. $2n+3$ и $7n+6$;

5. n^2+n+1 и $n+5$;

6. 2^n-1 и 2^m-1.

Докажите следующие утверждения:

7. Если НОД$(a, b) = d$, то a/d и b/d взаимно просты.

8. НОД$(a - kb, b)$ = НОД(a, b). (Если от одного числа пары отнять кратное другого числа, то НОД не изменится.)

9. Пусть k, l, m, n — целые числа, для которых $kn - lm = 1$. Тогда НОД(a, b) = НОД$(ka + lb, ma + nb)$.

Алгоритм Евклида состоит из последовательности шагов. За один шаг от пары чисел (a, b) переходим к паре (b, r), где r — остаток от деления a на b. (Отрезаем от прямоугольника $a \times b$ квадраты, пока не останется прямоугольник $b \times r$.) Если $b = 0$, то алгоритм останавливается.

Докажите следующие утверждения:

10. Алгоритм Евклида в конце концов остановится.

11. Ненулевое число в паре, полученной на последнем шаге алгоритма Евклида, равно НОД(a, b).

12. Число НОД(a, b) представимо в виде $ax + by$ с целыми коэффициентами x, y. В частности, если a и b взаимно просты, то существуют целые x и y, для которых $ax + by = 1$.

13. Число НОД(a, b) делится на любой общий делитель чисел a и b.

14. Любое общее кратное чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное [обозначаемое НОК(a, b)].

15. Для положительных чисел a, b произведение их наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного равно ab.

16. Если ab делится на c, b и c взаимно просты, то a делится на c.

17. Если ab делится на простое число p, то a делится на p или b делится на p.

18. Если a делится на b и a делится на c, причём b и c взаимно просты, то a делится на bc.

19. Докажите *Основную Теорему Арифметики*: разложение натурального числа на простые множители существует и единственно (с точностью до перестановки множителей).

Линейные диофантовы уравнения

Докажите следующие утверждения:

20. Уравнение $ax + by = c$ с целыми коэффициентами a, b, c разрешимо в целых числах x, y тогда и только тогда, когда c кратно $d = \text{НОД}(a, b)$.

21. (Продолжение) Если (x_0, y_0) — одно из решений этого уравнения, то все решения имеют вид $(x_0 + tb/d, y_0 - ta/d)$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Решите в целых числах уравнения

22. $2001x + 555y = 1$;

23. $7581x - 1761y = 15$.

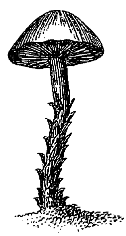
24. (Китайская теорема об остатках) (**а**) Найдите число, сравнимое с 5 по модулю 7, с 7 по модулю 13 и с 13 по модулю 17. (**б**) Найдите все такие числа.

(**в**) Придумайте общее правило для отыскания чисел, сравнимых с заданными по заданным модулям. (Для начала разберите случай взаимно простых модулей; соответствующее утверждение называется китайской теоремой об остатках.)

25. Слонопотам — шахматная фигура, умеющая ходить на m клеток в одном направлении и на n в перпендикулярном. Например, конь — это слонопотам с $m = 2$, $n = 1$. При каких (m, n) слонопотам может попасть на соседнее с ним поле (на бесконечной доске)?

26. В городе NN имеют хождение монеты в a и b тугриков, причём числа a и b взаимно просты. (**а**) Докажите, что любую достаточно большую сумму (в целое число тугриков) можно уплатить без сдачи. (**б**) Найдите наибольшую целую сумму S, которую нельзя уплатить без сдачи. (**в**) Докажите, что если $0 \leqslant s \leqslant S$ и s тугриков нельзя уплатить без сдачи, то $S - s$ — можно.

52. Одиннадцать задач по кинематике



1. Точка двигалась по прямой; на графике движения (рис. 1) показана зависимость координаты точки от времени. В какие моменты она ускорялась? замедлялась? в какой момент её скорость была наибольшей? наименьшей? Нарисуйте график зависимости её скорости от времени.

2. Точка двигалась по прямой; на графике (рис. 2) показана её скорость в зависимости от времени. В какой момент точка была дальше всего от начального положения? Нарисуйте график зависимости её координаты от времени.

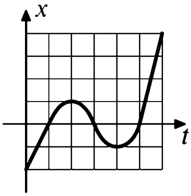


Рис. 1

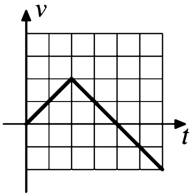


Рис. 2

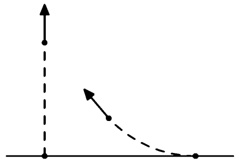


Рис. 3

3. (**а**) Точка движется по прямой, в момент $t \in [0,1]$ её координата равна t^2. В какой момент её мгновенная скорость равна средней скорости на промежутке $[0,1]$? (**б**) Тот же вопрос, если координата в момент t равна t^3.

4. Из пункта А в пункт Б вышел Ахиллес, петляя по лесу. Через некоторое время из А выползла черепаха, которая в каждый момент двигалась точно в направлении Ахиллеса. Через некоторое время после Ахиллеса в Б прибыла и черепаха. Докажите, что пройденный ею путь не больше пути Ахиллеса.

5. Самолёт, вылетев из Москвы, летит с постоянной скоростью и постоянным азимутом 45°. Когда и куда он попадёт? (Если бы он летел с той же скоростью точно на север, то прилетел бы на северный полюс через 12 часов.)

6. Два корабля одновременно отплывают от двух точек прямого берега моря, отстоящих на расстояние 1. Один корабль движется со скоростью 1 перпендикулярно берегу. Второй корабль движется с той же скоростью, всё время держа курс на первый (рис. 3). Каково будет расстояние между кораблями через большой промежуток времени?

7. Исследуя падение тел, отпущенных без начальной скорости, учёный выдвинул гипотезу: скорость растёт пропорционально пройденному телом пути. Покажите, что эта гипотеза не только противоречит опыту, но и внутренне противоречива.

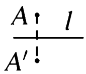
8. Скорость остывания чая пропорциональна разнице между температурой чая и комнатной температурой (которую мы принимаем равной 20°). За 20 минут чай остыл со 100° до 30°. Через сколько времени он остынет ещё на 5°?

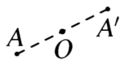
9. Один конец эластичного шнура (начальная длина 1 м) закреплён, а другой тянут со скоростью 1 м/с. Муравей ползёт по шнуру с постоянной скоростью в 1 мм/с, начав с закреплённого конца. Доползёт ли он хоть когда-нибудь до другого конца?

10. Точка движется по прямой, причём её скорость пропорциональна расстоянию от начала координат: начиная движение на расстоянии 1 м от начала координат, она движется со скоростью 1 м/с, отойдя от начала на 2 м, она движется со скоростью 2 м/с и так далее. Через секунду после начала движения она была на расстоянии e метров от начала координат. (**а**) Найдите e с ошибкой не более чем в два раза. (**б**) Докажите, что имеют место неравенства $(1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}$.

11. Точка удаляется по прямой от начала координат, причём скорость её удаления пропорциональна квадрату расстояния до начала. Покажите, что она «уйдёт в бесконечность» за конечное время. Верно ли это, если скорость удаления пропорциональна расстоянию до начала координат, а не его квадрату?

53. Преобразования

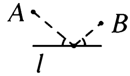




Осевая симметрия   Центральная симметрия

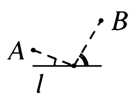
При *осевой симметрии* относительно прямой l каждая точка A переходит в точку A', для которой отрезок AA' перпендикулярен прямой l и делится ей пополам. (Точки прямой l остаются на месте.)

1. Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Постройте луч, выходящий из точки A и попадающий в точку B после отражения в прямой l, при котором угол падения равен углу отражения. (Указание: посветите фонариком на своё отражение в зеркале.)



2. Даны две точки A и B по разные стороны от прямой l. Постройте на прямой l точку C, для которой прямая l является биссектрисой угла ACB.

3. Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Постройте точку на прямой, для которой угол падения вдвое меньше угла отражения.



4. Правильный треугольник перекатывают по плоскости вокруг его сторон (на каждом шаге одна из вершин отражается симметрично относительно противоположной стороны). Через несколько шагов треугольник вернулся в исходное положение. Могут ли при этом вершины поменяться местами?

Осью симметрии фигуры F называется прямая, при симметрии относительно которой фигура F переходит в себя.

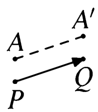
5. Фигура имеет две параллельные оси симметрии. Докажите, что она не ограничена (не может быть заключена ни в какой прямоугольник).

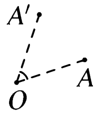
При *центральной симметрии* относительно точки O каждая точка A переходит в точку A', для которой O является серединой отрезка AA'. (Точка O остаётся на месте.)

6. Как провести через данную точку треугольного торта разрез, чтобы точка оказалась в середине разреза? Сколько решений может иметь задача?

7. Более половины круга покрашено в чёрный цвет. Докажите, что есть две чёрные точки, симметричные друг другу относительно центра круга.

8. Может ли ограниченная фигура иметь два центра симметрии? (*Центр симметрии* фигуры — точка, при симметрии относительно которой фигура переходит в себя.)

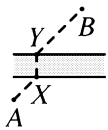




Параллельный перенос   Поворот

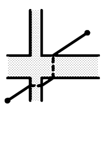
При *параллельном переносе* на вектор $\overline{PQ}$ каждая точка A переходит в точку A', для которой отрезок AA' равен и параллелен PQ и направлен в ту же сторону.

9. Деревни A и B расположены по разные стороны реки с параллельными берегами. Постройте мост XY, перпендикулярный реке, для которого отрезки AX и YB параллельны. Докажите, что такое положение моста даёт кратчайший путь из A в B (по сравнению с другими вариантами, когда мост перпендикулярен реке).



10. Где надо построить пешеходные переходы через перпендикулярные шоссе разной ширины, чтобы путь пешехода из данной точки A в данную точку B (в противоположных кварталах) был как можно короче?

11. Более 60% площади единичного квадрата покрашено в чёрный цвет. Докажите, что есть две чёрные точки на расстоянии 0,01.



12. (Продолжение) Тот же вопрос, если покрашено более 40% квадрата.

Поворот вокруг точки O на угол α переводит каждую точку A в точку A', для которой $OA = OA'$ и угол AOA' равен α (и направлен в одну и ту же сторону для всех точек A).

13. По одну сторону от отрезка AB построены правильные треугольники

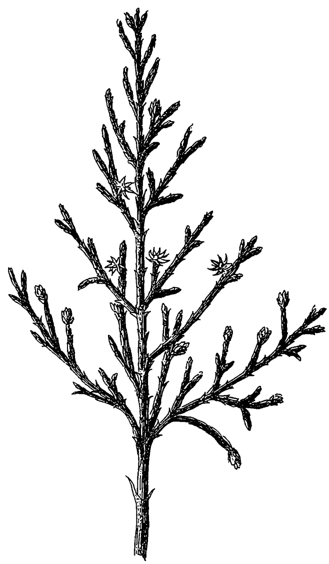
ADC и CEB. Докажите, что точка C (лежащая на отрезке AB) образует равносторонний треугольник с серединами отрезков AE и DB.

14. Более $1/3$ круга (по площади) покрашено в чёрный цвет. Докажите, что существуют две чёрные точки, переходящие друг в друга при повороте вокруг центра круга на 120°.

15. Из точки O проведено 30 лучей, делящих плоскость на 30 углов. Их скопировали на кальку и повернули кальку на 120° вокруг O. Докажите, что либо один из лучей наложится на другой, либо в один из 30 углов не попадёт ни одного из повёрнутых лучей.

54. Графы и другие задачи

1. Можно ли обойти доску 3×4 ходом шахматного коня, побывав на каждой клетке по одному разу и вернувшись в исходную клетку?



2. Докажите, что из любых шести человек можно выбрать либо трёх попарно знакомых, либо трёх попарно незнакомых. (Если А знаком с Б, то и наоборот).

3. Докажите, что в любой компании число людей, у которых нечётное число знакомых (в этой компании), чётно.

4. Докажите, что в любой момент футбольного турнира в один круг (каждая команда играет с каждой по разу) есть две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

5. Двадцать пять школьников решали несколько задач; каждую задачу решили два школьника и каждый школьник решил две задачи. (**а**) Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы все задачи были рассказаны по одному разу и каждый школьник рассказал по одной из решённых им задач. (**б**) Докажите, что число способов это сделать есть степень двойки.

6. Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

7. Можно ли расположить все трёхзначные числа, не оканчивающиеся нулями (от 101 до 999) в последовательность так, чтобы последняя цифра каждого числа равнялось первой цифре следующего за ним?

Пусть дано некоторое множество *вершин*, и некоторые пары вершин соединены *рёбрами*. Мы предполагаем, что ребро соединяет разные вершины (нет петель) и что данная пара вершин может быть соединена не более чем одним ребром. (Формально: некоторые неупорядоченные пары вершин выделены и названы рёбрами.) Примеры: (а) вершины графа — люди; рёбрами соединены знакомые; (б) вершины — клетки шахматной доски; рёбрами соединены пары клеток, отстоящие на ход коня; (в) граф имеет n вершин и каждая пара вершин соединена ребром.

8. (**а**) Сколько рёбер у графов в двух последних примерах? (**б**) ... у графа ходов $(5, 8)$-слонопотама на доске $N \times N$? (**в**) Сколько существует графов с данным множеством вершин?

Вершины графа часто изображают точками, а рёбра — соединяющими их линиями. (Линии могут пересекаться и не в вершинах, такие пересечения не считаются.)

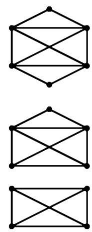
9. Граф *связен*, если из любой вершины можно пройти в любую по рёбрам. (**а**) Докажите, что в связном графе с n вершинами не менее $(n-1)$ рёбер. (**б**) Докажите, что если связный граф с n вершинами перестаёт быть связным после удаления любого ребра, то в нём ровно $(n-1)$ рёбер. (**в**) Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?

10. Докажите, что в любом связном графе найдётся вершина, после удаления которой (вместе со всеми примыкающими к ней рёбрами) граф останется связным: если в сети метро из любой станции можно проехать в любую, то можно закрыть одну из станций (запретив проезжать через неё) с сохранением этого свойства.

11. Докажите, что если в графе рёбер не меньше, чем вершин, то в нём есть *цикл* — путь по рёбрам, возвращающийся в исходную вершину и не проходящий ни по одному ребру дважды.

Эйлеров цикл — это цикл, проходящий по всем рёбрам ровно по одному разу. (Другими словами, требуется обвести нарисованный на бумаге граф, пройдя по каждому ребру по одному разу, и вернуться в исходную точку.)

12. Можно ли найти эйлеров цикл в графах на рисунке?



13. Закончите и докажите утверждение: граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и ...

14. *Степенью* вершины в графе называется число выходящих из неё рёбер. Докажите, что сумма степеней всех вершин в любом графе чётна.

15. Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

16. Докажите, что можно расположить по кругу 128 нулей и единиц так, чтобы любая группа из семи нулей и единиц встречалась (подряд) ровно по одному разу.

17. В школе несколько кружков, причём некоторые школьники ходят в несколько кружков сразу. Завуч хочет назначить в каждом кружке старосту (из числа участников), причём никто не должен быть старостой нескольких кружков. Покажите, что это невозможно в единственном случае: когда (для некоторого n) есть n кружков, объединение которых содержит менее n участников.

18. Каждый из n школьников решил 5 задач, причём каждую задачу решили ровно 5 школьников. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал какую-то из решённых им задач и каждая задача была рассказана по одному разу.

19. В бесконечном графе каждые две вершины соединены ребром — либо красным, либо синим. Докажите, что можно найти бесконечное число вершин, которые соединены друг с другом рёбрами одного цвета.

20. Докажите, что из любого бесконечного множества точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать четыре точки, лежащие в вершинах выпуклого 4-угольника.

21. Тот же вопрос для 5-, 6-, ..., n-угольника.

55. Композиция преобразований

Композицией преобразований F и G называется преобразование $F \circ G$, которое получится, если сначала применить G, а потом F. Формально: $F \circ G : x \mapsto (F \circ G)(x) = F(G(x))$. Обратите внимание на то, что в принятой нами записи преобразования выполняются «справа налево».

1. Пусть S_A и S_B — преобразования центральной симметрии относительно точек A и B. Чему равна их композиция $S_B \circ S_A$? Совпадает ли она с $S_A \circ S_B$?

Преобразование, которое оставляет каждую точку на месте, называют *тождественным* и обозначают 1. Например, если $A = B$, то композиция $S_B \circ S_A$ — тождественное преобразование.

2. Пусть S_l и S_m — преобразования осевой симметрии относительно прямых l и m. Найдите преобразование $S_m \circ S_l$. (Указание: рассмотрите случаи параллельных, пересекающихся и совпадающих осей симметрии.)

3. Какое преобразование является (**а**) композицией двух параллельных переносов? (**б**) композицией переноса и центральной симметрии? (Указание: перенос можно представить как композицию двух центральных симметрий.)

4. Пусть R_O^α — преобразование поворота вокруг точки O на угол α (против часовой стрелки). (**а**) Чему равна композиция $R_O^\beta R_O^\alpha$ поворотов с одним центром? (**б**) Чему равно преобразование $R \circ R \circ \ldots \circ R$ (19 раз), если R — преобразование поворота на угол в $19°$?

5. Фигура переходит в себя при повороте на $35°$ вокруг некоторой точки. Докажите, что она имеет центр симметрии.

6. Если R — поворот на $72°$ вокруг некоторой точки, то выполнено равенство $R \circ R \circ R \circ R \circ R = 1$, а композиция меньшего числа преобразований R не равна 1. Укажите ещё одно преобразование R с тем же свойством.

7. Найдите композицию осевой симметрии и поворота с центром, лежащим на оси симметрии (в том и другом порядке). (Указание: поворот можно представить как композицию двух осевых симметрий, при этом есть полезная свобода в выборе осей.)

8. Докажите, что композиция двух поворотов (вообще говоря, на разные углы и с разными центрами) есть поворот или перенос. (Указание: поворот есть композиция двух осевых симметрий).

9. Пусть S_l — симметрия относительно прямой l, а T_v — параллельный перенос на вектор v. (**а**) В каком случае $S_l \circ T_v = T_v \circ S_l$? (**б**) В каком случае преобразование $S_l \circ T_v$ является осевой симметрией?

Если вектор v параллелен прямой l, то преобразование $S_l \circ T_v = T_v \circ S_l$ называется *скользящей симметрией.*

10. Используя предыдущие задачи, заполните клетки «таблицы умножения», указав для каждой клетки, какие преобразования там могут встретиться:

	центральная симметрия	осевая симметрия	перенос	поворот
центральная симметрия	?	?	?	?
осевая симметрия	?	?	?	?
перенос	?	?	?	?
поворот	?	?	?	?

11. (**а**) Придумайте способ разделить рассмотренные нами преобразования на *сохраняющие ориентацию* и *обращающие ориентацию* таким образом, чтобы композиция двух преобразований одного типа сохраняла ориентацию, а композиция двух преобразований разного — обращала. (**б**) Докажите, что такое разделение можно произвести единственным образом (если только не считать все преобразования сохраняющими ориентацию).

12. (**а**) Докажите, что композиция четырёх центральных симметрий с центрами A, B, C, D является параллельным переносом. (**б**) В каком случае эта композиция является тождественным преобразованием? (**в**) Как вывести отсюда, что середины сторон любого четырёхугольника образуют параллелограмм?

13. (**а**) Докажите, что композиция пяти центральных симметрий является центральной симметрией. Как построить её центр, если известны центры пяти исходных симметрий? (**б**) Как восстановить пятиугольник, если от него остались только середины сторон?

14. Найдите композицию центральных симметрий относительно всех вершин правильного n-угольника (взятых в порядке обхода многоугольника).

15. Докажите, что если фигура имеет две оси симметрии, которые не перпендикулярны, то она имеет и третью ось симметрии.

16. (**а**) Найдите композицию осевых симметрий относительно трёх биссектрис треугольника. (Указание: впишите в него окружность.) (**б**) Как восстановить треугольник, если от него остались только биссектрисы и одна из вершин?

17. Докажите, что если три оси симметрии фигуры не проходят через одну точку, то фигура не ограничена.

18. (**а**) Пусть A, B и C — произвольные точки. Докажите, что композиция поворотов на $120°$ (в одну и ту же сторону) относительно точек A, B и C является параллельным переносом. (**б**) При каком расположении точек A, B и C этот перенос является тождественным преобразованием? (**в**) На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

56. Движения

Преобразование плоскости — это правило, которое для каждой точки плоскости указывает, куда эта точка переходит (*образ* этой точки). Преобразование называется *движением*, если оно сохраняет расстояния, то есть расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами.

1. Проверьте, что (**а**) все рассмотренные нами преобразования (симметрии, повороты, переносы) являются движениями; (**б**) композиция любых двух движений является движением; (**в**) если три точки лежат на одной прямой, то и их образы при движении лежат на одной прямой; (**г**) если три точки не лежат на одной прямой, то и их образы при движении не лежат на одной прямой.

2. Проверьте, что движение переводит (**а**) прямую в прямую и (**б**) окружность в окружность. (В частности, надо проверить, что образ прямой или окружности — вся прямая или окружность, а не просто её часть.)

3. (**а**) Можно ли изобразить на карте участок поверхности (скажем, Земного) шара с точным соблюдением масштаба (отношение расqтояний, измеренных по поверхности шара, и расстояний на карте должно быть постоянным)? (**б**) Тот же вопрос для участка конуса.

4. Движение оставляет на месте три точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что это — тождественное преобразование (любая точка остаётся на месте). (Указание: геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных — прямая.)

5. (**а**) Движение оставляет на месте две разные точки. Докажите, что это либо осевая симметрия, либо тождественное преобразование. (**б**) Движение оставляет на месте точку O. Докажите, что это либо осевая симметрия относительно прямой, проходящей через точку O, либо поворот вокруг точки O.

6. (**а**) Докажите, что движение можно восстановить, зная образы трёх точек, не лежащих на одной прямой. (**б**) Даны два луча. Сколько существует движений, переводящих первый из них во второй? (**в**) Тот же вопрос для двух данных отрезков. (**г**) Тот же вопрос для двух данных треугольников.

7. Докажите, что любое движение является композицией двух или трёх осевых симметрий.

8. (Продолжение) Выведите отсюда *теорему Шаля*: всякое движение есть либо поворот, либо перенос, либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия.

9. Даны два равных непараллельных отрезка AB и $A'B'$. Докажите, что найдётся точка C, для которой треугольники ABC и $A'B'C$ равны.

10. Две машины едут по двум пересекающимся прямым дорогам с постоянной скоростью. Докажите, что можно поставить милиционера так, чтобы в любой момент он был равноудалён от них.

11. Найдите все движения, переводящие ось абсцисс в ось ординат.

12. Симметрией фигуры называется движение, при котором эта фигура переходит в себя. (**а**) Сколько симметрий (считая тождественное преобразование) у квадрата? (**б**) ... у правильного n-угольника? (**в**) Укажите фигуру, имеющую ровно 5 симметрий.

13. Пусть c — некоторое комплексное число. (**а**) При каких c преобразование $z \mapsto cz$ является движением? (**б**) Что это за движение?

14. Как с помощью комплексных чисел задать поворот на угол α? (Указание: ответ включает в себя $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.)

15. Запишите равенство $R^{\alpha+\beta} = R^{\beta} \circ R^{\alpha}$, используя комплексные числа, и выведите отсюда формулы для $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$, выражающие их через косинусы и синусы углов α и β.

16. Докажите, что сохраняющее ориентацию движение (комплексной) плоскости задаётся формулой $z \mapsto az + b$, а обращающее — формулой $z \mapsto a\bar{z} + b$. Здесь a, b — некоторые комплексные числа, причём $|a| = 1$.

17. Шар повернули вокруг вертикальной оси на 90°, а затем вокруг горизонтальной оси на 90°. Результирующее движение также является поворотом вокруг некоторой оси. Что это за ось? Чему равен угол поворота?

Преобразованием подобия с коэффициентом k называется преобразование, при котором все расстояния умножаются на k (в частности, преобразования подобия с коэффициентом 1 — это движения).

18. (**а**) Найдите общую формулу для преобразований подобия, используя комплексные числа. (**б**) Докажите, что всякое преобразование подобия с коэффициентом $k \neq 1$ имеет неподвижную точку.

19. (**а**) Может ли движение переводить некоторую фигуру (множество точек) в её часть, не совпадающую со всей фигурой? (**б**) Тот же вопрос для ограниченной фигуры.

57. Многочлены

Многочленом от *переменной* x называется формальная сумма вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$, где a_i — числа (называемые *коэффициентами* многочлена). Число k называют *степенью* многочлена (считаем, что $a_k \neq 0$), a_k — *старшим коэффициентом*, a_0 — *свободным членом*. Перемножают многочлены, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые.

1. Вычислите (**а**) $(1 + x + x^2)^3$; (**б**) $(1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})$; (**в**) $(1 - x)^2(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 11x^{10})$; (**г**) $(1 + x)^5$.

Многочлен считается равным нулю, если все его коэффициенты равны нулю. Нулевой многочлен не имеет степени (иногда говорят, что его степень равна $-\infty$).

2. Докажите, что если произведение двух многочленов равно нулю, то один из них равен нулю. (Другими словами, если оба многочлена ненулевые, все члены в произведении не смогут сократиться.)

3. (**а**) Верно ли, что если в произведении двух многочленов только один ненулевой коэффициент, то и каждый из многочленов таков? (**б**) Тот же вопрос для многочленов с не более чем двумя ненулевыми коэффициентами.

4. Пусть степень многочлена $P(x)$ (обозначается $\deg P$, от слова degree) равна p, степень многочлена $Q(x)$ равна q. Что можно сказать про степени произведения и суммы этих многочленов?

5. (**а**) Как найти старший коэффициент произведения $P(x)Q(x)$, если известны старшие коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$? (**б**) Тот же вопрос про свободный член.

6. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена (**а**) $(x+1)^5$; (**б**) $(x^5 - x + 2)^{2002}$.

7. У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равна сумме коэффициентов при нечётных степенях; многочлен $Q(x)$ обладает тем же свойством. Можно ли утверждать, что это свойство выполнено и для многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? А если про коэффициенты $Q(x)$ ничего не известно?

Если в многочлен $P(x)$ вместо переменной x подставить число a, получится число, обозначаемое $P(a)$. Если $P(a) = 0$, то число a называют *корнем* многочлена $P(x)$.

8. Сколько корней имеет многочлен $x^5 + 7x^3 + 6x - 15$? Найдите его корни с точностью до одной десятой.

Говорят, что многочлен $A(x)$ *делится* на многочлен $B(x)$, если $A(x) = B(x)C(x)$ для некоторого многочлена $C(x)$.

9. (**а**) Делится ли многочлен $x^{100}-1$ на x^2-1? (**б**) Тот же вопрос для многочлена $x^{100}+1$.

10. Делится ли многочлен $x^{100}+1$ на многочлен x^2+1?

11. Делится ли многочлен $x^{100}+1$ на x^2+x+1?

Как и целые числа, многочлены можно делить с остатком. Именно, *разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $D(x)$ с остатком* означает найти такие многочлены $Q(x)$ (*частное*) и $R(x)$ (*остаток*), что $P(x) = D(x)Q(x)+R(x)$ и степень $R(x)$ меньше степени $D(x)$ (или $R(x)=0$; в этом случае $P(x)$ делится на $D(x)$ без остатка).

12. Докажите, что частное и остаток существуют (указание: вспомните или придумайте, как делить многочлены уголком) и определены однозначно.

13. Укажите числа a и b, для которых многочлен $ax^{2002}+bx^{1001}+x+1$ делится на (**а**) x^2-1; (**б**) x^2+1.

14. Найдите остаток от деления (**а**) x^9 на x^2+2; (**б**) $(x^2+x+1)^{100}$ на x^2+1; (**в**) x^{99} на $x^4+x^3+x^2+x+1$.

15. Чему равен остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$ (где a — некоторое число)?

16. (Теорема Безу) Пусть a — корень многочлена $P(x)$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x-a$.

17. Многочлен $P(x)$ имеет корни a и b, причём $a \neq b$. Докажите, что $P(x)$ делится на $(x-a)(x-b)$.

18. Докажите, что многочлен степени n имеет не более n корней.

19. Разложите на множители: (**а**) x^2-3x+2; (**б**) x^3-2x^2+3x-6; (**в**) x^4+1.

20. Докажите, что многочлены x^5+3x+2 и x^5+5x-3 не имеют общих корней.

21. Найдите многочлен $P(x)$ степени 4, для которого $P(5)=1$, а $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$.

22. Найдите многочлен, принимающий в заданных (различных) точках $x_1, \ldots, x_n$ заданные значения $a_1, \ldots, a_n$.

23. Докажите, что среди многочленов степени меньше n существует ровно один, удовлетворяющий условиям предыдущей задачи.

Экзамен за 9 класс

Экзамен за 9 класс был устным и проводился по следующей схеме. Каждый школьник в начале экзамена получал 4 задачи из некоторого набора. Любую задачу можно было рассказать (один раз), получив за её решение плюс или минус. В любом случае задача заменялась на новую; таким образом, в течение всего экзамена у школьника было 4 нерешённых задачи.

Некоторые из предлагавшихся задач были взяты из листков за 9 класс и вступительных собеседований. Кроме того, предлагались следующие задачи.

1. Социологический опрос показал, что 80% школьников знают русский язык и 40% знают английский. Какая часть школьников наверняка знает два языка?

2. В меню есть 5 вариантов первого блюда, 6 вариантов второго и 7 вариантов десерта. Сколько способов заказать обед из трёх блюд?

3. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

5. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

6. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots \pm C_n^n$ (знаки чередуются) равно 0.

7. Сколько путей по линиям клетчатой бумаги (вверх и вправо) ведут из точки $(0,0)$ в точку (k,l)? (Здесь k, l — неотрицательные целые числа.)

8. Сколько существует 7-значных чисел, в записи которых участвует цифра 6?

9. Сколько восьмизначных чисел можно можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если в каждом числе цифра 1 должна содержаться 3 раза, а остальные цифры по одному разу?

10. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они держали под боем все клетки доски? Все ладьи одинаковые.

11. Даны точки $A(1,1)$, $B(-1,-1)$, $C(0,2)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

12. Найдите два комплексных числа, сумма и произведение которых равнялись бы 2.

13. Вычислите $(1+i)^{101}$.

14. Вычислите $\frac{1+i}{1-i}$, то есть найдите число, при умножении которого на $1-i$ получается $1+i$.

15. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, для которых $z+\overline{z}=1$.

16. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, для которых $z\cdot\overline{z}=1$.

17. Рассмотрим преобразование плоскости, при котором к каждой точке прибавляется $(1,2)$. Найдите образ прямой $x+y=0$ (его уравнение).

18. Игра в орлянку до 10 побед была прервана при счёте 5:7. В какой пропорции честно разделить приз?

19. Докажите, что множество всех центров симметрии любой фигуры имеет центр симметрии.

20. При каких n (и на что) сократима дробь $\frac{2n+3}{7n+6}$?

21. Докажите, что если a^2+b^2 (для целых a и b) делится на 21, то a^2+b^2 делится на 441.

22. Во сколько примерно раз увеличится сумма $1^2+2^2+\ldots+100^2$, если все её члены заменить на последний (100^2)?

23. Четыре стороны четырёхугольника не длиннее 1 каждая. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

24. В ряд лежат n различных бусинок. Разрешается: (1) поменять местами первую и вторую слева бусинки; (2) взять первую бусинку и положить её вслед за последней. Можно ли за несколько операций получить любое расположение бусинок?

25. Игральную кость бросают шесть раз подряд. Какова вероятность, что выпадет ровно четыре шестёрки, если считать все 6^6 исходов равновероятными?

26. Шесть человек (А, Б, В, Г, Д, Е) становятся в очередь в случайном порядке. Какова вероятность, что Б окажется в очереди между Д и Е?

27. Из шаров с номерами $1, 2, 3, 4, \ldots, 20$ случайно выбирают два шара. Какова вероятность того, что меньший из двух номеров не превосходит 7?

28. Из шаров с номерами $1, 2, 3, 4, \ldots, 20$ случайно выбирают два шара. Какова вероятность того, что больший из двух номеров нацело делится на меньший?

29. Сколько существует целых неотрицательных чисел x, y, z, для которых $x = y + z$ и $x \leqslant 1000$?

30. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, составленных из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$, в которых любая цифра встречается не больше одного раза.

31. Найдите $C_{2001}^0 + C_{2001}^2 + \cdots + C_{2001}^{2000}$.

32. Найдите формулу для суммы $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

33. Решите в целых числах уравнение $17x + 14y = 9$. (Укажите общую формулу для его решений.)

34. Докажите, что произведение 7 последовательных целых чисел делится на $7!$.

35. Какой остаток даёт 3^{100} при делении на 11?

36. Докажите, что $(3+\sqrt{2})^{20} + (3-\sqrt{2})^{20}$ — целое число и найдите его остаток при делении на 7.

37. Какие натуральные числа от 1 до 1000 имеют ровно 5 различных (положительных) делителей?

38. Докажите, что преобразование комплексной плоскости $z \mapsto (1+2i)z$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

39. Сколько решений в целых числах имеет система $x_1 + x_2 + \ldots x_{10} = 24$, $2 \leqslant x_1 \leqslant 3, \ldots, 2 \leqslant x_k \leqslant 3$?

40. Найдите координаты точки, в которую переходит точка $(\sqrt{2}, 5)$ при симметрии относительно прямой $x + y = 7$.

41. Докажите, что для всех достаточно больших n число $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ меньше $0{,}001$.

42. Найдите формулу для суммы $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n$.

Задачи 2002 – 2003 года (10 класс)

В течение второго года дополнительных листков стало меньше; это в какой-то степени объясняется необходимостью планомерного изучения «математического анализа». Отметим, что некоторые задачи основных листков весьма сложны (и были решены лишь немногими школьниками); мы сознательно не выделяли их («звёздочкой» или как-либо ещё), считая, что это лишь помешает процессу решения. В конце главы приведён список тем «курсовых работ» (см. также главу «Избранные курсовые работы») и материалы экзамена за 10 класс.

58. Биномиальные коэффициенты

Пусть дано n различных предметов. Число способов выбрать k из них (без учёта порядка) называется *числом сочетаний из n по k* и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»). Например, $C_4^2 = 6$ (из $\{a, b, c, d\}$ можно выбрать $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ и $\{c, d\}$). Естественно считать, что $C_n^0 = C_n^n = 1$ (выбрать всех или не выбрать никого можно единственным способом) и $C_n^k = 0$ при $k < 0$ и $k > n$.

0. Вспомните или выведите заново формулу для числа C_n^k.

1. Докажите, что (**а**) $C_n^k = C_n^{n-k}$; (**б**) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Запишем числа сочетаний в таблицу («треугольник Паскаля»):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

2. Где в этой таблице число C_n^k? Как сформулировать утверждения предыдущих задач в терминах этой таблицы?

3. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

4. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n = 0$.

5. (Бином Ньютона) Заполните пропуски:

(**а**) $(a + b)^3 = a^3 + \_\_\, a^2 b + \_\_\, ab^2 + b^3$;

(**б**) $(a + b)^4 = a^4 + \_\_\, a^3 b + \_\_\, a^2 b^2 + \_\_\, ab^3 + b^4$;

(**в**) $(a + b)^n = a^n + \_\_\, a^{n-1} b + \_\_\, a^{n-k} b^k + \ldots + \_\_\, ab^{n-1} + b^n$.

6. Докажите, что (**а**) $C_n^k C_{n-k}^r = C_n^r C_{n-r}^k$ [иногда это равенство полезно в виде $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$]; (**б**) $C_{n-1}^k C_n^{k-1} C_{n+1}^{k+1} = C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^k$.

7. Найдите коэффициент при $x^k y^l z^m$ в выражении $(x + y + z)^n$ после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

Даны целые неотрицательные числа k, m, n. Вычислите суммы (ответ не должен содержать многоточий):

8. $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_m^k$;

9. $C_k^1 + 2C_k^2 + \ldots + kC_k^k$;

10. $C_k^0 C_n^m + C_k^1 C_n^{m-1} + \ldots + C_k^m C_n^0$;

11. $\left(C_k^0\right)^2 + \left(C_k^1\right)^2 + \ldots + \left(C_k^k\right)^2$;

12. $C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_n^{k-1} + C_n^2 C_n^{k-2} - \ldots \pm C_n^k C_n^0$.

13. (**а**) В каких строках треугольника Паскаля все числа (кроме крайних) чётные? (**б**) …все числа (кроме крайних) делятся на 3? (**в**) …все числа (кроме крайних) делятся на некоторое простое число p?

14. Докажите, что для любого простого p выполнены такие сравнения: (**а**) $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p$; (**б**) $(x+y+z)^p \equiv x^p + y^p + z^p \pmod p$;

59. Множества

Множество считается заданным, если известно, какие *элементы* ему принадлежат. Если x является элементом множества A, пишут $x \in A$. Через $\{a, b, \ldots\}$ обозначают множество, состоящее из элементов a, b, …; например, множество $\{a\}$ состоит из единственного элемента a (так же как и множество $\{a, a\}$ — это одно и то же множество). Вообще, два множества *равны* (представляют собой одно и то же множество), если всякий элемент первого является элементом второго и наоборот. Множество A называют *подмножеством* множества B, если всякий элемент A является элементом B. Пустое множество (не содержащее элементов) обозначается $\varnothing$.

1. Закончить фразы: (**а**) «Множество A **не** является подмножеством множества B, если…»; (**б**) «Множества A и B не равны, если…».

2. Сколько элементов в множестве $\{\varnothing\}$?

3. Докажите, что у конечного множества столько же подмножеств с чётным числом элементов, сколько с нечётным.

4. Какое максимальное число подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ можно выбрать, если требуется, чтобы ни одно из них не было подмножеством другого?

5. Докажите, что можно выписать все подмножества множества из n элементов в таком порядке, чтобы каждое следующее получалось из предыдущего добавлением или удалением одного элемента.

6. Имеется набор из 20 гирь, каждая весит целое число граммов, и суммарный вес гирь меньше тонны. Докажите, что можно достичь равновесия, положив часть гирь на одну чашку весов, а часть на другую (не обязательно использовать все гири).

Пересечение двух множеств A и B обозначается $A \cap B$ и состоит из элементов, принадлежащих обоим множествам; *объединение* двух множеств

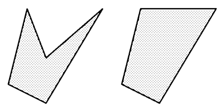
A и B обозначается $A \cup B$ и состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из них. *Разность* $A \setminus B$ состоит из элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B; *симметрическая разность* $A \triangle B$ состоит из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A и B.

7. Нарисуйте множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $A \triangle B$, если A и B — множества точек, лежащих внутри (пересекающихся) кругов.

8. Какие из равенств (**а**) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (**б**) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; (**в**) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$; (**г**) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ верны для любых трёх множеств A, B, C? (Для верного равенства надо привести доказательство того, что если некоторый элемент x лежит в левой части, то он лежит и в правой, и наоборот. Для неверного достаточно привести один контрпример.)

9. Напишите формулу, выражающую $A \triangle B$ через операции $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

10. Можно ли написать формулу, которая выражает $A \setminus B$ через объединение и пересечение?



11. *Полуплоскостью* называется множество точек плоскости, лежащих по одну сторону от некоторой прямой (в том числе и на самой прямой). Можно ли представить каждый из многоугольников на рисунке в виде пересечения нескольких полуплоскостей?

12. Какое максимальное число сторон может быть в многоугольнике, являющемся (**а**) пересечением треугольника и квадрата? (**б**) объединением треугольника и квадрата? (Говоря о многоугольнике, мы имеем в виду его внутренность.)

13. Даны n множеств. За один шаг разрешается заменить любые два из них на их симметрическую разность. Шаги повторяются, пока не останется одно множество. Докажите, что оставшееся множество не зависит от того, какие именно операции выполняются.

Число элементов в конечном множестве A обозначают через $|A|$.

14. Как найти $|A \cup B|$, если известны $|A|$, $|B|$ и $|A \cap B|$?

15. Какое максимальное число четырёхэлементных подмножеств можно выбрать в девятиэлементном множестве, если пересечение любых двух выбранных подмножеств должно содержать не более одного элемента?

16. Укажите семь трёхэлементных подмножеств в семиэлементном множестве, любые два из которых имеют ровно один общий элемент.

17. Докажите *формулу включений и исключений* для трёх множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

18. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для n множеств.

19. Легко видеть, что для любых конечных множеств A и B выполняется формула $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$. Придумайте и докажите аналогичную формулу (**а**) для $|A \triangle B \triangle C|$; (**б**) для симметрической разности n множеств.

20. Расстояние $d(A, B)$ между двумя конечными множествами A и B определим как число элементов в $A \triangle B$. Докажите *неравенство треугольника*: $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$.

21. Докажите, что если равенство двух выражений, содержащих множества $A, B, C, \ldots$, выполняется не всегда, то можно найти контрпример, в котором множества состоят не более чем из одного элемента.

22. (Продолжение) Придумайте способ (алгоритм), который за конечное число шагов проверяет, всегда ли выполнено равенство такого вида.

23. (Продолжение) Сколько различных выражений, содержащих переменные $A_1, \ldots, A_n$ и операции пересечения, объединения и разности, можно составить? (Два выражения считаются различными, если они различаются хотя бы при одном наборе значений $A_1, \ldots, A_n$.)

24. Лотерейный билет содержит цифры от 1 до 9. Игрок должен зачеркнуть три из них. Во время тиража выбираются 5 цифр из 9. Игрок получает столько рублей, сколько цифр совпало. Сколько должен стоить билет, чтобы игра была честной? (Каково среднее число элементов в пересечении трёхэлементного и пятиэлементного подмножеств девятиэлементного множества?)

60. Степенны́е ряды

Степенны́м рядом с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots$ называют формальную запись $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ Степенные ряды можно складывать и умножать по обычным правилам (раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые). Частный случай степенного ряда — многочлен (у него все коэффициенты, начиная с некоторого, равны нулю).

1. Напишите формулы для коэффициента при x^n в сумме $A + B$ и произведении $A \cdot B$ степенных рядов $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ и $B = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$

2. Вычислите:

(**а**) $(1 - x)(1 + x + \ldots + x^n + \ldots)$;

(**б**) $(2+x^2)(1-x^2+\ldots+(-1)^nx^{2n}+\ldots)$;

(**в**) $(1 + x + \ldots + x^n + \ldots)(1 + x + \ldots + x^n + \ldots)$;

(**г**) $(1 + x + \ldots + x^n + \ldots)(1 - x + \ldots + (-1)^nx^n + \ldots)$.

3. Вычислите

(**а**) $\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)$;

(**б**) $\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\ldots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)$;

(**в**) $\left(1-\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)$.

4. (**а**) Для каких рядов A найдётся обратный, то есть такой ряд B, что $AB = 1$ (где 1 обозначает ряд $1 + 0x + 0x^2 + \ldots$)? (**б**) Докажите, что такой ряд единствен (если найдётся).

5. (Продолжение) Для каких рядов A и B найдётся такой ряд Z, что $AZ = B$?

6. Найдите обратные (если это возможно) для следующих рядов: (**а**) $A = 1-2x$; (**б**) $A = 2-x$; (**в**) $A = x+x^2$; (**г**) $A = 1+x+2x^2+\ldots+f_n x^n+\ldots$, где f_n — числа Фибоначчи ($f_0 = f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$).

7. Можно ли извлечь квадратный корень из ряда A (то есть найти ряд B, для которого $B \cdot B = A$), если (**а**) $A = 1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots$; (**б**) $A = 1 - 2x + 3x^2 - \ldots + (-1)^n(n+1)x^n + \ldots$; (**в**) $A = 1 + x$; (**г**) $A = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$? Если да, то какой ряд B надо взять? (Найдите несколько первых коэффициентов ряда B и (если удастся) общую формулу.)

8. (Продолжение.) Из каких рядов A можно извлечь квадратный корень? (Задачу можно понимать двояко: коэффициенты рядов A и B могут быть действительными или комплексными.)

9. Обозначим через B_α *биномиальный ряд*

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

(получающийся, если в обычную формулу бинома Ньютона для $(1+x)^\alpha$ подставить не обязательно целое α и продолжить ряд до бесконечности). Докажите, что $B_\alpha \cdot B_\beta = B_{\alpha+\beta}$.

10. (**а**) Придумайте способ нахождения ряда $1/(x^2+px+q)$, обратного к ряду (многочлену) x^2+px+q, используя тождество

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}.$$

(**б**) Используя предыдущий пункт и задачу 6г, придумайте и докажите явную формулу для чисел Фибоначчи.

11. Билет с шестизначным номером (от 000 000 до 999 999) называется «счастливым», если сумма первых трёх цифр номера равна сумме последних трёх цифр. (**а**) Докажите, что число счастливых билетов равно числу билетов с суммой цифр 27 и равно коэффициенту при x^{27} в степенном ряде

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^6 = \frac{(1 - x^{10})^6}{(1 - x)^6}.$$

(**б**) Вычислите коэффициенты ряда $1/(1 - x)^6$. (**в**) Вычислите число счастливых билетов.

61. Отношения и функции

Пусть даны два множества A и B. Их *произведением* называется множество $A \times B$, состоящее из *упорядоченных пар* $\langle a, b \rangle$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Например, если $A = \{u, v, w\}$, а $B = \{2, 3\}$, то $A \times B$ состоит из шести элементов $\langle u, 2 \rangle$, $\langle u, 3 \rangle$, $\langle v, 2 \rangle$, $\langle v, 3 \rangle$, $\langle w, 2 \rangle$, $\langle w, 3 \rangle$. Подмножества множества $A \times B$ называются *отношениями* или *соответствиями*. Например, можно рассмотреть отношение «...решил...», являющееся подмножеством произведения Школьники $\times$ Задачи. Множества A и B могут совпадать; например, после турнира в один круг (без ничьих) определено отношение «...выиграл у...», являющееся подмножеством множества Игроки $\times$ Игроки.

1. Двадцать школьников решали задачи, при этом каждый школьник решил три задачи и каждая задача решена двумя школьниками. Сколько было задач?

2. Несколько шахматистов участвовали в турнире в один круг (каждый сыграл с каждым по одному разу), причём ничьих не было. Докажите, что верно одно из двух: либо есть абсолютный победитель (выигравший у всех остальных), либо есть такие три шахматиста А, Б, В, что А выиграл у Б, Б выиграл у В и В выиграл у А.

3. Оптимист говорит: более 70% школьников умные (решили более 70% задач). Пессимист возражает: более 70% задач оказались сложными (если считать сложной задачу, которую более 70% школьников не смогли решить). Могут ли они быть оба правы?

4. (Продолжение) Заменим везде в предыдущей задаче 70% на x. При каких x возможно, что оба правы?

5. Работа была поделена поровну между работниками в бригаде. После первого дня подсчитали, сколько человек выполнило не менее 30% своей доли — таких оказалось 70% всех работающих. Когда стали считать только тех, кто выполнил не менее 70% своей доли, таких оказалось 30%. Можно ли быть уверенным, что выполнено не менее трети работы?

6. Есть 7 одинаковых яблок, которые нужно разрезать на куски и поровну раздать 12 школьникам. Какое наименьшее число кусков для этого нужно?

Отношение $F \subset A \times B$ называется *функцией*, если каждому элементу множества A соответствует ровно один элемент множества B. В этом случае пишут $F\colon A \to B$, а элемент $b \in B$, соответствующий элементу $a \in A$, обозначают $F(a)$.

Если при этом каждому элементу множества B соответствует ровно один элемент множества A, то функция $F\colon A \to B$ называется *взаимно однозначным соответствием* или *биекцией*.

7. (**а**) Сколько существует различных функций $F\colon A \to B$, если в множество A входят a элементов, а в множество B — b элементов? (**б**) Сколько среди этих функций биекций? (**в**) Сколько существует строго возрастающих функций $F\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$? (Функция F считается строго возрастающей, если $F(x) < F(y)$ при $x < y$.)

8. На окружности нарисовано 100 синих точек. Постройте биекцию между множеством всех 57-угольников с синими вершинами и множеством всех 43-угольников с синими вершинами.

9. На окружности нарисовано 100 синих точек и одна красная. (**а**) Чего больше: шестиугольников с одной красной вершиной и пятью синими или пятиугольников, все вершины которых синие? (**б**) Чего больше: многоугольников, все вершины которых синие, или многоугольников, у которых одна вершина красная, а остальные синие?

Постройте взаимно однозначное соответствие между

10. множеством целых чисел $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ и множеством натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;

11. двумя отрезками разной длины (каждый отрезок мы рассматриваем как множество лежащих на нём точек, включая его концы);

12. отрезком и интервалом (отрезком без концов);

13. интервалом и прямой;

14. треугольником и квадратом (не включая их внутренностей);

15. треугольником и квадратом (включая их внутренности);

16. бесконечными последовательностями цифр $0, 1$ и бесконечными последовательностями цифр $0, 1, 2, 3$;

17. бесконечными последовательностями цифр $0, 1$ и бесконечными последовательностями цифр $0, 1, 2$.

18. Постройте строго возрастающее взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных чисел и множеством положительных рациональных чисел.

19. Постройте строго возрастающее взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных чисел и множеством десятично-рациональных чисел (чисел, представимых конечной десятичной дробью).

20. Покажите, что произвольная функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ может быть представлена в виде суммы трёх биекций $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (это значит, что

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ для всех x).

21. Верно ли аналогичное утверждение для двух биекций?

62. Равномощность

Множества A и B называются *равномощными* (имеющими одинаковую *мощность*), если существует взаимно однозначное соответствие между A и B.

1. (**а**) Верно ли, что если A равномощно B, а B равномощно C, то A равномощно C? (**б**) Даны два множества A и B. Может ли быть так, что A равномощно некоторому подмножеству множества B, не совпадающему с B, и в то же время B равномощно некоторому подмножеству множества A, не совпадающему с A?

2. (**а**) Постройте биекцию между множеством всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством всех последовательностей нулей и единиц длины n. (**б**) Постройте биекцию между множеством всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ и множеством всех бесконечных последовательностей нулей и единиц.

3. Рассмотрим множество Σ всех конечных и бесконечных последовательностей нулей и единиц, а также множество Ω всех бесконечных последовательностей нулей и единиц. Будут ли Σ и Ω равномощны?

Множество, равномощное множеству $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (т. е. множеству натуральных чисел), называется *счётным*.

4. Докажите, что следующие множества счётны: (**а**) целых чисел $\mathbb{Z}$; (**б**) рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (рациональное число — отношение двух целых); (**в**) конечных последовательностей букв русского алфавита.

5. Докажите, что объединение счётного числа счётных множеств счётно.

6. Докажите, что множество *алгебраических чисел* (то есть чисел, являющихся корнями многочленов с целыми коэффициентами) счётно.

7. Дано счётное множество бесконечных десятичных дробей (каждая начинается с нуля, а после запятой идут цифры $0, 1, \ldots, 9$). Постройте бесконечную десятичную дробь, которая не входит в это множество.

8. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц несчётно.

9. Докажите, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

10. Докажите, что если A бесконечно, а B счётно, то множество $A \cup B$ равномощно A.

11. Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой не более чём счётно (т. е. конечно или счётно). (Интервал (a, b) состоит из всех чисел, бо́льших a, но меньших b; предполагается, что $a < b$.)

12. Бесконечная последовательность нулей и единиц называется *вычислимой*, если существует программа (скажем, на паскале; считаем, что переменные типа `integer` могут принимать любые целые значения), которая печатает эту последовательность. Докажите, что существуют невычислимые последовательности.

В дальнейшем мы принимаем без доказательства, что действительные числа задаются бесконечными десятичными (или двоичными) дробями, причём каждому числу соответствует одна дробь или две (одна с нулями на конце, другая с девятками на конце).

13. Докажите, что прямая (точнее, множество всех точек прямой) равномощна множеству всех бесконечных последовательностей нулей и единиц.

Мощность этих множеств называют *мощностью континуума.*

14. Докажите, что прямая равномощна плоскости. (Указание: как соединить две бесконечные последовательности нулей и единиц в одну?)

15. Докажите, что окружность и круг равномощны.

16. (**а**) Докажите, что существует *трансцендентное* действительное число (то есть действительное число, не являющееся алгебраическим). (**б**) Докажите, что множество трансцендентных чисел имеет мощность континуума.

17. Дано множество непересекающихся восьмёрок на плоскости (восьмёрка — объединение двух окружностей, касающихся внешним образом). Докажите, что это множество счётно.

18. Верно ли аналогичное утверждение для фигур, геометрически подобных (**а**) букве N? (**б**) букве O? (**в**) букве T? (Все линии в буквах нулевой толщины.)

Обозначим через $\mathscr{P}(A)$ множество всех подмножеств множества A. Например, если A состоит из n элементов, то $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$.

19. (Теорема Кантора) Докажите, что множество $\mathscr{P}(A)$ ни при каком A (даже при пустом) не равномощно множеству A. (Указание: солдат-парикмахер, которому вышло указание брить всех тех солдат, кто не бреет себя, не сможет его выполнить.)

Две фигуры на плоскости называются *подобными*, если существует взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором все расстояния изменяются в одно и то же число раз.

20. На плоскости даны круг A и квадрат B. Покажите, что можно разбить круг на две непересекающиеся части A_1 и A_2, а квадрат — на две непересекающиеся части B_1 и B_2 таким образом, что A_1 подобно B_1, а A_2 подобно B_2. (Указание. Используйте квадраты с круглыми дырками и круги с квадратными дырками.)

21. Даны два множества A и B. Пусть f — взаимно однозначное соответствие между A и некоторым $B' \subset B$, а g — взаимно однозначное соответствие между B и некоторым $A' \subset A$. Покажите, что можно разбить A на две непересекающиеся части A_1 и A_2 и разбить B на две непересекающиеся части B_1 и B_2 таким образом, что f осуществляет взаимно однозначное соответствие между A_1 и B_1, а g — между B_2 и A_2.

22. (Теорема Кантора – Бернштейна) Докажите, что если A равномощно некоторому подмножеству множества B, а B равномощно некоторому подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.

23. Докажите, что любые два множества на плоскости, содержащие отрезок или дугу окружности, равномощны.

24. (**а**) Квадрат разбит на два множества. Докажите, что хотя бы одно из них равномощно всему квадрату. (**б**) Докажите аналогичное утверждение для отрезка.

25. Имеется семейство подмножеств множества $\mathbb{N}$. Может ли это семейство быть несчётным, если для любых элементов A и B этого семейства (**а**) $A \cap B$ конечно; (**б**) $A \subset B$ или $B \subset A$; (**в**) $A \triangle B$ конечно?

63. Аксиома полноты

Говорят, что число c является *верхней границей* (или *гранью*) для множества A, если все числа из множества A не превосходят c (то есть $a \leqslant c$ для всех a из A). Множество называется *ограниченным сверху*, если оно имеет верхнюю границу.

1. Закончите фразы: (**а**) c не является верхней границей множества A, если...; (**б**) множество A не ограничено сверху, если ...

2. Ограничено ли множество $\{a_1, a_2, \ldots\}$, если:

(**а**) $a_n = (1{,}01)^n$? (**б**) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/n$? (**в**) $a_n = n^{10}/2^n$? (**г**) $a_n = 2^n/n^{10}$? (**д**) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/(a_n)^2$?

Элемент множества A, являющийся верхней границей для A, называют *наибольшим* элементом.

3. Всякое ли ограниченное множество имеет наибольший элемент?

Наименьшая из верхних границ множества A, если она существует, называется *точной верхней гранью* этого множества и обозначается $\sup A$ (от слова ‘supremum’).

4. Дайте определение наименьшего элемента и точной нижней грани. (Точная нижняя грань множества A обозначается $\inf A$ от слова ‘infimum’.)

5. Вычислите $\sup A$, $\inf A$, а также наибольший и наименьший элемент множества A (если они существуют), если (**а**) $A = \{x + 1/x \mid 0 < x < 3\}$; (**б**) $A = \{x^2 - x + 1 \mid -1 < x < 1\}$; (**в**) $A = \{x/(x+1) \mid x > 1\}$.

6. Существует ли бесконечное ограниченное множество, любое подмножество которого (**а**) имеет наибольший элемент; (**б**) имеет наибольший и наименьший элемент?

Аксиома полноты. Пусть L и R — два непустых множества действительных чисел, причём L находится «левее» R: если $l \in L$ и $r \in R$, то

$l \leqslant r$. Тогда существует *разделяющее число* c, для которого $l \leqslant c \leqslant r$ при всех $l \in L$, $r \in R$.

В дальнейшем разрешается пользоваться аксиомой полноты без доказательства.

7. Докажите, что любое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань.

8. Докажите *принцип вложенных отрезков*: если дана (бесконечная) последовательность вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

то найдётся действительное число, принадлежащее всем этим отрезкам.

9. Верен ли аналогичный «принцип вложенных интервалов»?

10. (**а**) Дано множество отрезков (на прямой), причём любые два отрезка из этого множества имеют общую точку. Верно ли, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам? (**б**) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольников на плоскости, стороны которых параллельны осям координат? (Прямоугольник рассматривается вместе с внутренностью.) (**в**) ... для произвольных прямоугольников на плоскости?

11. (**а**) Рассмотрим все бесконечные последовательности нулей и единиц с «лексикографическим» (как в словаре) порядком: сравниваем первые слева различающиеся цифры. Верна ли для них аксиома полноты? (**б**) Тот же вопрос, если считать последовательности $x011111\ldots$ и $x100000\ldots$ равными.

64. Контрольная работа

1. Вычислите сумму

$$\sum_{k=0}^{15} 3^k C_{15}^k.$$

2. Докажите, что

$$C_{10}^k = \sum_{r=0}^{k} C_7^r C_3^{k-r}.$$

3. Существуют ли такие коэффициенты a, b, при которых следующее равенство справедливо для всех $n \geqslant 3$, $k \geqslant 3$

$$C_n^k = C_{n-3}^k + aC_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}?$$

4. Вычислите коэффициент при x^8 в $(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)^5$.

5. Вычислите коэффициент при $x_1x_2x_3x_4$ в $(1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^8$.

6. Найдите сумму коэффициентов многочлена

$$\left(\sum_{k=0}^{20} (k+1)^2 x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{10} (-1)^k x^k\right)$$

7. Сравните числа $\sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{k}$ и 2^n.

8. Найдите сумму всех пятизначных чисел, в которые каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5 входит ровно один раз.

65. Сложение фигур

Пусть даны фигуры F и G. Назовём *полусуммой* этих фигур множество середин отрезков PQ, где $P \in F$, $Q \in G$. (Обозначение: $(F+G)/2$.)

Опишите $(F+G)/2$, если:

1. одна из фигур — точка;

2. F и G — отрезки;

3. F и G — круги;

4. F и G — прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат;

5. F — треугольник, G — его сторона;

6. F — отрезок, G — круг;

7. F и G — совпадающие полуокружности;

8. F и G — две окружности;

9. F — треугольник, G — квадрат (с внутренностями).

10. Пусть F и G — два выпуклых многоугольника (с внутренностями), причём стороны F не параллельны сторонам G. Покажите, что их полусумма является многоугольником. Сколько сторон у этого многоугольника? каковы их длины и направления? чему равен его периметр?

11. (Продолжение) Точка f обходит границу многоугольника F против часовой стрелки; точка g обходит границу многоугольника G против часовой стрелки. Как должно быть согласовано между собой движение точек f и g, чтобы их полусумма обходила границу полусуммы фигур F и G?

Вместо полусуммы можно рассматривать сумму двух фигур. Выберем начало координат O и будем складывать векторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$ для $X \in F$, $Y \in G$, и отмечать концы полученных векторов $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$.

12. Покажите, что полусумма фигур подобна их сумме (и вдвое меньше, в соответствии с названием). Как зависит сумма фигур от выбора точки O?

13. Покажите, что следующие свойства выпуклого многоугольника равносильны: (1) он имеет центр симметрии; (2) его можно разрезать на параллелограммы; (3) он есть сумма нескольких отрезков.

14. Дан выпуклый многоугольник F площади s и периметра p. Нарисуйте фигуру $F + \varepsilon K$, где K — единичный круг. Найдите площадь этой фигуры. (Указание: площадь круга радиуса r равна πr^2; ответ является многочленом от ε.)

66. Погрешности

1. Каждое из положительных чисел a и b изменили не более чем на $0{,}01$. Могли ли их (**а**) сумма; (**б**) разность; (**в**) произведение при этом измениться более чем на $0{,}02$?

2. Число x изменили не более чем на $0{,}01$. Может ли значение (**а**) $\sin x$; (**б**) $\cos x$; (**в**) $\operatorname{tg} x$ измениться более чем на $0{,}01$? более чем на 1? (Углы измеряются в радианах.)

3. Сторону квадрата измерили с ошибкой не более чем в 1 см. Всегда ли достаточно этой информации, чтобы определить его площадь с ошибкой не более 1 кв. м?

4. Площадь квадрата измерили с ошибкой не более чем 1 кв. см. Всегда ли достаточно этой информации, чтобы определить длину его стороны с ошибкой не более 1 м? *Погрешностью* приближённой формулы называется модуль разности между левой и правой частями.

5. Докажите, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность формулы $(1+x)^3 \approx 1+3x$ не больше 1% от $|x|$.

6. ...погрешность формулы $1/(1+x) \approx 1 - x$ не больше 1% от $|x|$.

7. ...погрешность формулы $1/(1+x) \approx 1 - x + x^2$ не больше 1% от x^2.

8. ...погрешность формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ не больше 1% от $|x|$.

9. (Продолжение) Докажите, что при $x > 100$ погрешность формулы $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \approx 1/(2\sqrt{x})$ не больше 1% от величины правой части.

10. Докажите, что (**а**) погрешность приближённой формулы $\sin x \approx 0$ не превосходит $|x|$; (**б**) погрешность приближённой формулы $\cos x \approx 1$ не превосходит x^2.

11. Докажите, что $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$ при $0 \leqslant x < \pi/2$.

12. Докажите, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность формулы $\sin x \approx x$ не превосходит 1% от $|x|$.

13. (Продолжение) Докажите, что при $|x| < 0{,}001$ погрешность формулы $\cos x \approx 1 - x^2/2$ не превосходит 1% от x^2.

67. Бесконечно малые

Пусть f и g — две функции. Говорят, что f *бесконечно мала по сравнению с g при $x \to a$*, если для всякого положительного ε неравенство $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$ выполняется во всех точках, достаточно близких к a, то есть существует такое $\delta > 0$ (возможно, зависящее от ε), что $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$

при всех x из множества $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$. (Обратите внимание, что функции f и g не обязательно определены в точке a.)

Формальная запись:

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ ((\forall x\in(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta))\ |f(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|)$$

(здесь $\forall$ читается «для любого», а $\exists$ — «существует»).

1. Рассмотрим величины $1+x^2$, x^2, $\sin x$, x, $\sqrt{|x|}$, $x\sin(1/x)$, $\sin(1/x)$ как функции аргумента x. Укажите все пары f, g этих функций, для которых f бесконечно мала по сравнению с g при $x\to 0$.

Если функция f бесконечно мала по сравнению с g при $x\to a$, обычно пишут «$f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$» (читается: «эф от икс есть о малое от же от икс при икс, стремящемся к а»), хотя это и не вполне корректно: например, $x^2=o(x)$ и $x^3=o(x)$ при $x\to 0$, но не следует заключать отсюда, что $x^2=x^3$!

2. Докажите, что

$$\frac{1}{1-x}=1+x+o(x)$$

при $x\to 0$. (Это означает, что *погрешность* формулы $1/(1-x)\approx 1+x$, то есть разность $1/(1-x)-(1+x)$, бесконечно мала по сравнению с x при $x\to 0$.)

3. Докажите, что $1/(1-x)=1+x+x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$.

4. Найдите приближённые формулы с ошибкой $o(x^2)$ для (**а**) $1/(2-x)$; (**б**) $1/(1+x)$; (**в**) $1/(1+x^2)$ при $x\to 0$.

5. Подберите подходящие коэффициенты a, b, c и докажите, что

$$\frac{1-x}{1+x}=a+bx+cx^2+o(x^2)$$

при $x\to 0$.

6. Докажите, что $\sqrt{1+x}=1+x/2+o(x)$ при $x\to 0$.

7. Найдите приближённую формулу для $\sqrt{1+x}$ с ошибкой $o(x^2)$.

8. Докажите, что (**а**) $\sin x=x+o(x)$ при $x\to 0$; (**б**) $\operatorname{tg} x=x+o(x)$ при $x\to 0$; (**в**) $\cos x=1-x^2/2+o(x^2)$ при $x\to 0$.

9. (Продолжение) Покажите, что в предыдущей задаче можно заменить $o(x)$ на $o(x^2)$ в первых двух формулах и $o(x^2)$ на $o(x^3)$ в третьей формуле.

10. Предполагая известным, что имеется формула $\operatorname{tg} x=x+ax^3+o(x^3)$ (при $x\to 0$) для некоторого числа a, найдите это число. (Указание: $\operatorname{tg} 2x=2\operatorname{tg} x/(1-\operatorname{tg}^2 x)$.)

11. Докажите приближённые формулы, верные при $x\to 0$ (подобрав правильные значения a и b): (**а**) $\sin(\pi/3+x)=a+bx+o(x)$; (**б**) $\cos(\pi/3+x)=a+bx+o(x)$; (**в**) $\operatorname{tg}(\pi/3+x)=a+bx+o(x)$.

12. Школьник на зачёте дал такое определение: $f = o(g)$, если найдётся такое $\delta > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x)| < \varepsilon|g(x)|$ выполнено при всех $x \neq a$, для которых $|x - a| < \delta$. Что он определил на самом деле?

68. Арифметика остатков

Пусть m — целое положительное число. Обозначим через $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ множество $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ *целых чисел по модулю* m (остатков при делении на m) и введём на нём операции сложения и умножения: чтобы сложить (перемножить) два остатка, их нужно сложить (перемножить) и взять остаток при делении на m.

1. Каким днём недели было 25 октября 1917 года? Что произошло в этот день?

2. На какой день недели тринадцатое число приходится с наибольшей вероятностью? (Указание. Если номер года делится на 100, но не делится на 400, то такой год не считается високосным.)

3. (**а**) Составьте таблицы сложения и умножения для множества $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ и выпишите его элементы, являющиеся полными квадратами или полными кубами. (**б**) Та же задача для $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. (**в**) Та же задача для $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов натуральных чисел.

5. (Продолжение) Тот же вопрос для трёх кубов.

Таблицу умножения на a в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ удобно записывать в виде ориентированного графа, где вершины — элементы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, и для каждого x из вершины x в вершину $a \cdot x$ ведёт стрелка (ориентированное ребро).

Пусть для числа $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ выполнено равенство НОД$(a, m) = 1$. Докажите, что

6. в каждую вершину графа умножения на a ведёт ровно одна стрелка;

7. этот граф представляет собой объединение циклов;

8. при простом m все циклы, кроме одного, имеют одинаковую длину;

9. существует целое положительное число n, такое, что $a^n = 1$.

10. Какие из предыдущих утверждений верны, если НОД$(a, m) \neq 1$?

Будем называть элемент a множества $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *обратимым*, если найдётся $b \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: $a \cdot b = 1$. (В этом случае элемент b называют *обратным* к a и обозначают a^{-1}.)

11. Докажите, что определение обратного элемента корректно: ни для какого элемента не существует двух различных обратных.

12. Докажите, что обратимость элемента $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ равносильна тому, что НОД$(a, m) = 1$. (В частности, если p — простое число, то в множестве $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ любой ненулевой элемент обратим.)

Свойство 'a делится на b' записывают также в виде $b \mid a$ ('b делит a').

13. (Малая теорема Ферма) Пусть p — простое число, $p \nmid a$. Тогда $p \mid (a^{p-1} - 1)$. (Часто это утверждение формулируют иначе: «Для любого целого числа a число $a^p - a$ делится на p».)

Определим *функцию Эйлера* $\varphi(n)$ как количество целых положительных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

14. (Теорема Эйлера) Пусть числа a и n таковы, что НОД$(a, n) = 1$. Докажите, что $n \mid (a^{\varphi(n)} - 1)$.

15. (**а**) Пусть числа m и n таковы, что НОД$(m, n) = 1$. Докажите, что $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. (**б**) Как вычислить $\varphi(n)$, зная разложение числа n на простые множители?

Пусть p — простое число, отличное от 2 и 5. Докажите, что

16. существует число вида $11\ldots111$, кратное p;

17. длина периода десятичной дроби $1/p$ делит $p - 1$.

18. Пусть p — простое число, не равное 2. Докажите, что в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (**а**) уравнение $x^2 = a$ имеет не более двух решений; (**б**) есть ровно 2 элемента x, для которых $x = x^{-1}$; (**в**) разрешимость уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равносильна тому, что $a^2 - 4b$ — полный квадрат.

19. (Теорема Вильсона) Докажите, что $p \mid ((p-1)! + 1)$ тогда и только тогда, когда p — простое число.

69. Непрерывность

Функция f называется *непрерывной в точке* a, если она определена в точке a и $f(x) = f(a) + o(1)$ при $x \to a$.

1. Сформулируйте определение непрерывности «в терминах ε-δ».

2. Продолжите: «функция f *разрывна* (не является непрерывной) в точке a, если...»

3. Докажите, что функция $x \mapsto x^2$ непрерывна во всех точках $a \in \mathbb{R}$.

4. Докажите, что функция $x \mapsto 1/x$ непрерывна во всех точках $a \neq 0$. Непрерывна ли она в точке $a = 0$?

5. Докажите, что функции $x \mapsto \sin x$ и $x \mapsto \cos x$ непрерывны во всех точках $a \in \mathbb{R}$.

6. (**а**) Докажите, что если $f(x) = o(1)$ и $g(x) = o(1)$ при $x \to a$, то $f(x) + g(x) = o(1)$ при $x \to a$. (**б**) Докажите, что если $f(x) = o(1)$ при $x \to a$, а функция g ограничена в некоторой окрестности точки a (то есть найдутся такие $\varepsilon > 0$ и C, что $|g(x)| < C$ при всех $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$), то $f(x)g(x) = o(1)$ при $x \to a$. (**в**) Докажите, что если функция f непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.

7. Докажите, что если функции f и g непрерывны в точке a, то их сумма $x \mapsto f(x) + g(x)$ и произведение $x \mapsto f(x)g(x)$ непрерывны в точке a.

8. Докажите, что если функция f непрерывна в точке a, а функция g непрерывна в точке $f(a)$, то их композиция $x \mapsto g(f(x))$ непрерывна в точке a.

9. В каких точках непрерывны функции (**а**) $x \mapsto x^n$ (где $n \in \mathbb{Z}$); (**б**) $x \mapsto \sqrt{x}$; (**в**) $x \mapsto \operatorname{tg} x$?

10. Постройте функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая разрывна во всех целых точках и непрерывна во всех остальных.

11. Рассмотрим *функцию Дирихле*, которая равна нулю в рациональных точках и единице в иррациональных. В каких точках непрерывна эта функция?

12. Постройте функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая непрерывна во всех целых точках и разрывна во всех остальных.

13. (**а**) Существует ли функция, которая непрерывна во всех точках, кроме точек $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ и нуля? (**б**) Существует ли функция, которая была бы непрерывна во всех точках, кроме $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ (в том числе непрерывна в нуле)?

14. Существует ли функция, которая разрывна во всех рациональных точках и непрерывна во всех остальных?

15. Существует ли функция, которая разрывна во всех иррациональных точках и непрерывна во всех остальных?

70. Контрольная работа по материалу первого полугодия

1. Вычислите сумму $\sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k C_n^k$ при любых m и n.

2. Для любых ли трёх множеств A, B, C верно равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$?

3. Приведите пример пятиэлементного множества A, такого что каждый элемент множества A является подмножеством множества A.

4. Назовём $\mathbb{Q}$-отрезком $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ множество $[a, b] \cap \mathbb{Q}$. Верно ли, что для любой последовательности вложенных $\mathbb{Q}$-отрезков существует число, принадлежащее всем этим отрезкам?

5. Даны четыре утверждения:

- $f(x) = o(x)$ при $x \to 2$;
- $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 2$;
- $f(x) = o(x^2 - 4)$ при $x \to 2$;
- $f(x) = o(\sin(1/x))$ при $x \to 2$.

Для каждой пары утверждений выясните, равносильны ли они, и если нет, то какое из них сильнее (если какое-то сильнее, то надо привести пример функции, для которой оно не выполнено, а другое выполнено).

6. Докажите, что $\sin x - \sin a = o(1)$ при $x \to a$ (a — любое число).

7. (Продолжение) Докажите, что $\sin x - \sin a = (x - a)\cos a + o(x - a)$.

8. Школьник на зачёте дал такое определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a:

$$(\exists\varepsilon > 0)\ (\forall\delta > 0)\ ((\forall x \in (a-\delta, a+\delta))\ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon).$$

«Непрерывна» ли при таком определении в каких-либо точках функция $x \mapsto x^2$? функция $x \mapsto \sin(x^2)$? Какое свойство функции описано этим определением?

9. Для уравнения $4x^2 + 5y^2 = z^2$ найдите решение в целых числах, удовлетворяющее условиям $|x|, |y|, |z| > 1000$, НОД$(x, y, z) = 1$.

10. Известно, что $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$. Ограничено ли множество $\{a_n/\sqrt{2n}\}$?

71. Простые числа

Везде в этом листочке буква p обозначает простое число.

1. Докажите, что множество простых чисел бесконечно.

2. (Продолжение) Та же задача для простых чисел вида (**а**) $3k + 2$; (**б**) $4k + 3$; (**в**) $6k + 5$.

3. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел q, для которых число $2q + 1$ — составное.

Число a называется *квадратичным вычетом по модулю* m, если оно является точным квадратом в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. В противном случае оно называется *квадратичным невычетом.*

4. Сколько квадратичных вычетов в множестве $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

При НОД$(a, m) = 1$ определим *символ Лежандра* $\left(\frac{a}{m}\right)$ так:

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет по модулю } m, \\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет по модулю } m. \end{cases}$$

При НОД$(a, m) \neq 1$ положим $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$.

5. Докажите, что для любых a, b выполнено равенство $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

6. Докажите равенство $\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right) = 0$.

7. Сколько решений в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ имеет уравнение $x^2 + y^2 = 1$?

8. (**а**) Докажите, что многочлен степени n с коэффициентами из множества $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ имеет не более n корней в этом множестве. (**б**) Пусть $p \neq 2$. Докажите, что $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} (\text{mod } p)$.

9. Докажите, что если $a^2 + b^2 \equiv 0 (\text{mod } p)$ и p имеет вид $4k + 3$, то $a \equiv 0 (\text{mod } p)$ и $b \equiv 0 (\text{mod } p)$. В частности, число вида $a^2 + 1$ не может иметь простых делителей вида $4k + 3$.

10. Докажите, что множество простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно.

11. (Продолжение) Та же задача для простых чисел вида $3k + 1$.

72. Последовательности и пределы

Говорят, что последовательность $x_0, x_1, \ldots$ *сходится к нулю*, если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, по модулю не превосходят ε.

1. (**а**) Закончите фразу: «Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ сходится к числу a (говорят также *стремится к* a или *имеет предел* a), если для любого положительного $\varepsilon \ldots$». (**б**) Запишите это определение символически: $(\forall\varepsilon > 0) \ldots$ (**в**) Закончите фразу: «Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ не сходится к числу a, если $\ldots$», не используя слово «не».

2. Может ли последовательность не иметь предела? иметь два разных предела? Может ли сходящаяся последовательность не быть ограниченной? ограниченная последовательность не быть сходящейся?

Говорят, что число a является *предельной точкой* последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ содержит бесконечно много членов последовательности.

3. Может ли предел последовательности не быть её предельной точкой? предельная точка не быть пределом? единственная предельная точка не быть пределом? Существует ли последовательность, у которой любое число является предельной точкой?

4. Сходятся ли (к какому-либо пределу) следующие последовательности: (**а**) $x_n = \sin n$; (**б**) $x_n = \operatorname{tg}(1/n)$ $(n > 0)$; (**в**) $x_n = (\sin n)/n$ $(n > 0)$?

5. Докажите, что следующие последовательности сходятся к нулю:
(**а**) $x_n = n/2^n$; (**б**) $x_n = n^{100}/2^n$; (**в**) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

6. Найдите пределы последовательностей:
(**а**) $x_n = \sqrt[n]{2}$ $(n > 1)$; (**б**) $x_n = \sqrt[n]{n}$ $(n > 1)$; (**в**) $x_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$.

7. Найдите предел последовательности $x_n = \sin\big((2 + \sqrt{3})^n \pi\big)$.

8. При каких α сходится последовательность $x_n = \{n\alpha\}$ (фигурные скобки обозначают дробную часть)?

9. Докажите, что если последовательности $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ сходятся к A и B, то последовательности $a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots$ и $a_0 b_0, a_1 b_1, \ldots$ сходятся к $A + B$ и AB. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о пределах разности и частного двух сходящихся последовательностей.

10. Докажите, что (всюду определённая) функция f непрерывна в точке a если и только если для каждой последовательности $a_0, a_1, \ldots$, сходящейся к a, последовательность $f(a_0), f(a_1), \ldots$ сходится к $f(a)$.

11. Докажите, что всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. (Указание: используйте аксиому полноты.)

12. Докажите, что ограниченная последовательность имеет (**а**) предельную точку (указание: если отрезок содержит бесконечно много членов последовательности, то одна из его половин также обладает этим свойством);

(**б**) сходящуюся подпоследовательность (выбросив часть членов, можно сделать последовательность сходящейся).

13. Положим $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/n!$. Докажите, что последовательности $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ сходятся, причём к одному и тому же пределу (числу e, основанию натуральных логарифмов).

14. Известно, что $|a_{i+1} - a_i| < 1/2^i$. Докажите, что последовательность $a_0, a_1, \ldots$ сходится.

15. Докажите, что найдётся число $a > 0$, при котором дробные части всех чисел $a, a^2, a^3, \ldots$ принадлежат отрезку $[1/3, 2/3]$.

73. Свойства непрерывных функций

1. Функция f определена на отрезке $[0, 1]$, причём $f(0) < 0$ и $f(1) > 0$. Докажите, что найдутся такие числа $a, b \in [0, 1]$, что $|a - b| < 0{,}001$, $f(a) \leqslant 0$ и $f(b) \geqslant 0$.

2. Функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, причём $f(0) < 0$, а $f(1) > 0$. Докажите, что найдётся число $\alpha \in [0, 1]$, для которого $f(\alpha) = 0$.

3. Докажите, что возрастающая функция, определённая на отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда она принимает все значения из отрезка $[f(a), f(b)]$.

4. Докажите, что функция, определённая и непрерывная на отрезке, ограничена (все значения функции не превосходят по модулю некоторого числа C). (Указание: если функция не ограничена на отрезке, то она не ограничена на одной из его половин.)

5. Верно ли аналогичное утверждение для интервала?

6. (**а**) Докажите, что определённая и непрерывная на отрезке функция достигает минимума и максимума: если $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, то найдутся такие $m, M \in [a, b]$, что $f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$ для всех $x \in [a, b]$. (**б**) Докажите, что множество значений непрерывной на отрезке функции есть отрезок.

7. Каково может быть множество значений непрерывной на интервале функции?

8. Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет действительный корень.

9. Докажите, что из любого положительного числа можно извлечь корень степени n (где n — целое положительное число).

10. Пусть функция f непрерывно отображает отрезок $[0, 1]$ в себя. Докажите, что f имеет неподвижную точку, то есть существует такая точка x, что $f(x) = x$.

11. Рассмотрим функцию $f(x) = 4x(1 - x)$. Найдите число решений (**а**) уравнения $f(x) = x$; (**б**) уравнения $f(f(x)) = x$; (**в**) системы уравнений

$$\begin{cases} 4x(1-x) = y, \\ 4y(1-y) = z, \\ 4z(1-z) = x. \end{cases}$$

12. Докажите, что любая возрастающая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна хотя бы в одной точке.

13. (Продолжение) Докажите, что множество точек разрыва возрастающей функции конечно или счётно.

14. (Продолжение) Докажите, что для всякого конечного или счётного множества $M \subset \mathbb{R}$ можно найти возрастающую функцию, которая разрывна во всех точках множества M и непрерывна во всех остальных.

74. Комплексные числа и геометрические преобразования

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = a + bi$ называется расстояние от точки (a, b) до нуля, то есть $\sqrt{a^2 + b^2}$; *аргументом* $\arg z$ этого числа — угол между осью абсцисс и направлением на z из начала координат (определённый с точностью до 2π: например, $-\pi/2$ и $3\pi/2$ являются аргументами числа $-i$; аргумент числа 0 не определён).

1. (Напоминание) (**а**) Докажите, что $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. (**б**) Как связаны модули и аргументы чисел z и $\overline{z}$? (**в**) Докажите, что $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, а $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. (**г**) Чему равны действительная и мнимая части комплексного числа с модулем r и аргументом φ? (**д**) Каков геометрический смысл умножения на 2? (**е**) …умножения на i? (**ж**) …умножения на $\cos\varphi + i\sin\varphi$? (**з**) …преобразования $z \mapsto -z$? (**и**) …преобразования $z \mapsto \overline{z}$? (**к**) Докажите, что аргумент произведения двух комплексных чисел равен сумме их аргументов. (**л**) Чему равен аргумент частного двух комплексных чисел?

2. Точка z обходит окружность радиуса 1 с центром в начале координат против часовой стрелки. Нарисуйте траекторию точки (**а**) $2z-1$; (**б**) $\overline{z}$; (**в**) z^2; (**г**) $1/z$; (**д**) $z + 1/z$.

3. (**а**) Как должна двигаться точка z, чтобы точка z^2 обошла единичную окружность против часовой стрелки? (**б**) тот же вопрос для z^3 вместо z^2.

4. Нарисуйте точки z, для которых (**а**) $\arg z = \pi/3$; (**б**) $\arg(z+1) = \pi/3$.

5. Укажите все комплексные числа z, для которых отношение $z/(z-1)$ является (**а**) вещественным; (**б**) чисто мнимым числом.

6. Нарисуйте точки z, для которых (**а**) $\overline{z} = 1/z$; (**б**) $\arg(\overline{z}(z+1)) = \pi/3$.

7. Докажите, что для любых комплексных чисел z и w числа z, $1/\overline{z}$, w, $1/\overline{w}$ лежат на одной окружности.

8. (**а**) Докажите, что различные комплексные числа z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их *простое отношение*

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

вещественно. (**б**) Докажите, что различные комплексные числа z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда их *двойное отношение*

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

вещественно.

Инверсией относительно окружности радиуса r с центром в точке O называется преобразование плоскости, при котором точка X переходит в точку X' луча OX, для которой $OX \cdot OX' = r^2$. (Образ точки O не определён.)

9. Пусть точка O совпадает с началом координат. Как записать преобразование инверсии в координатах? с помощью комплексных чисел?

10. Докажите, что при инверсии любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую (возможно, без одной точки).

11. (**а**) Докажите, что при преобразовании $z \mapsto (z - a)/(z - b)$ любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую (возможно, без одной точки). (**б**) Докажите, что прообраз любой окружности или прямой при этом преобразовании есть окружность или прямая (возможно, без одной точки).

12. (Продолжение) Докажите, что для любых точек A и B и числа $\lambda \neq 1$ множество точек X, для которых отношение расстояний $AX : BX$ равно λ, является окружностью.

13. Докажите, что угол между двумя прямыми или окружностями не изменяется при инверсии.

14. (**а**) Найдите *дробно-линейное* преобразование, то есть преобразование вида $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, переводящее верхнюю полуплоскость $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ в единичный круг (множество комплексных чисел, модуль которых меньше единицы).

(**б**) Найдите дробно-линейное преобразование, переводящее единичный круг в себя, но не оставляющее на месте его центр.

15. Каждую сторону n-угольника продолжили на её длину (за вершину, которая встречается первой при обходе против часовой стрелки). При этом получился правильный n-угольник. Докажите, что исходный многоугольник тоже был правильный.

16. (**а**) На единичной окружности взяты точки a, b, c, d. Докажите, что точка x пересечения прямых ab и cd может быть найдена по формуле

$$\overline{x} = \frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}.$$

(**б**) На единичной окружности даны точки a и b; x — точка пересечения касательных к окружности, проведённых в a и b. Докажите, что

$$x = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

17. (Теорема Паскаля) Точки пересечения продолжений противоположных сторон шестиугольника, вписанного в окружность, лежат на одной прямой.

18. (Теорема Брианшона) Прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около окружности, пересекаются в одной точке.

75. Системы линейных уравнений

1. Используя сложение, вычитание, умножение, равенства и неравенства, а также «и» и «или», запишите условия на коэффициенты a, b, c, d, при которых система

$$\begin{cases} ax+by=0, \\ cx+dy=0 \end{cases}$$

имеет ненулевое (отличное от $(0,0)$) решение.

2. (Продолжение) Запишите условия на коэффициенты системы уравнений

$$\begin{cases} ax+by=e, \\ cx+dy=f \end{cases}$$

при которых она (**а**) не имеет решения; (**б**) имеет ровно одно решение; (**в**) имеет бесконечно много решений.

3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

и точки $O(0,0,0)$, $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$, $A'(a_1,b_1,c_1)$, $B'(a_2,b_2,c_2)$, $C'(a_3,b_3,c_3)$.

(**а**) Докажите, что система имеет ненулевое решение, если и только если векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ лежат в одной плоскости. (Указание: если (x, y, z) — решение системы, то $x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC} = 0$.)

(**б**) Докажите, что система имеет ненулевое решение, если и только если векторы $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$ лежат в одной плоскости. (Указание: если $\overline{v}$ — вектор с координатами (x, y, z), то $a_1x + b_1y + c_1z = (\overline{OA'}, \overline{v})$.)

Пусть дана система из m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Будем называть *элементарными преобразованиями* этой системы уравнений следующие преобразования:

(1) переставить i-ое и j-ое уравнения (для некоторых $1 \leqslant i, j \leqslant m$);

(2) прибавить к i-му уравнению j-ое, умноженное на произвольное число λ (для некоторых $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$; при этом j-ое уравнение не меняется).

4. Докажите, что элементарное преобразование переводит систему уравнений в равносильную ей систему.

5. Докажите, что с помощью последовательности элементарных преобразований можно привести систему к «треугольному виду», т. е. добиться, чтобы в каждом уравнении, начиная со второго, было больше начальных нулевых коэффициентов, чем в предыдущем.

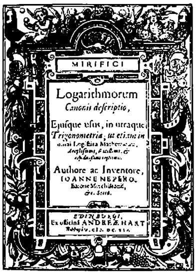
6. Выведите из предыдущей задачи, что всякая система с нулевой правой частью, где уравнений меньше, чем неизвестных, имеет ненулевое решение.

7. (Альтернатива Фредгольма) Пусть фиксированы левые части системы n уравнений с n неизвестными. Докажите, что верно одно из двух:
— при любых правых частях система имеет единственное решение (в частности, при нулевых правых частях система имеет только нулевое решение);
— при некоторых правых частях система не имеет решений, а при некоторых других (в том числе при нулевых) имеет бесконечно много решений.

8. В граничных $4n - 4$ клеточках квадрата $n \times n$ расставлены числа. Докажите, что всегда можно единственным образом расставить во внутренних клетках этого квадрата числа так, чтобы каждое число во внутренней клетке было равно среднему арифметическому чисел в четырёх соседних клетках (слева, справа, сверху, снизу).

76. Натуральные логарифмы: тезисы вводной лекции

1. Лень как двигатель прогресса. Как умножать, делить и особенно извлекать квадратный корень быстрее?


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
EDINBURGI,

Титульный лист книги Джона Непера о логарифмах

2. Частичный ответ: составим таблицу

1	2	4	8	16	...	2^i	...
0	1	2	3	4	...	i	...

(Штифель, 1554). Но как быть с нестепенями двойки?

3. Выберем число, близкое к единице (Непер, 1614, Бриггс, Бюрги, 1620). Например, 1,0001, как Бюрги (у Непера было 0,9999999).

1	1,0001	1,00020001	1,000300030001	...	$1{,}0001^i$	...
0	1	2	3	...	i	...

Удобство вычисления: каждый раз прибавляется одна десятитысячная от того, что уже есть. (Шаг = текущее значение/10000.)

4. Сколько нужно шагов, чтобы дойти в верхнем ряду до двойки? [Заведомо достаточно 10000, поскольку каждый раз прибавляется как минимум 0,001.] В нижнем ряду появляются большие числа, поэтому поделим всё на 10000.

1	1,0001	1,00020001	1,000300030001	...	$1{,}0001^i$	...
0	0,0001	0,0002	0,0003	...	$i/10000$	...

5. Против 1 в нижней строке в верхней стоит $(1{,}0001)^{10000}$, то есть $(1+1/n)^n$ при $n = 10000$. [Когда-то мы доказывали, что $(1+1/n)^n$ сходится и называли предел e.]

6. Геометрическая интерпретация. Разобьём площадь под гиперболой на кривые прямоугольники точками с абсциссами $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$, где $\alpha = 1{,}0001$. Каждый имеет площадь между 1/10001 и 1/10000. Следствие: площадь до $1{,}0001^{10000}$ меньше 1, а до $1{,}0001^{10001}$ — больше.

7. Если через e обозначить то число, до которого площадь равна единице, то $(1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}$. Следствие: обе последовательности сходятся к e, поскольку разность меньше $1/n$ от e.

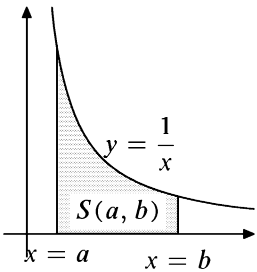
8. Назад к практике: логарифмическая линейка, таблицы логарифмов, «удвоение жизни астрономов» (Лаплас). «Приведение к виду, удобному для логарифмирования».

9. Сложение скоростей в теории относительности:

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv}$$

[Скорости измеряются в долях скорости света, так что $u, v, u \oplus v$ лежат в интервале $(-1, 1)$.] Постройте таблицу для быстрого сложения скоростей в теории относительности, аналогичную таблице логарифмов (операция $\oplus$ в верхней строке должна соответствовать сложению в нижней строке).

77. Натуральные логарифмы



Рассмотрим фигуру, ограниченную осью абсцисс, гиперболой $y = 1/x$ и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (считаем, что $a < b$). Её площадь обозначим $S(a, b)$. (Научное название: интеграл от a до b функции $x \mapsto 1/x$; обозначение: $\int_a^b \frac{dx}{x}$.)

1. Как изменится площадь этой фигуры, если (при тех же a и b) заменить график $y = 1/x$ на график $y = 2/x$?

2. Докажите, что $S(1,2) = S(2,4)$.

3. Докажите, что $S(1,9) = 2S(1,3)$.

4. Докажите, что если разрезать листок с графиком $y = 1/x$ вертикальными прямыми, абсциссы которых образуют геометрическую прогрессию, то область между графиком и осью абсцисс поделится на равные по площади части.

5. Докажите, что $S(a, b)$ зависит только от отношения b/a, а не от самих значений a и b, так что $S(a, b) = S(1, b/a)$.

Величину $S(1, x)$ называют *натуральным логарифмом* числа x и обозначают $\ln x$. (Пока что она определена при $x > 1$).

6. Докажите, что при $a, b > 1$ выполнено равенство: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

7. Докажите, что при $a, b > 1$ и $a < b$ выполнено равенство: $\ln(b/a) = \ln b - \ln a$.

8. Как нужно определить $\ln x$ при $0 < x < 1$, чтобы равенства двух предыдущих задач были выполнены при любых положительных a и b?

9. Докажите, что $\ln(\sqrt{a}) = (\ln a)/2$ (при положительном a).

10. Найдите формулу для $\ln(\sqrt[3]{a})$.

11. Точка движется по оси абсцисс, удаляясь от начала координат, причём скорость её пропорциональна расстоянию до начала координат. В момент $t = 0$ координата точки равна 1 и скорость её равна 1. Докажите, что координата точки станет равной A к моменту времени $\ln A$.

12. Мы двигаем точку по оси абсцисс против силы, которая убывает обратно пропорционально расстоянию до начала координат, и на расстоянии r равна $-1/r$. Найти работу, которую надо совершить, чтобы увеличить координату от A до B.

13. Докажите, что $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

14. Докажите, что $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$.

15. Докажите, что $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1$.

16. Докажите, что функция $x \mapsto \ln x$ непрерывна.

17. Докажите, что при любом фиксированном $a > 0$ имеет место приближённая формула $\ln(a + h) = \ln a + \frac{h}{a} + o(h)$ при $h \to 0$.

18. Докажите, что $\ln e = 1$, где e определяется как предел $(1 + 1/n)^n$ при $n \to \infty$.

19. Докажите, что $\ln e^x = x$ при целых и не только целых x (и потому число e не зря именуется основанием натуральных логарифмов).

20. Докажите, что последовательность

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

монотонна и ограничена.

78. Производная

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a. Число A называют *производной* функции f в точке a, если

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) + o(x - a)$$

при $x \to a$.

1. Сформулируйте это определение «на ε-δ-языке»: число A называется производной функции f в точке A, если для всякого $\varepsilon > 0$...

2. Пусть $f(x) = x^2$ и $a = 1$. (**а**) Найдите значение производной. (**б**) Нарисуйте графики для $f(x)$ и $f(a) + A \cdot (x - a)$ и покажите на графике «погрешность» $o(x - a)$.

3. Докажите, что производная определена однозначно: два разных числа не могут быть производными одной и той же функции в одной и той же точке.

Производная функции f в точке a обозначается $f'(a)$. Функция, имеющая производную, называется *дифференцируемой* (в соответствующей точке). Функция $a \mapsto f'(a)$, определённая в тех точках, где f дифференцируема, называется *производной функцией*.

4. (**а**) Докажите, что всякая дифференцируемая в точке a функция непрерывна в этой точке. (**б**) Приведите пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая непрерывна во всех точках, но не всюду дифференцируема.

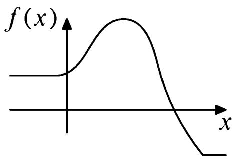
5. Производную называют также «отношением бесконечно малого приращения функции к бесконечно малому приращению аргумента», «скоростью изменения функции», «угловым коэффициентом касательной к графику функции». Объясните смысл этих названий.

6. Докажите, что если производная функции f в точке a положительна, то найдётся такое $\varepsilon > 0$, что все значения функции на интервале $(a, a+\varepsilon)$ больше $f(a)$, а все значения функции на интервале $(a-\varepsilon, a)$ меньше $f(a)$.

7. (Принцип Ферма) «В точке локального максимума или минимума производная равна нулю». Дайте точную формулировку этого утверждения и докажите его.

8. Верно ли обратное утверждение (если производная в точке равна нулю, то в этой точке имеется локальный минимум или максимум)?

9. График функции f изображён на рисунке. (**а**) В каких точках эта функция дифференцируема? (**б**) Нарисуйте примерный график производной. (**в**) Покажите на рисунке, в каких точках производная больше 1. (**г**) Где производная функция возрастает и где убывает?



10. Нарисуйте примерный график функции g, производная которой равна функции f из предыдущей задачи.

11. Найдите производную функции f в точке a, если $f(x) = x^n$ (где n — целое положительное число).

12. ...если $f(x) = 1/x$.

13. ...если $f(x) = \sqrt{x}$.

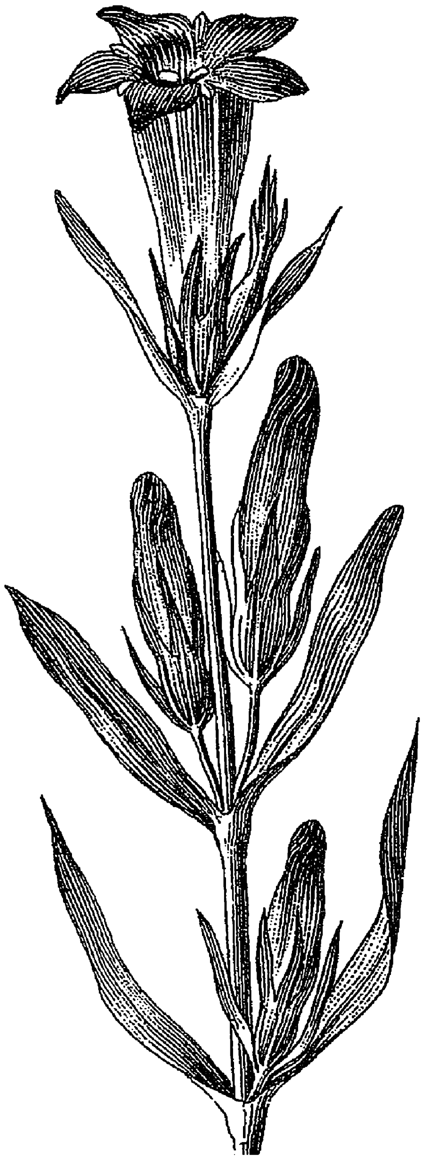
14. ...если $f(x) = \sin x$.

15. Найдите максимальное значение $x^2(4-x)$ при $x \in [0, 4]$.

16. Известно, что функция f дифференцируема в точке a и $f'(a) > 0$. Можно ли утверждать, что функция f возрастает на некотором интервале, содержащем точку a?

17. Может ли непрерывная на всей прямой функция не быть дифференцируемой ни в одной точке?

79. Системы линейных уравнений (вариант 1)[4]



1. На отрезке $[0, 1]$ отмечено несколько точек, включая его концы, причём каждая отмеченная точка (кроме концов отрезка) находится ровно посередине между двумя другими отмеченными точками. Докажите, что координаты всех отмеченных точек рациональны.

2. (Продолжение) Как велики могут быть знаменатели этих рациональных чисел? Могут ли они, скажем, быть больше 10^{1000}, если точек всего 10?

3. На плоскости отмечены несколько синих и зелёных точек, причём каждая синяя точка является серединой отрезка, соединяющих какие-то две из отмеченных точек (любого цвета). Докажите, что если все зелёные точки лежат внутри некоторого выпуклого многоугольника, то и все синие точки там лежат. (Таким образом, если натянуть резинку на гвозди, вбитые в зелёных точках, то все синие точки будут внутри.)

4. Докажите, что если координаты (обе: абсцисса и ордината) всех зелёных точек рациональны, то и координаты всех синих точек рациональны.

5. Продолжим стороны пятиугольника $ABCDE$ на расстояния, равные их длинам: сторону AB за точку B до точки B', сторону BC за точку C до точки C', …, сторону EA за точку A до точки A'.

[4]Этот сюжет имеет много интересных вариантов развития. Мы изготовили несколько разных листков и выдавали разным школьникам разные листки (в случайном порядке).

Докажите, что по точкам A', B', C', D', E' можно однозначно восстановить исходный пятиугольник.

6. (Продолжение) Докажите, что если $A'B'C'D'E'$ — правильный пятиугольник, то и исходный пятиугольник был правильным.

7. (Продолжение) Докажите аналогичные утверждения для n-угольников при произвольном n.

80. Системы линейных уравнений (вариант 2)

1. Имеется набор из $2n+1$ гирь с целыми (положительными) весами. Если выбросить любую гирю, то оставшиеся гири можно разделить на две кучи равного веса по n гирь. Докажите, что все гири равного веса.

2. (Продолжение) Докажите это же утверждение для гирь произвольного (не обязательно целого) веса.

3. Имеется набор из $2n+1$ гирь. Если выбросить любую гирю, то оставшиеся гири можно разделить на две кучи равного веса (не обязательно с равным числом гирь). Докажите, что все гири равного веса.

4. Про набор из $nk+1$ чисел известно, что если выбросить из него любое число, то оставшиеся можно разбить на n наборов по k чисел с одинаковыми суммами. Докажите, что все числа в наборе равны.

5. (Продолжение) Решите эту же задачу, если n наборов с одинаковыми суммами могут содержать разное количество чисел.

81. Системы линейных уравнений (вариант 3)

1. В квадратной таблице $n \times n$ записаны числа, причём каждое число, стоящее внутри таблицы, равно среднему арифметическому четырёх своих соседей. Докажите, что если все числа у края таблицы (их $4n-4$) неотрицательны, то и все числа в таблице неотрицательны.

2. (Продолжение) Докажите, что если все числа у края таблицы равны нулю, то и все числа в таблице равны нулю.

3. (Продолжение) Докажите, что если все числа у края таблицы рациональны, то и все числа в таблице рациональны.

4. (Продолжение) Докажите, что для произвольных чисел у края таблицы существует единственное заполнение внутренней части таблицы, при котором каждое число равно среднему арифметическому четырёх соседей.

5. (Законы Кирхгофа) Пусть имеется электрическая цепь из сопротивлений — граф, вершины которого являются контактами, а рёбра сопротивлениями. (Предполагается, что граф связен, то есть из любой его вершины можно пройти по рёбрам в любую другую.) К двум его вершинам присоединили источник напряжения; одна имеет потенциал 0, другая — U. Считая потенциалы всех остальных вершин неизвестными, составьте уравнения, исходя из условий «сумма всех токов, втекающих в вершину, равна нулю» (для всех вершин, кроме выделенных двух). Докажите, что эта система имеет единственное решение.

6. Докажите, что это решение соответствует минимуму выделяемой в сопротивлениях энергии. (Для любых значений переменных определим выделяемую энергию как сумму $(U_1 - U_2)^2/R_{12}$, по всем парам вершин, где U_1 и U_2 — потенциалы в вершинах пары, а R_{12} — сопротивление между ними.)

7. Определите строго понятие «сопротивление между двумя вершинами» и докажите, что это сопротивление не уменьшится, если увеличить сопротивление одного из рёбер графа, оставив остальные неизменными.

82. Системы линейных уравнений (вариант 4)

1. Двое играют в игру. Таблица 2×2 заполнена звёздочками. За один ход можно заменить одну из звёздочек на число. Когда вся таблица оказывается заполнена, её интерпретируют как набор коэффициентов системы однородных линейных уравнений. Если система имеет нетривиальное решение, то выигрывает первый, иначе выигрывает второй. Кто имеет выигрышную стратегию?

2. Тот же вопрос для таблицы 3×3.

3. Тот же вопрос для таблицы произвольного нечётного размера.

4. Тот же вопрос для таблицы произвольного чётного размера.

5. Тот же вопрос для таблицы произвольного размера и игры, в которой первый стремится, чтобы нетривиального решения не было.

83. Системы линейных уравнений (вариант 5)

1. Таблица из десяти строк и одиннадцати столбцов заполнена целыми числами. Докажите, что можно так вычеркнуть некоторые (не все) столбцы, чтобы сумма чисел в каждой строке стала бы чётной.

2. Имеется несколько лампочек, которые могут быть включены и выключены, и несколько выключателей. Каждый выключатель отвечает за некоторую группу лампочек: при изменении его положения все лампочки этой группы меняют состояние (выключенные включаются и наоборот). Найдите число возможных комбинаций лампочек, если они образуют прямоугольник $m \times n$, а $m + n$ выключателей соответствуют m строкам и n столбцам этого прямоугольника.

3. (Продолжение) Докажите, что число возможных комбинаций лампочек (при любом распределении лампочек по выключателям) есть степень двойки.

4. В некоторых клетках прямоугольной таблицы записаны звёздочки; в остальные надо поставить числа ± 1 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце (где есть числа) произведение равнялось 1. Докажите, что число таких расстановок есть степень двойки.

84. Правила дифференцирования

1. Пусть функции f и g определены в окрестности точки a и дифференцируемы в точке a. (**а**) Докажите, что функция $f+g\colon x \mapsto f(x)+g(x)$ дифференцируема в точке a (и найдите производную). (**б**) Тот же вопрос для функции $5f-7g+11$.

2. (Правило Лейбница) Пусть функции f и g определены в окрестности точки a и дифференцируемы в точке a. Докажите, что функция h — произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируема в точке a и $h'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

3. (Производная «сложной функции») Пусть функция f определена в окрестности точки a и дифференцируема в этой точке, а функция g определена в окрестности точки $f(a)$ и дифференцируема в точке $f(a)$. Покажите, что их композиция — функция $h\colon x \mapsto g(f(x))$ — (**а**) определена в окрестности точки a; (**б**) дифференцируема в точке a, причём выполнено равенство $h'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)$ (в правой части стоит произведение производной функции g в точке $f(a)$ и производной функции f в точке a; обе эти производные существуют по условию).

4. Пусть функция f определена в окрестности точки a, дифференцируема в точке a и $f(a)\neq 0$. Покажите, что функция $g\colon x\mapsto 1/f(x)$ определена в окрестности точки a, и найдите её производную. (Указание: можно воспользоваться предыдущей задачей, а можно и не пользоваться.)

5. Сформулируйте и докажите такое правило дифференцирования частного (чётко указав все предположения): если $h(x)=f(x)/g(x)$, то

$$h'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(запомнить можно так: в знаменателе пишется g^2, в числителе сначала g, а потом всё остальное).

6. Покажите, что правила дифференцирования произведения и частного согласованы: дифференцирование функций $f(x)$ и $(f(x)/g(x))\cdot g(x)$ не приводит к двум разным результатам.

Найдите $f'(a)$ (для произвольной точки a), если $f(x)$ равно:

7. $(2x+1)^3$ (двумя способами: раскрыв скобки и с помощью формулы производной сложной функции);

8. $x\sin(x)$;

9. x^{-10};

10. $\operatorname{tg} x$;

11. $\sin^2 x$;

12. $\cos^2 x$ (почему в двух последних задачах ответы отличаются знаком?);

13. $\sin(x^2)$;

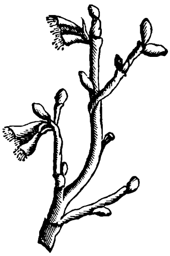
14. $\sin(\cos x)$.

15. Проверьте, что при дифференцировании обеих частей тригонометрического тождества $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ получается одно и то же (как и должно быть).

16. Та же задача для тождества $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

17. (**а**) Предполагая, что функция arcsin дифференцируема во всех точках интервала $(-1, 1)$, найдите её производную. (Указание: используйте тождество $\sin(\arcsin x) = x$.) (**б**) Та же задача для функции arccos. (**в**) Та же задача для функции arctg.

85. Формула Крамера



Определителем матрицы $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

называется знакопеременная сумма

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)},$$

где суммирование происходит по всем перестановкам σ чисел $1, 2, \dots, n$, а $\epsilon(\sigma)$ — знак перестановки σ (1, если перестановка чётная, и -1 иначе).

1. (**а**) Напишите явную формулу (без знака суммы) для определителя матриц 2×2 и 3×3. (**б**) Определитель является многочленом от n^2 переменных (элементов матрицы). Какова степень этого многочлена? Сколько в нём членов? Сколько членов содержат (скажем) $a_{1,1}$? (**в**) Все элементы матрицы равны единице. Чему равен её определитель? (**г**) Как изменится определитель, если удвоить все элементы матрицы? (**д**) ...если изменить знак всех элементов её первой строки? (**е**) Какое минимальное число ненулевых элементов должно быть в матрице с ненулевым определителем?

2. (Поведение при элементарных преобразованиях) (**а**) Как изменится определитель матрицы, если переставить две строки (или два столбца)? (**б**) Как изменится определитель матрицы, если все элементы одной из её строк умножить на одно и то же число λ? (**в**) Докажите, что если у матрицы есть две одинаковые строки, то её определитель равен нулю. (**г**) Как изменится определитель матрицы, если к одной её строке прибавить другую (как это делается при решении систем линейных уравнений)? (д) Как изменится определитель матрицы, если симметрично отразить её относительно средней линии или диагонали? (е) Докажите, что определитель *верхнетреугольной* матрицы ($a_{i,j} = 0$ при $i > j$) равен произведению диагональных элементов.

3. Найдите и разложите на линейные множители (с комплексными коэффициентами) определители матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. Как могло бы выглядеть аналогичное разложение для матрицы большего размера?

4. В формуле для определителя матрицы каждое произведение включает в себя ровно один элемент первого столбца. Сгруппировав слагаемые и вынеся эти элементы за скобки, получим формулу

$$\det A = a_{1,1} \cdot (A_{1,1}) + a_{2,1} \cdot (A_{2,1}) + \ldots,$$

где через $A_{i,1}$ обозначена сумма коэффициентов при $a_{i,1}$. Найдите формулу для $A_{i,1}$. (Указание: с точностью до знака это определители некоторых матриц; чтобы понять, каких, рассмотрите случай матриц 2×2 и 3×3.)

5. Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными. Запишем коэффициенты левых частей уравнений в матрицу $n \times n$. Докажите, что определитель этой матрицы не равен нулю тогда и только тогда, когда система линейных уравнений имеет ровно одно решение при любых правых частях.

6. (Формула Крамера) Пусть матрица A системы уравнений имеет ненулевой определитель, а матрица A_i получается из A заменой i-го столбца на столбец из правых частей. Докажите, что набор

$$\left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_n}{\det A} \right)$$

является (единственным) решением системы.

86. Многочлены и комплексные числа

Основная теорема алгебры утверждает, что всякий многочлен с комплексными коэффициентами (кроме констант) имеет хотя бы один комплексный корень.

1. Докажите, что всякий многочлен с комплексными коэффициентами разлагается на линейные множители (с комплексными коэффициентами).

2. Разложите на линейные множители многочлены (**а**) $x^3 - 1$; (**б**) $x^4 - 1$; (**в**) $x^5 - 1$; (**г**) $x^6 - 1$.

3. Докажите, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами. Найдите такое разложение для многочленов из предыдущей задачи.

4. Выведите из предыдущей задачи, что всякий многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

5. Докажите, что многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ не делится ни на какой многочлен с рациональными коэффициентами (не считая случая, когда делитель или частное — константа).

6. Докажите, что разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители единственно с точностью до порядка множителей и числовых коэффициентов при них.

7. Сформулируйте и докажите теорему Виета для многочленов третьей и четвёртой степени (аналогичную теореме о сумме и произведении корней квадратного трёхчлена).

8. Составляя программу, хитрый Лёня проверял равенство треугольников со сторонами a, b, c и d, e, f с помощью условия

$$(a+b+c=d+e+f)\ \textbf{and}\ (ab+ac+bc=de+df+ef)\ \textbf{and}\ (abc=def).$$

Прав ли он?

9. Найдите многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий корень $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

10. Найдите многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, имеющий корень $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

11. Уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет три комплексных корня z_1, z_2 и z_3. Найдите (выразите через p и q) величину $(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_3)^2(z_1 - z_3)^2$. (Она называется *дискриминантом* кубического уравнения.) Что случается с уравнением, когда дискриминант обращается в нуль?

12. На комплексной плоскости нарисован правильный k-угольник. Докажите, что значение любого многочлена P степени меньше k в центре k-угольника равно среднему арифметическому значений многочлена P в вершинах k-угольника. Верно ли это, если степень P больше или равна k?

13. Рассмотрим значения некоторого многочлена P в точках некоторого круга C. Докажите, что P достигает наибольшего по модулю значения в некоторой точке граничной окружности круга C.

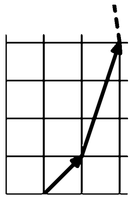
14. (**а**) Представьте многочлен $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ как $z^2P(z + 1/z)$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. (**б**) Каковы корни многочлена P? (**в**) Вычислите $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{2\pi}{5}$.

15. (Продолжение) (**а**) Докажите, что числа $\cos\frac{\pi}{7}$, $-\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$ являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами. (**б**) Вычислите $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$. (**в**) Вычислите $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$.

16. Используя формулу для суммы $1 + z + \ldots + z^k$, найдите формулу для $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos k\alpha$.

17. (Продолжение) Найдите формулы для сумм $z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + kz^k$ и $\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \ldots + k\cos k\alpha$.

18. Найдите предел $(1 + i/n)^n$ при $n \to \infty$. (Предел — точка, расстояние до которой стремится к нулю.)



19. Покажите, что ломаную на рисунке можно неограниченно продолжать так, чтобы её вершины были в узлах клетчатой бумаги, углы при всех вершинах были равны, а длины сторон образовывали геометрическую прогрессию.

20. (**а**) Можно ли найти такое натуральное $n > 0$, что $z^n = 1$, если $z = (3 + 4i)/5$? (**б**) Докажите, что отношение $\operatorname{arctg}(\frac{4}{3})/\pi$ иррационально.

Экзамен за 10 класс

Экзамен за 10 класс был устным. В отличие от предыдущего экзамена, существенная часть в этот раз была теоретической. В начале экзамена школьник получал билет, в который входили входили три вопроса по обязательным листкам (реально это были небольшие части вопросов из приводимого ниже списка) и один вопрос по темам лекций (см. главу «Популярные лекции по математике») или дополнительному листку (этот вопрос выбирался из списка, составленного школьником). После ответа на вопрос школьник получал также несколько задач (на усмотрение преподавателя); примеры задач приведены ниже. Более сложные задачи отмечены звёздочкой.

Вопросы по обязательным листкам

1. Биномиальные коэффициенты (число подмножеств). Формула с факториалами. Треугольник Паскаля (рекуррентная формула для C_n^k; её комбинаторное доказательство). Бином Ньютона. Сумма биномиальных коэффициентов с одинаковыми знаками и с чередованием знаков (комбинаторное доказательство; вывод из бинома Ньютона).

2. Перестановки. Произведение (композиция) перестановок. Представление перестановки в виде произведения непересекающихся циклов. Чётность перестановки. Чётность композиции. Чётных и нечётных перестановок одинаковое число. Представление перестановки в виде произведения транспозиций; в виде произведения транспозиций соседних элементов.

3. Множества. Объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Ассоциативность симметрической разности. Формула включения – исключения.

4. Функции. Биекции. Равномощность. Биекции между $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. Равномощность отрезка и интервала, отрезка и прямой, треугольника и квадрата.

5. Счётные множества. Счётность объединения счётного числа счётных множеств. Счётность множества алгебраических чисел. Несчётность множества всех бесконечных двоичных последовательностей. Несчётность множества всех подмножеств счётного множества.

6. Представление чисел на интервале $(0, 1)$ с помощью бесконечных двоичных дробей (с использованием аксиомы полноты). Равномощность интервала $(0, 1)$ и множества всех бесконечных двоичных последовательностей. Равномощность прямой и плоскости.

7. Теорема Кантора (множество всех подмножеств множества X не равномощно никакому подмножеству множества X). Теорема Кантора – Бернштейна.

8. Аксиома полноты (существование разделяющего числа). Точная верхняя грань, её существование для ограниченного множества. Принцип вложенных отрезков (вывод из аксиомы полноты). Доказательство аксиомы полноты для бесконечных двоичных последовательностей со словарным (лексикографическим) порядком.

9. Приближённая формула для $\frac{1}{1-x}$ с точностью $o(x)$ при $x \to 0$. Смысл записи $o(x)$. Приближённая формула для $\sqrt{1+x}$ с точностью $o(x)$ при $x \to 0$. Приближённые формулы для $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ с точностью $o(x^2)$ при $x \to 0$. Приближённые формулы для $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ с точностью $o(x-a)$ при $x \to a$.

10. Непрерывные функции. Непрерывность функции x^n при целых n. Непрерывность тригонометрических функций ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$). Ограниченность функции в окрестности точки непрерывности.

11. Непрерывность суммы и разности непрерывных функций. Непрерывность произведения непрерывных функций. Непрерывность частного непрерывных функций. Непрерывность композиции непрерывных функций. Примеры всюду определённых функций, непрерывных лишь в нецелых точках, лишь в целых точках, всюду разрывных, разрывных лишь в рациональных точках.

12. Теорема о промежуточном значении. Равносильность утверждения этой теоремы и непрерывности для монотонной функции.

13. Ограниченность непрерывной функции на отрезке. Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нём максимума и минимума.

14. Предел последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Существование предела ограниченной монотонной последовательности. Предел суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей.

15. Предельные точки. Эквивалентное определение предельной точки как предела подпоследовательности. Существование предельной точки и сходящейся подпоследовательности для ограниченной последовательности.

16. Эквивалентное определение непрерывности с помощью сходящихся последовательностей.

17. Последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Существование и совпадение пределов.

18. Целые числа. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя.

19. Простой делитель произведения является делителем одного из сомножителей. Основная теорема арифметики.

20. Решение уравнения $ax + by = c$ в целых числах. Критерий существования решения, общая формула для решений.

21. Арифметика остатков: определение и свойства операций над остатками. Обратимость остатков, взаимно простых с модулем. Малая теорема Ферма. Теорема Эйлера. Формула для функции Эйлера. Теорема Вильсона.

22. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Бесконечность множества простых чисел вида $4k + 3$ и вида $6k + 5$.

23. Квадратичные вычеты и невычеты по простому модулю, их количество. Символ Лежандра. Закон умножения для символа Лежандра. Теорема: $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} (\mathrm{mod}\ p)$. Все нечётные простые делители суммы двух взаимно простых квадратов имеют вид $4k + 1$.

24. Комплексные числа. Сложение и умножение комплексных чисел, их свойства. Ненулевое комплексное число имеет единственное обратное. Сопряжённое число. Сопряжение суммы и произведения. Геометрический смысл прибавления комплексного числа (сдвиг), сопряжения (симметрия), умножения на комплексное число (поворотная гомотетия).

25. Модуль и аргумент комплексного числа. Модуль и аргумент произведения и частного. Двойное отношение четырёх комплексных чисел. Свойство «лежать на одной прямой или окружности» и двойное отношение. Инверсия и обращение комплексных чисел. Поведение двойного отношения при инверсии.

26. Дробно-линейные преобразования. Композиция двух дробно-линейных преобразований есть дробно-линейное преобразование. Сохранение двойного отношения при дробно-линейном преобразовании.

27. Определение натурального логарифма для $x > 1$ как «площади» под графиком функции $y = 1/x$. Определение натурального логарифма для $0 < x \leqslant 1$. Непрерывность логарифма. Формулы для логарифма произведения и логарифма частного. Неравенства $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$ (при

$x \notin [-1, 0]$). Приближённая формула для $\ln(a + h)$ с точностью $o(h)$ при $h \to 0$. Свойство натурального логарифма $\ln e = 1$ (где $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$).

28. Определение производной и её геометрический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции.

29. Принцип Ферма.

30. Формулы для производной суммы, разности, произведения и частного двух функций. Формула для производной сложной функции.

31. Система однородных линейных уравнений, где неизвестных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение. Системы линейных уравнений, где число неизвестных равно числу уравнений. Альтернатива Фредгольма: такая система либо имеет единственное решение при любых правых частях, либо при некоторых правых частях имеет бесконечно много решений, а при прочих не имеет решений.

32. Многочлены. Степень многочлена. Произведение ненулевых многочленов не равно нулю. Теорема о делении многочленов с остатком. Теорема Безу. Многочлен степени n (с коэффициентами в $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \ldots$) имеет не более n корней. Для произвольного выбора значений в n точках существует единственный многочлен степени не выше $n-1$, принимающий в этих точках заданные значения.

33. Основная теорема алгебры (без доказательства). Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

34. Теорема Виета (выражение коэффициентов многочлена через его корни).

Примеры задач

1.* Докажите, что любая перестановка элементов прямоугольной матрицы есть композиция трёх перестановок: первая и третья внутри строк, вторая внутри столбцов.

2.* Существует ли многочлен от двух переменных, который всюду положителен, но точная нижняя грань его значений равна нулю?

3. Докажите, что если $a + b + c > 0$ и $a - b + c < 0$, то квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет (действительный) корень.

4.* Докажите, что любое монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками непрерывно (в обе стороны).

5. Докажите, что если две непрерывные функции определены на всей прямой и совпадают во всех рациональных точках, то они совпадают всюду.

6.* Известно, что функция f определена и непрерывна на всей прямой, при этом $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Докажите, что эта функция есть умножение на константу.

7. Можно ли доопределить функцию $f(x)$ в точке a так, чтобы она стала непрерывной, если $f(x)=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})/(x-a)$?

8. Можно ли доопределить функцию $f(x)$ в нуле так, чтобы она стала непрерывной, если $f(x)=\sin 3x/\sin 5x$?

9. Гражданин пошёл в сберкассу платить за квартиру, но вместо этого положил деньги на счёт с 5% годовых. Можно ли утверждать, что его долг (включая пеню в 1% исходной суммы за каждый день просрочки) будет о-малым от суммы на счёте при стремлении времени к бесконечности?

10. Укажите коэффициенты a, b, c, для которых $\frac{1}{1-2x+x^2}=a+bx+ + cx^2+o(x^2)$ при $x\to 0$.

11. Разложите по степеням x (с точностью $o(x)$) расстояние от точки $(0,2)$ до точки $(0,x)$.

12. Разложите по степеням x (с точностью $o(x)$) расстояние от точки $(-1,1)$ до точки $(0,x)$.

13. Разложите по степеням x (с точностью $o(x)$) длину ломаной, соединяющей точки $(-1,1)$, $(0,x)$ и $(2,2)$.

14. Разложите по степеням x (с точностью $o(x)$) длину ломаной, соединяющей точки $(-1,1)$, $(0,x)$ и $(1,2)$.

15.* Треугольник имеет стороны a, b, c. Сторону c удлиннили на x; пусть $S(x)$ — площадь получившегося треугольника. Разложите $S(x)$ по степеням x с точностью $o(x)$. В каком случае коэффициент при x равен 0?

16. Найдите предел последовательности, заданной соотношением $x_{n+1}= =\sqrt{3x_n}$ ($x_0>0$ дано).

17. Сходящаяся последовательность имеет бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Найдите её предел.

18. Может ли сходящаяся последовательность перестать быть сходящейся, если изменить конечное число её членов?

19. Может ли сходящаяся последовательность стать сходящейся к другому пределу, если изменить все её члены с нечётными номерами?

20. Может ли сходящаяся последовательность иметь расходящуюся (т. е. не сходящуюся) подпоследовательность?

21.* Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего членов?

22. Все члены последовательности положительны, при этом сумма любого их числа не превосходит 1. Докажите, что её предел существует и равен 0.

23.* Найдите предел последовательности $a_n=(1+1/n^2)^n$.

24. Найдите предел последовательности, заданной соотношением $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$, если $x_0 > 0$.

25.* Докажите, что последовательность, заданная условиями $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (x_n + 3/x_n)/2$, сходится.

26.* Существует ли последовательность, предельными точками которой являются числа вида $1/n$, $n \in \mathbb{Z}$ (и только они)?

27.* Найдите предел последовательности $\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$.

28.* Найдите предел последовательности $\sqrt[3]{n^3 + n} - n$.

29. Разбейте отрезок на счётное число равномощных друг другу частей.

30. Счётно ли множество бесконечных последовательностей нулей и единиц, в которых число нулей конечно?

31. Как доопределить функцию $x \operatorname{ctg} x$ до непрерывной в нуле?

32.* (Лемма Гаусса) В произведении двух многочленов с целыми коэффициентами все коэффициенты делятся на простое число p. Докажите, что все коэффициенты одного из исходных многочленов тоже делятся на p.

33.* Многочлен с целыми коэффициентами равен единице в трех различных целых точках. Докажите, что он не имеет целых корней.

34. Вычислите сумму $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{100}$.

35. Вычислите $(\sqrt{3} + i)^{30}$.

36. Где находится точка пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки u, v и w комплексной плоскости?

37. При каких a и b преобразование $z \mapsto az + b$ является поворотом на 45° вокруг точки $1 = 1 + 0i$?

38.* Найдите все корни уравнения $z^5 = 1$ (в ответе могут остаться квадратные корни, но не должно быть синусов и косинусов).

39. При каких a и b преобразование $z \mapsto az + b$ является поворотом? переносом? осевой симметрией?

40. При каких a и b преобразование $z \mapsto a\overline{z} + b$ является осевой симметрией?

41. Докажите, что треугольник с вершинами $0, 1, z$ подобен треугольнику с вершинами $0, 1, 1/z$.

42. Докажите, что треугольник с вершинами $0, z, w$ подобен треугольнику с вершинами $0, 1/z, 1/w$.

43. Концы гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника — точки $1+i$ и $4+2i$. Укажите точки, в которых может находиться вершина прямого угла этого треугольника.

44. Нарисуйте все комплексные числа z, для которых $\arg \frac{z}{z+1} = 60^\circ$.

45.* Решите уравнение $(x + iy)^5 = (x - iy)$ (x, y — действительные числа).

46. Известно, что $z + 1/z = 2\cos 1^\circ$. Найдите $z^{60} + 1/z^{60}$.

Темы курсовых работ

Во втором полугодии параллельно с решением листков каждый школьник должен был выбрать себе задачу (из некоторого списка задач на исследование, включавшего задачи разной сложности, решения не всех из которых были полностью известны преподавателям) и в течение полугодия под «научным руководством» одного из преподавателей продвинуться в решении этой задачи (допускались и коллективные работы школьников). В главе «Избранные курсовые работы» приведены несколько текстов, получившихся в результате, здесь же мы приводим список тем, выбранных школьниками (с указанием руководителей).

1. (Цепные дроби) Найдите разложение в цепную дробь для $\sqrt{N}$ при $N = 2, 3 \ldots, 41$. Есть ли закономерности в этих разложениях? Попытайтесь предсказать какие-нибудь свойства разложения $\sqrt{N}$ в общем случае и доказать их. Докажите что разложение x в цепную дробь периодично если и только если x — квадратичная иррациональность (число вида $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$). [Д. Александров, А. Минасян (рук. И. Вьюгин)]

2. (Непрерывно изгибаемый многогранник) Пример нежёсткого (невыпуклого) многогранника (нужно изготовить модель). [Д. Александров, А. Минасян (рук. А. Шень)]

3. (Цепная дробь для числа e) Докажите равенство

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}.$$

[Л. Антоненко (рук. В. Доценко)]

4. (Число e) Докажите, что сумма ряда $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ иррациональна; не является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами; трансцендентна. [В. Бородкина (рук. А. Ромащенко)]

5. (Простые числа) Докажите, что для любого натурального числа n в арифметической прогрессии $a_k = kn+1$ найдётся бесконечно много простых чисел. [А. Буряк (рук. В. Доценко)]

6. (Самопечатающаяся программа) Напишите программу на Паскале, которая печатает собственный текст в обратном порядке. Имеется в виду, что можно изготовить exe-файл, который будет печатать исходный код, даже если сам исходный код будет удалён. [Л. Вакуленко (рук. А. Ромащенко)]

7. (Протокол Яо) У Алисы и Боба есть по гигабайтному файлу. Они хотят проверить, одинаковы ли их файлы. Игрокам разрешается пересылать друг другу информацию по каналу связи (по телефону). Как проверить идентичность файлов, если всего должно быть передано не более одного килобайта информации? Допускается вероятность ошибки в один процент.

Более общая постановка задачи: Алиса и Боб имеют по n битов, то есть последовательности нулей и единиц длины n. Как проверить идентичность этих двух последовательностей, пересылая друг другу по каналу связи $o(n)$ битов? Для любой пары последовательностей вероятность ошибки должна быть меньше 0,01. [М. Дронов (рук. А. Ромащенко)]

8. (Матричные игры) Двое играют в следующую игру: одновременно показывают сопернику один или два пальца. Выигрыш первого (соответственно, проигрыш второго) определяется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ (т. е., например, если каждый показал два пальца, то первый получает 3 рубля, а второй платит 3 рубля). Является ли эта игра честной? Какую премию должен заплатить один игрок другому перед началом игры, чтобы игра стала честной? Какова оптимальная стратегия для каждого из игроков? Изучите аналогичную задачу для произвольной матрицы платежей 2×2. [Д. Загоскин (рук. С. Сальников)]

9. (Задача Кеплера) Кеплеру удалось вычислить орбиты Земли и Марса, хотя в его время, естественно, не было никаких данных о расстоянии до Марса, а было известно (для любого момента времени) лишь направление на Марс. Как ему это удалось?

Попытайтесь повторить его достижение для модельной задачи (получив данные и затем восстановив орбиты). [Д. Зарубин (рук. А. Шень)]

10. (Последовательные квадраты) Докажите, что существует бесконечно много чисел $k \in \mathbb{N}$, таких что уравнение $n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+k)^2 = m^2$ (**а**) имеет решение в целых числах (m, n) (**б**) имеет решение в натуральных числах (**в**) имеет бесконечно много решений в натуральных числах. В последнем пункте найдите возможно больше бесконечных серий чисел k. [А. Лохматиков (рук. Д. Шварц)]

11. (Суммы квадратов) Докажите, что любое простое число вида $4k+1$ можно представить в виде суммы двух квадратов; любое число можно представить в виде суммы четырёх квадратов. [В. Луговкин (рук. Д. Шварц), К. Попков (рук. М. Финкельберг)]

12. (Раскрашивание чисел) Для любого ли раскрашивания натуральных чисел в (**а**) два (**б**) несколько цветов найдутся три числа одного цвета, одно из которых равно сумме двух других? (Иными словами, уравнение $x = y + z$

имеет одноцветное решение.) Те же вопросы для уравнений $2x = y + z$ и $3x = y + z$. [Г. Мазурчик (рук. В. Доценко)]

13. (Постулат Бертрана) Докажите постулат Бертрана: для любого натурального n между числами n и $2n$ есть простое число.

Докажите неравенства Чебышёва: $a\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant b\frac{x}{\log x}$ для некоторых положительных чисел a и b и всех $x \gg 1$. (Здесь $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x.) [Д. Медников (рук. В. Доценко)]

14. (Кривая дракона) Кривые дракона — семейство рекурсивно определяемых «самоподобных» кривых, придуманное Д. Кнутом и Ч. Дэвисом. Во многих случаях несколько кривых дракона заполняют плоскость без самопересечений и наложений; требуется описать такие ситуации. [А. Никитин, Р. Савченко (рук. А. Шень)]

15. (Несравнимые точки) Докажите, что для любой бесконечной последовательности точек $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}^k$ найдутся номера $m < n$, при которых $a_m \leqslant a_n$ в смысле покоординатного порядка.

Насколько длинной может быть последовательность из несравнимых точек, если известно, что соседние члены последовательности отличаются не более чем на C (расстояние — сумма расстояний по координатам) и первый член не больше C? Получите верхние и нижние оценки на длину такой последовательности (зависящие от k и C). [А. Никитин, Р. Савченко (рук. А. Шень)]

16. (Чёрные и белые клетки) Дано множество («шаблон») из нечётного числа клеток, причём одна из них отмечена. На каждом шаге мы переносим шаблон в каждую клетку плоскости так, чтобы отмеченная клетка совпала с ней, и голосованием среди клеток, покрытых шаблоном, выбираем, будет эта клетка на следующем шаге чёрной или белой. Как по шаблону определить, любое ли начальное (конечное) множество чёрных клеток погибнет за несколько шагов? [А. Подкопаев (рук. В. Доценко)]

17. (Геометрия в размерности 4) Какой многогранник получается в сечении четырёхмерного куба (четвёрок действительных чисел (x, y, z, t), для которых $0 \leqslant x, y, z, t \leqslant 1$) «плоскостью» $x + y + z + t = 2$? [А. Подлевских (рук. М. Финкельберг)]

18. (Теорема Виета и суммы радикалов) Докажите и обобщите формулу $\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$. [Д. Рисенберг (рук. В. Доценко)]

19. (Геометрическое доказательство неравенств) Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел $(x + y)^2 \geqslant 4xy$ можно доказать, разместив 4 прямоугольника $x \times y$ внутри квадрата со стороной $x + y$. Придумайте аналогичное доказательство неравенства для трёх чисел $(x + y + z)^3 \geqslant 27xyz$. [А. Самохин (рук. А. Шень)]

20. (Построения одним циркулем) Докажите, что всё, что можно построить циркулем и линейкой, можно построить, используя лишь циркуль. [А. Фурсов (рук. В. Шувалов)]

21. (Разделение секрета) (**а**) У n офицеров есть доступ к пусковой установке. Пульт управления имеет секретный код, состоящий, скажем, из N нулей и единиц. Как разделить секрет между офицерами так, чтобы любые m из них, собравшись вместе, могли запустить ракету, а любые $(m-1)$ не имели никакой информации о секретном коде?

(**б**) Та же задача, но ракету может запустить группа офицеров, если суммарное количество звёздочек на их погонах больше m. [М. Хачатурьян (рук. С. Сальников)]

22. (Проверка простоты) Придумайте алгоритм (возможно, вероятностный) для проверки простоты числа. Алгоритм должен работать быстро; скажем, на 100-значном числе алгоритм должен работать не более 5 минут. Вероятность ошибки на любом входе должна быть меньше 0,01. [Л. Шагам (рук. А. Ромащенко)]

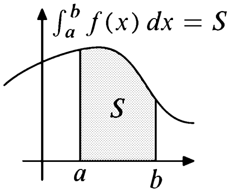
23. (Построения одной линейкой) Докажите, что с помощью одной линейки нельзя построить центр окружности. Докажите, что если нарисована окружность с центром, то можно построить всё то, что можно построить циркулем и линейкой. [А. Шпильман (рук. М. Финкельберг)]

Задачи 2003 – 2004 года (11 класс)

В течение третьего года было продолжено изучение математического анализа. В качестве дополнительных листков выдавались подборки задач вступительных экзаменов (в Независимый Московский Университет (НМУ) и МГУ им. М. В. Ломоносова), содержащие достаточно сложные задачи, решение которых требует не новых понятий, а (порой очень уверенного) обращения с известным материалом. Во втором полугодии также изучались основы линейной алгебры. Почти все листки второго полугодия очень короткие; новый листок выдавался почти каждую неделю.

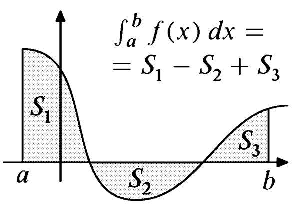
87. Интегрируемые функции

Неформально говоря, интеграл от функции f по отрезку $[a, b]$, обозначаемый $\int_a^b f(x)\,dx$, есть площадь криволинейной трапеции под графиком f (с учётом знака), см. рисунки.



Разбиением отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, делящий его на n отрезков $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. *Диаметром* разбиения называется наибольшая из длин отрезков разбиения, то есть максимум всех $d_i = x_i - x_{i-1}$.

Пусть, помимо разбиения, задана некоторая ограниченная функция f, определённая на отрезке $[a, b]$. На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ рассмотрим точную нижнюю грань m_i и точную верхнюю грань M_i значений функции f. Сумма $\sum m_i d_i$ называется *нижней суммой* функции f по разбиению, сумма $\sum M_i d_i$ — *верхней суммой.*



1. Каков геометрический смысл нижней и верхней сумм и почему мы ожидаем, что интеграл функции f заключён между ними?

2. **(а)** Как меняются нижняя и верхняя суммы при измельчении разбиения (добавлении новых точек)? **(б)** Докажите, что нижняя сумма любого разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

По аксиоме полноты всегда (для любой ограниченной функции f, определённой на любом отрезке $[a, b]$) найдётся хотя бы одно число, большее или равное всех нижних сумм и меньшее или равное всех верхних. Если такое число единственно, то оно называется *интегралом* функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$ (вместо буквы x может быть любая другая), а функция f называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

3. Докажите, что функции f, заданные на отрезке $[0, 1]$ формулами (**а**) $f(x) = 2$; (**б**) $f(x) = x$; (**в**) $f(x) = x^2$; (**г**) $f(x) = 2^x$, интегрируемы на $[0, 1]$, и найдите их интегралы.

4. Докажите, что всякая монотонная функция интегрируема.

5. Приведите пример ограниченной, но не интегрируемой функции.

6. Докажите, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти разбиение, у которого верхняя и нижняя суммы различаются менее, чем на ε.

7. (**а**) Докажите, что если функция определена на отрезке $[a, b]$ и интегрируема на нём, то она интегрируема и на любом содержащемся в нём отрезке. (**б**) Докажите, что если $a < c < b$ и функция f, определённая на $[a, b]$, интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на всём $[a, b]$. Как связаны эти три интеграла?

8. Докажите, что интегрируемая на отрезке функция останется интегрируемой, если произвольным образом изменить её значения в конечном числе точек.

9. Докажите, что (**а**) сумма и разность двух интегрируемых функций интегрируемы; (**б**) при умножении на число интегрируемая функция остаётся интегрируемой.

10. Докажите, что если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, причём $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

11. Может ли у всюду положительной на отрезке интегрируемой функции быть нулевой интеграл?

12. Интегрируема ли на отрезке $[0, 1]$ (**а**) функция Римана, равная нулю в иррациональных точках и равная $1/q$ в точке p/q для несократимой дроби p/q? (**б**) характеристическая функция канторовского множества, равная нулю на всех числах $\alpha \in [0, 1]$, запись которых в троичной системе счисления содержит хоть одну единицу, и равная единице в остальных точках (для сомнительных α, когда ответ зависит от записи, считаем функцию равной единице, так что, например, $f(1/3) = f(0{,}02222\ldots) = 1$)?

13. Известно, что для некоторого разбиения отрезка $[0, 1]$ на n отрезков верхняя и нижняя сумма ограниченной функции f отличаются менее чем на ε. Докажите, что для любого разбиения достаточно малого диаметра верхняя и нижняя суммы функции f отличаются не более чем на 2ε.

Функция f, определённая на множестве M, называется *равномерно непрерывной* на этом множестве, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ с таким свойством: значения функции в любых двух точках множества M, отстоящих менее чем на δ, отличаются менее чем на ε:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in M)\left[|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right].$$

14. (**а**) Является ли функция $f: x \mapsto x^2$ равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$? (**б**) Покажите, что равномерно непрерывная на отрезке функция непрерывна в каждой точке этого отрезка. (**в**) Приведите пример функции, определённой на интервале $(0, 1)$ и непрерывной в каждой его точке, но не равномерно непрерывной на этом интервале.

Мы хотим доказать, что всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема. Это вытекает из задач 15 и 16.

15. Докажите, что всякая равномерно непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

16. Докажите, что всякая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём. (Указание. Пусть это не так и для некоторого $\varepsilon > 0$ при любом $\delta = 1/n$ существуют точки x_n и y_n, для которых $|x_n - y_n| < 1/n$, но $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Покажите, что функция f разрывна в любой предельной точке последовательности x_n (или, что то же самое, y_n).)

17. Интегрируема ли на отрезке $[0, 1]$ функция f, для которой $f(0) = 0$ и $f(x) = \sin(1/x)$ при $x > 0$?

88. Конечные приращения

1. (Теорема Ролля) Докажите, что если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках интервала (a, b) и $f(a) = f(b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$, для которой $f'(c) = 0$. (График, начинающийся и кончающийся на одном уровне, имеет горизонтальную касательную.)

2. (Теорема Лагранжа) Докажите, что если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала (a, b), то найдётся точка $c \in (a, b)$, для которой

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(мгновенная скорость равна средней). (Указание: теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, к которому легко сводится общий.)

3. Докажите, что если функция f дифференцируема на всей прямой и $|f'(x)| \leqslant 1$ при всех x, то $|f(u) - f(v)| \leqslant |u - v|$ при всех u и v (если мгновенная скорость по модулю не больше единицы, то за время $|u - v|$ можно пройти не более $|u - v|$).

4. Докажите, что если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках интервала (a, b) и производная в этих точках положительна, то функция f (строго) возрастает на $[a, b]$. Как изменится утверждение, если производная неотрицательна? Верно ли обратное утверждение?

5. Две функции f и g определены и дифференцируемы во всех точках прямой, при этом их производные равны: $f'(x) = g'(x)$ при всех x. Докажите, что f и g отличаются на константу.

6. Функции f и g определены, непрерывны на отрезке $[0, a]$ и дифференцируемы внутри него, при этом $f(0) = g(0)$, а $f'(x) \geqslant g'(x)$ при $x \in (0, a)$. Докажите, что $f(a) \geqslant g(a)$.

7. Докажите, что (**а**) $\sin x \leqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; (**б**) $\cos x \geqslant 1 - x^2/2$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; (**в**) $\sin x \geqslant x - x^3/6$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; (**г**) ещё что-нибудь в том же роде.

8. Движение точки на плоскости задаётся двумя функциями: $x(t)$ и $y(t)$ суть абсцисса и ордината точки в момент t. (**а**) Как записать вектор мгновенной скорости в момент t_0, если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы? (**б**) Покажите, что не для любого отрезка движения точки по плоскости существует момент, в который мгновенная скорость равна средней. (**в**) Покажите, что если мгновенная скорость в любой момент движения не превосходит c по модулю (длине), то средняя скорость на любом промежутке времени не превосходит того же c. (**г**) (Теорема Коши) Покажите, что на любом промежутке существует момент, в который мгновенная скорость параллельна средней. (**д**) Можно ли в этом утверждении заменить «параллельна» на «сонаправлена» (параллельна и направлена в ту же сторону)?

9. Пусть функция f строго возрастает и непрерывна на интервале (u, v), дифференцируема в точке $a \in (u, v)$ и $f'(a) > 0$. (**а**) Докажите, что обратная функция определена на некотором интервале, содержащем $f(a)$, и дифференцируема в точке $f(a)$. (**б**) Найдите производную обратной функции в точке $f(a)$. (**в**) Объясните ответ в терминах касательных к графику прямой и обратной функций.

10. (**а**) Докажите, что производная функции ln в точке 1 равна 1. (**б**) Чему равна производная экспоненты, то есть функции $\exp\colon x \mapsto e^x$, в точке 0? (**в**) Найдите производную функции exp в произвольной точке a. (**г**) Найдите производную функции ln в произвольной точке a.

11. Найдите производную функции $x \mapsto x^x$ (определённой при $x > 0$).

12. Докажите, что (**а**) $e^x \geqslant 1 + x$ для $x > 0$; (**б**) $e^x \geqslant 1 + x + x^2/2$ для $x > 0$; (**в**) ещё что-нибудь в том же роде; (**г**) ещё что-нибудь в том же роде, но для отрицательных x.

Найдите все функции f, для которых при всех x верно равенство:

13. $f'(x) = x + 1$;

14. $f'''(x) = 0$;

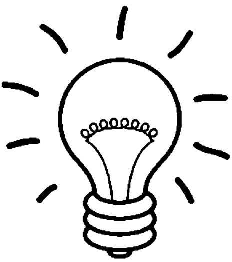
15. $f'(x) = |x|$;

16. $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ (функция sgn равна нулю в нуле, а в остальных точках — ± 1 в зависимости от знака числа; так, например, $\operatorname{sgn} 0{,}5 = 1$);

17. $f'(x) = f(x)$;

18. $f''(x) = -f(x)$. (Указание: для такой функции $f^2 + (f')^2 = \mathrm{const}$.)

89. Задачи вступительных экзаменов в НМУ



1. Докажите, что для того, чтобы треугольник ABC был остроугольным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие точки A' внутри стороны BC, B' внутри стороны AC и C' внутри стороны AB, для которых отрезки AA', BB' и CC' равны.

2. Существует ли такая бесконечная последовательность из цифр 0 и 1, что любая подпоследовательность, образованная элементами с номерами, составляющими арифметическую прогрессию, непериодична?

3. Пусть $a_1, \ldots, a_{100}$ — некоторая перестановка чисел $1, \ldots, 100$. Докажите, что сумма

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + 100a_{100}$$

минимальна в случае перестановки $100, 99, \ldots, 1$.

4. В треугольнике ABC угол BAC равен шестидесяти градусам. BD и CE — биссектрисы углов ABC и ACB соответственно, O — точка пересечения BD и CE. Докажите, что отрезки OD и OE равны.

5. Докажите, что если $\cos a = b$ и $\cos b = a$, то $a = b$.

6. Правильный треугольник со стороной a покрыт пятью правильными треугольниками со стороной b. Докажите, что правильный треугольник со стороной a можно покрыть четырьмя правильными треугольниками со стороной b.

7. Каждое из положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ меньше суммы остальных. Докажите, что существует выпуклый многоугольник, стороны которого равны $a_1, \ldots, a_n$.

8. Пусть $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$ (все x_i положительны). Докажите, что

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \leqslant 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \ldots + \frac{S^n}{n!}.$$

9. Фигура S представляет собой область плоскости, лежащую выше параболы $y = x^2$ в декартовой системе координат. Можно ли конечным числом фигур, равных S (и как угодно ориентированных), покрыть плоскость?

10. Пространственный неплоский шестиугольник имеет три пары параллельных противоположных сторон. Докажите, что в каждой из этих пар стороны равны.

11. Существует ли бесконечная строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$ неотрицательных целых чисел, для которой при любых i и j выполняется равенство $a_{ij} = a_i + a_j$?

12. Известны расстояния a, b и c от точки M пространства до вершин A, B и C прямоугольника $ABCD$. Чему может быть равно расстояние от M до вершины D?

13. Найдите наибольшее значение выражения $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$, если $x_1, \ldots, x_n$ — неотрицательные действительные числа, для которых $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

14. Все вершины равнобочной трапеции лежат на параболе. Докажите, что основания трапеции перпендикулярны оси параболы.

15. Существует ли непостоянная рациональная функция $R(x)$, для которой

$$R(x) = R(1/x) \quad \text{и} \quad R(x) = R(1 - x)$$

при всех x, при которых обе части определены?

16. Через $P(n)$ обозначим число способов представления натурального числа n в виде суммы натуральных слагаемых (порядок слагаемых не учитывается; например, $P(4) = 5$, так как $4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$). Докажите, что при $n > 1$ выполнено неравенство

$$P(n + 1) + P(n - 1) \geqslant 2P(n).$$

17. Дан трёхгранный угол $OABC$. Точка M взята на биссектрисе угла AOB, точка N — на биссектрисе угла BOC, точка P — пересечение прямой MN с плоскостью AOC. Докажите, что точка P равноудалена от прямых OA и OC.

18. Докажите, что для любой линейной функции $f(x)$ найдётся точка на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, для которой $|\sin x - f(x)| \geqslant 1/8$.

90. Предел функции

Пусть функция f определена на множестве вида $(a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon)$ (в «проколотой окрестности точки a»). Говорят, что эта функция имеет предел A при x, стремящемся к a, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

(Значение в точке a не используется!)

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$. (В частности, функция, имеющая предел в точке, должна быть определена в некоторой её проколотой окрестности. Это требование можно существенно ослабить, но сейчас мы это делать не будем.)

1. Под знаком предела вместо $x \to a$ может быть $x \to a+0$ (предел справа), $x \to a-0$ (предел слева), $x \to +\infty$ (предел при x, стремящемся к плюс бесконечности), $x \to -\infty$. В правой части вместо A может быть $+\infty$ или $-\infty$. Дайте определение трёх из пятнадцати возникающих понятий (по выбору принимающего задачу).

2. Сформулируйте и докажите утверждения о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.

3. Пусть функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to a$, а функция $g(y)$ определена в некоторой окрестности точки b и непрерывна в этой точке. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.

4. Вычислите пределы:
(**а**) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x+1}{x+1}$; (**б**) $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}$; (**в**) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^3+1}$; (**г**) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$.

5. (Теорема о двух милиционерах) Известно, что при всех x из некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ и что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Теперь можно перевести на язык предела функции разные решённые ранее задачи.

6. Вычислите пределы:
(**а**) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$; (**б**) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; (**в**) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$; (**г**) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

7. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a. (**а**) Докажите, что функция f непрерывна в точке a если и только если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. (**б**) Докажите, что функция f дифференцируема в точке a и имеет в этой точке производную A, если и только если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$.

8. Найдите ошибку (во всяком случае, серьёзный пробел) в следующем доказательстве теоремы о дифференцировании композиции функций:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right) =$$
$$= \lim_{y\to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a))f'(a).$$

9. Вычислите пределы:
(**а**) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}$; (**б**) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x^a-x_0^a}{x-x_0}$; (**в**) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{x^3}$; (**г**) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

10. (Правило Лопиталя) (**а**) Пусть дифференцируемые в точке a функции f и g таковы, что $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$. (**б**) Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b), причём $g'(x)$ не обращается в нуль на этом интервале. Предположим, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. (Указание. Используйте теорему Коши.)

11. Докажите, что монотонная функция в каждой точке имеет предел справа и предел слева.

12. Существует ли функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая растёт медленнее любой показательной функции, но быстрее любой степенной, т. е. такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{f(x)} = +\infty$ при всех $n > 1$, $a > 1$?

91. Формула Ньютона – Лейбница

«Интегрирование и дифференцирование взаимно обратны». Вот два возможных уточнения (для разных порядков действий):

А. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема во всех точках, и $g(x) = f'(x)$ — её производная в точке x. Тогда функция g интегрируема на любом отрезке $[a, b]$ и

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(t)\,dt.$$

Б. Пусть функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом отрезке, и a — произвольная (начальная) точка. Тогда функция f, заданная формулой

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

дифференцируема во всех точках, и $f'(x) = g(x)$ для любого x.

1. (Плохие новости) Приведите примеры, показывающие, что утверждения А и Б неверны и производная может не быть интегрируемой, а интеграл — дифференцируемым. (Указание. Если эта задача не получается, решите сначала другие.)

2. (Хорошие новости) Покажите, что утверждения А и Б верны, если дополнительно предполагать, что производная (функция f' в утверждении А и функция g в утверждении Б) непрерывна. (Указание. Начните с утверждения Б.)

Таким образом, интеграл от непрерывной функции g по отрезку $[a, b]$ можно вычислить так: найти функцию f, у которой производная равна g, и вычислить $f(b) - f(a)$. Такая функция f называется *первообра́зной* функции g, а также её *неопределённым интегралом.*

3. Найдите площадь области, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = 2$.

4. ... ограниченной гиперболой $y = 1/x$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$ и $x = 5$.

5. ...ограниченной графиком $y = 1/x^2$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$ и $x = 5$.

6. ...ограниченной графиком $y = \sqrt{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

7. Найдите первообразную для функции $x \mapsto |x|$.

8. (**а**) Найдите интеграл $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$. (**б**) Найдите первообразную для функции $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ на интервале $(-1, 1)$ (то есть дифференцируемую на этом интервале функцию, производная которой в точке x равна $\sqrt{1 - x^2}$).

9. Плоскость разрезали по линиям $y = \sin x$ и $y = \cos x$; получились две бесконечные части и бесконечно много конечных частей. Найдите их площадь.

10. Вычислите интегралы: (**а**) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$; (**б**) $\int_0^1 x^3e^x\,dx$.

11. Покажите, что утверждение А верно, если функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема во всех точках интервала (a, b) и её производная (доопределённая произвольным образом в точках a и b — это не влияет на интегрируемость и на интеграл) интегрируема на $[a, b]$. (Непрерывность производной не предполагается.)

12. Найдите первообразную функции $x \mapsto 1/\cos^2 x$.

13. (Продолжение) (**а**) Найдите первообразную функции $x \mapsto 1/(1+x^2)$. (**б**) Найдите α, β, для которых верно равенство

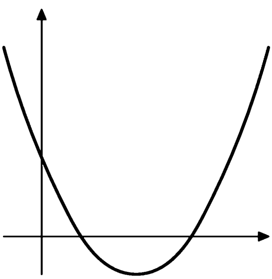
$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \alpha + \frac{\beta}{A} + o\left(\frac{1}{A}\right) \text{ при } A \to +\infty.$$

14. Вычислите $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ с точностью (**а**) 0,1; (**б**) 0,01.

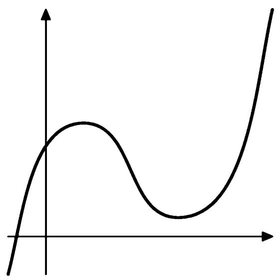
15. (**а**) Найдите первообразную функции $x \mapsto \ln x$. (**б**) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}/n$.

92. Производные, первообразные, графики

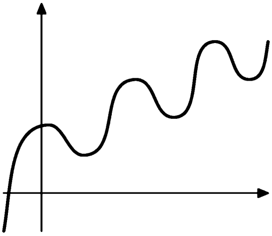
Для каждого из рисунков постройте (на том же графике или рядом) эскиз графика производной и первообразной:



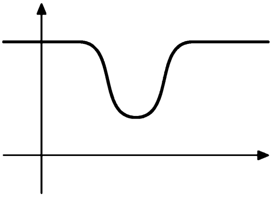
1.



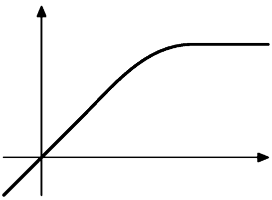
2.



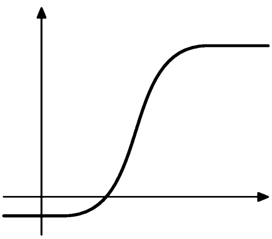
3.



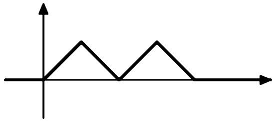
4.



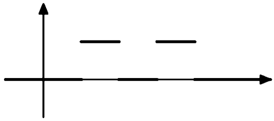
5.



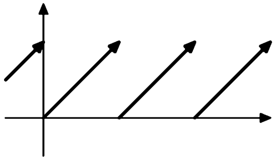
6.



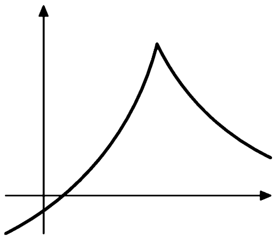
7.



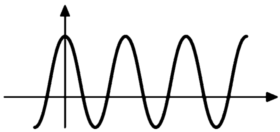
8.



9.



10.



11.

93. Ряды

Пусть дана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Если последовательность «частичных сумм» $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_n, \ldots$ сходится к некоторому числу S, то говорят, что *ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится к* S (или что *сумма этого ряда равна* S) и пишут $\sum_k a_k = S$).

1. Сходятся ли ряды:

(а) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$? **(б)** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$?

(в) $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$? **(г)** $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$? **(д)** $\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k \ln k}$?

2. Докажите, что если ряд $\sum a_k$ сходится, то его члены стремятся к нулю ($\lim a_k = 0$). Верно ли обратное?

3. Докажите, что ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.

4. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant 0$. Докажите, что ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n a_{2^n}$ сходятся или расходятся одновременно.

5. Пусть $a_k > 0$ при всех k. Докажите, что ряды $\sum a_k$ и $\sum \frac{a_k}{A_k}$ (через $A_k = a_1 + \ldots + a_k$ обозначена k-я частичная сумма) сходятся или расходятся одновременно. (Как вывести отсюда, что $\sum 1/k$ расходится?)

6. Докажите, что три следующих свойства равносильны (для ряда $\sum a_k$ с положительными членами, меньшими единицы): (1) $\sum a_k$ не ограничена (ряд расходится); (2) произведения $(1 + a_1) \ldots (1 + a_n)$ не ограничены; (3) произведения $(1 - a_1) \ldots (1 - a_n)$ стремятся к нулю.

7. Докажите, что ряд $\sum 1/p$ (обратные к простым числам) расходится. (Указание: согласно предыдущей задаче, достаточно доказать, что произведение сомножителей вида $(1 - 1/p)$ стремится к нулю.)

8. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant 0$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Докажите, что ряд $\sum (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

9. Произведём в ряде $\sum a_k$ группировку слагаемых (один член нового ряда — сумма нескольких членов старого, без изменения порядка). Докажите, что если исходный ряд сходится, то и полученный ряд сходится, причём к той же сумме. Может ли после группировки расходящийся ряд стать сходящимся?

10. Вычислите суммы рядов:

(**а**) $\frac{1}{2^2-2} + \frac{1}{3^2-3} + \ldots + \frac{1}{n^2-n} + \ldots$; (**б**) $\frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{3^3-3} + \ldots + \frac{1}{n^3-n} + \ldots$

11. Найдите сумму ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$.

12. Докажите при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ равенства $\sin x = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos x = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

13. Докажите при $x \geqslant 0$ равенство $e^x = \sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$.

14. (Продолжение) Верно ли это равенство для $x < 0$?

15. (**а**) Укажите аналогичное равенство для $\operatorname{arctg} x$. (**б**) Найдите сумму $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$

16. При каких x сходится ряд $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots$?

Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует отрезок длины ε, содержащий все её члены, начиная с некоторого.

17. Покажите, что фундаментальность последовательности равносильна такому условию: для всех $\varepsilon > 0$ найдётся N, при котором $|x_m - x_n| < \varepsilon$ для любых $m, n > N$.

18. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна (почему?). Докажите, что верно и обратное: любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Если ряд $\sum |a_k|$ сходится, то говорят, что ряд $\sum a_k$ *сходится абсолютно* (т. е. по абсолютной величине).

19. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится. Верно ли обратное?

20. Докажите, что если у абсолютно сходящегося ряда переставить слагаемые произвольным образом, то получится ряд, который сходится, причём к той же сумме.

21. Сходится ли ряд $\frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{2} + \ldots + \frac{\sin n}{n} + \ldots$?

22. Известно, что ряд $\sum a_k^2$ сходится. Может ли не сходиться ряд $\sum a_k^3$?

23. (Продолжение) Известно, что ряд $\sum a_k$ сходится. Может ли не сходиться ряд $\sum a_k^3$?

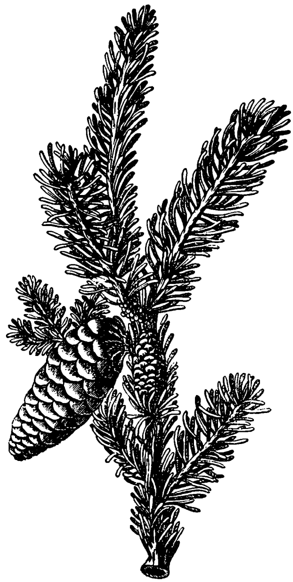
Если ряд сходится, но не абсолютно сходится, говорят, что он *условно сходится.*

24. (Теорема Римана) Докажите, что для любого условно сходящегося ряда можно получить любую сумму, переставив слагаемые надлежащим образом.

25. Рассмотрим сходящийся ряд из векторов на плоскости (или комплексных чисел), будем переставлять его всевозможными способами и суммировать (если он остаётся сходящимся). Какие множества сумм могут при этом получиться?

94. Разные задачи

1. Докажите, что в десятичной записи чисел $1974^n + 2^n$ и 1974^n содержится одинаковое количество цифр.



2. На шахматной доске 8×8 отмечены 64 точки — центры всех клеток. Можно ли отделить все точки друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?

3. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, чтобы любое натуральное число $1, 2, 3, \ldots$ можно было представить единственным образом в виде разности двух чисел этой последовательности?

4. Из отрезков, имеющих длины a, b и c, можно составить треугольник. Докажите, что из отрезков с длинами $1/(a+b)$, $1/(a+c)$, $1/(b+c)$ также можно составить треугольник.

5. Шарообразная планета окружена 37 точечными астероидами. Докажите, что в любой момент на поверхности планеты найдётся точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 17 астероидов. (*Примечание.* Астероид, расположенный на линии горизонта, не виден.)

6. В городе X с любой станции метро можно проехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.

7. Докажите, что в круг радиуса 1 нельзя поместить без наложений два треугольника, площадь каждого из которых больше 1.

95. Векторные пространства

Векторным пространством называется множество, для элементов которого определена операция *сложения*, а также *умножения* на (действительное) число. Его элементы называют *векторами*, сумму векторов обозначают $x+y$, а произведение числа λ и вектора x обозначают $\lambda \cdot x$ или просто λx. Среди векторов должен быть выделен *нулевой* вектор (обозначаемый 0), и для каждого вектора x должен быть определён *противоположный* вектор (обозначаемый $-x$).

При этом должны выполняться следующие свойства:

- $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);
- $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);
- $x + 0 = 0 + x = x$;
- $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
- $\lambda \cdot 0 = 0$;
- $0 \cdot x = 0$;
- $1 \cdot x = x$;
- $\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$;
- $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$;
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

1. Где в этих свойствах 0 обозначает число, а где — вектор? Где + обозначает сложение чисел и где — векторов? где встречается умножение чисел и векторов?

2. Докажите, что (**а**) $((x + y) + z) + w = x + (y + (z + w))$; (**б**) для любых векторов u, v найдётся такой вектор x, что $u + x = v$; (**в**) $2u = u + u$ для любого u; (**г**) $-u = (-1)u$ для любого u; (**д**) для всякого вектора u найдётся такой вектор x, что $x + x = u$; (**е**) если $\lambda u = 0$, то $\lambda = 0$ или $u = 0$; (**ж**) если $u + u = 0$, то $u = 0$.

3. Некоторые из свойств, перечисленных в определении векторного пространства, могут быть выведены из остальных. Убедитесь в этом.

4. (Примеры векторных пространств) Укажите, как надо определить операции, и проверьте указанные в определении свойства для (**а**) множества $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются наборы $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ из n действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$; (**б**) множества всех функций с действительными аргументами и значениями; (**в**) векторов в геометрии (как они определяются, кстати?).

Пусть E — векторное пространство. Непустое подмножество $F \subset E$ называется *подпространством*, если сложение и умножение на число не выводит из F (сумма двух элементов F принадлежит F, произведение числа и вектора из F принадлежит F). В этом случае F можно рассматривать как векторное пространство.

5. (**а**) Является ли подпространством в $\mathbb{R}^n$ множество всех $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, для которых $x_1 + \ldots + x_n = 0$? (**б**) для которых $x_1 + \ldots + x_n = 1$? (**в**) для которых $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$? (**г**) Является ли подпространством в пространстве всех функций с действительными аргументами и значениями множество всех возрастающих функций? (**д**) множество всех монотонных функций? (**е**) всех непрерывных функций? (**ж**) периодических функций? (**з**) многочленов? (**и**) многочленов степени n?

6. (**а**) Пусть F_1 и F_2 — подпространства векторного пространства E. Является ли их пересечение $F_1 \cap F_2$ подпространством? (**б**) тот же вопрос для их объединения; (**в**) докажите, что среди всех подпространств пространства E, содержащих F_1 и F_2, существует наименьшее (содержащееся во всех других).

7. (**а**) Докажите, что подпространство в пространстве функций, содержащее многочлены $1, x-1, (x-1)^2, \ldots, (x-1)^{10}$, содержит все многочлены степени не больше 10. (**б**) Та же задача, если оно содержит многочлены $1, x, x(x+1), x(x+1)(x+2), \ldots, x(x+1)\ldots(x+9)$; (**в**) Та же задача, если оно содержит многочлены $x^{10}, (x-1)^{10}, (x-2)^{10}, \ldots, (x-10)^{10}$.

96. Линейные комбинации

1. Рассмотрим на плоскости два вектора $x = OX$ и $y = OY$ (точки O, X, Y не лежат на одной прямой). Нарисуйте вектор $z = OZ$, если (**а**) $z = x + y$; (**б**) $z = x - y$; (**в**) $z = 2x - 3y$.

2. (Продолжение) Нарисуйте множество точек Z, для которых (**а**) $z = \lambda x$ (для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$); (**б**) $z = x + \lambda y$; (**в**) $z = \lambda x + (1-\lambda)y$; (**г**) $z = (\cos\lambda)x + (\sin\lambda)y$.

3. Закончите фразы: (**а**) «точки прямой XY — это точки Z, для которых $OZ = \lambda OX + \mu OY$, причём…»; (**б**) «точки отрезка XY — это…»; (**в**) «точки (внутри и на границе) треугольника ABC — это точки Z, для которых $OZ = \lambda OA + \mu OB + \nu OC$, причём…»; (**г**) «точка пересечения медиан треугольника ABC — это…».

4. Закончите аналогичные фразы для векторов в пространстве: (**а**) «точки плоскости ABC — это точки D, для которых $OD = \lambda OA + \mu OB + \nu OC$, причём…»; (**б**) «точки тетраэдра $ABCD$ — это такие точки E, что…».

Линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_n$ векторного пространства E называется вектор того же пространства, представимый в виде

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — действительные числа.

5. (**а**) Представима ли функция $\cos^2 x$ в виде линейной комбинации функций 1, $\cos x$, $\cos 2x, \ldots, \cos 10x$? (**б**) Представима ли функция $\sin^2 x$ в виде линейной комбинации функций 1, $\sin x$, $\sin 2x, \ldots, \sin 10x$? (**в**) Те же вопросы с заменой $\cos^2$ на $\cos^3$ и $\sin^2$ на $\sin^3$.

6. (**а**) Представима ли функция $|x|$ в виде линейной комбинации функций $1, x, x^2, \ldots, x^{10}$? (**б**) Тот же вопрос для $\sin x$. (**в**) Тот же вопрос для e^x. (**г**) Представима ли функция x^3 в виде линейной комбинации функций $1, x, x^2, \sin x$?

7. (**а**) Покажите, что любой вектор из $\mathbb{R}^n$ представим в виде линейной комбинации n векторов $\langle 1, 0, \ldots, 0\rangle$, $\langle 0, 1, \ldots, 0\rangle, \ldots$, $\langle 0, 0, \ldots, 1\rangle$. (**б**) Та же задача для векторов $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1\rangle$, $\langle 0, 1, 1, \ldots, 1\rangle$, $\langle 0, 0, 1, \ldots, 1\rangle, \ldots$, $\langle 0, 0, \ldots, 1\rangle$. (**в**) Та же задача для векторов $\langle 1, 1, \ldots, 1\rangle$, $\langle 1, 2, \ldots, n\rangle$, $\langle 1, 4, \ldots, n^2\rangle, \ldots \langle 1^{n-1}, 2^{n-1}, \ldots, n^{n-1}\rangle$.

8. Сумма нескольких ненулевых векторов в пространстве (или на плоскости) равна нулю. Докажите, что некоторые два из них образуют тупой угол.

9. (**а**) Даны два действительных числа x, y. Покажите, что некоторая их линейная комбинация $nx + my$ с целыми коэффициентами по модулю меньше $1/1000$. (Вариант $n = m = 0$ не считается.) (**б**) Даны три вектора x, y, z на плоскости. Покажите, что некоторая их линейная комбинация с ненулевыми целыми коэффициентами имеет длину меньше $1/1000$. (**в**) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для векторов в пространстве.

10. Пусть X — произвольное множество векторов пространства E. Рассмотрим все векторы, представимые как линейные комбинации (конечного) числа векторов из X. Покажите, что (**а**) они образуют подпространство; (**б**) это подпространство является наименьшим подпространством в E, содержащим все векторы из X.

11. Пусть ненулевой вектор z является линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_n$. Покажите, что при некотором i вектор x_i является линейной комбинацией $x_1, \ldots, x_n$ (без x_i) и z.

97. Линейная независимость

Пусть дан конечный набор векторов некоторого пространства. Эти векторы называются *линейно зависимыми*, если нулевой вектор является их линейной комбинацией, не все коэффициенты которой равны нулю.

1. (**а**) В каком случае система из одного вектора линейно зависима? (**б**) Можно ли получить линейно независимую систему из линейно зависимой, добавив вектор? (**в**) ... удалив какой-либо вектор? (**г**) Верно ли, что если один из векторов системы есть линейная комбинация остальных, то система линейно зависима? (**д**) Верно ли, что если система векторов линейно зависима, то любой её вектор линейно выражается через остальные? (**е**) ... один из векторов линейно выражается через остальные?

2. Докажите, что векторы x, y, z линейно независимы тогда и только тогда, когда векторы $x+y, y+z, z+x$ линейно независимы.

3. Докажите, что если векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то любой вектор, представимый в виде их линейной комбинации, представляется в таком виде единственным образом.

4. В пространстве даны точки A, B, C. (**а**) Для каких точек O векторы OA и OB линейно зависимы? (**б**) ... векторы OA, OB, OC линейно зависимы?

5. Являются ли линейно независимыми векторы

(**а**) $\langle 1,2,3\rangle$, $\langle 4,5,6\rangle$, $\langle 7,8,9\rangle$ в $\mathbb{R}^3$? (**б**) $\langle 1,0,\ldots,0\rangle$, $\langle 0,1,0,\ldots,0\rangle$, ..., $\langle 0,0,\ldots,1\rangle$ в $\mathbb{R}^n$? (**в**) $\langle 1,0,\ldots,0\rangle$, $\langle 1,1,0,\ldots,0\rangle$, ..., $\langle 1,1,\ldots,1\rangle$ в $\mathbb{R}^n$? (**г**) $\langle 1,1,\ldots,1\rangle$, $\langle 1,2,\ldots,n\rangle$, ..., $\langle 1^{n-1}, 2^{n-1}, \ldots, n^{n-1}\rangle$ в $\mathbb{R}^n$?

6. Являются ли следующие векторы пространства функций линейно независимыми: (**а**) $1, x, \ldots, x^n$; (**б**) $1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}$; (**в**) $1, x, x^2, \sin x, \cos x$; (**г**) $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x$; (**д**) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$?

7. Какое максимальное число линейно независимых векторов (**а**) на плоскости; (**б**) в пространстве; (**в**) в $\mathbb{R}^n$?

8. (**а**) Докажите, что векторы $\langle a,b\rangle$ и $\langle c,d\rangle$ независимы в $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда независимы векторы $\langle a,c\rangle$ и $\langle b,d\rangle$. (**б**) Докажите аналогичное утверждение для векторов в $\mathbb{R}^3$ (строк и столбцов матрицы 3×3). (**в**) Докажите аналогичное утверждение для векторов в $\mathbb{R}^n$ (строк и столбцов матрицы $n\times n$).

9. Докажите, что для любых положительных чисел $a<b<c$ и для любых действительных чисел $k<l<m$ векторы $\langle a^k, b^k, c^k\rangle$, $\langle a^l, b^l, c^l\rangle$, $\langle a^m, b^m, c^m\rangle$ линейно независимы в $\mathbb{R}^3$.

10. (Продолжение) Докажите аналогичное утверждение для $\mathbb{R}^n$.

98. Размерность

Говорят, что система векторов $v_1, \ldots, v_n$ векторного пространства V *порождает* это пространство, если любой вектор из V представим в виде линейной комбинации $v_1, \ldots, v_n$. *Базисом* векторного пространства называется система *линейно независимых* векторов этого пространства, которая его порождает.

1. Приведите несколько примеров базисов (**а**) на плоскости; (**б**) в пространстве; (**в**) в $\mathbb{R}^n$.

2. Докажите, что (**а**) если конечная система векторов порождает пространство V, то можно получить базис, выбросив из неё часть векторов; (**б**) в любом векторном пространстве есть либо базис, либо бесконечная последовательность $v_1, v_2, v_3 \ldots$ линейно независимых векторов (т. е. при любом n векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы).

Теорема. Если векторы $v_1, \ldots, v_n$ порождают некоторое векторное пространство V, а $w_1, \ldots, w_k$ — линейно независимые векторы этого пространства, то $k \leqslant n$.

3. Докажите это утверждение, вспомнив, что любая однородная система линейных уравнений, где неизвестных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

4. Дайте прямое доказательство такого (более сильного) утверждения: если векторы $v_1, \ldots, v_n$ порождают векторное пространство V, а векторы $w_1, \ldots, w_k \in V$ линейно независимы, то можно так выбрать k векторов среди $v_1, \ldots, v_n$, что после замены их на $w_1, \ldots, w_k$ полученная система по-прежнему порождает V. [В частности, $k \leqslant n$.] (Указание: заменять векторы можно по очереди.)

5. Докажите, что если в матрице из n столбцов и k строк $(n > k)$ строки независимы, то можно вычеркнуть некоторые столбцы, чтобы осталось k столбцов и по-прежнему строки были независимы. (Указание: можно использовать предыдущую задачу.)

6. Докажите, что если в пространстве V есть конечный базис, то в любом другом базисе такое же число элементов.

Это число называется *размерностью* пространства V и обозначается $\dim V$. В этом случае говорят, что пространство *конечномерно*.

7. Докажите, что в конечномерном пространстве V (**а**) любая система векторов, порождающая V, имеет не меньше $\dim V$ элементов; (**б**) любая линейно независимая система векторов имеет не более $\dim V$ элементов.

8. Найдите размерность и укажите какой-нибудь базис (**а**) подпространства $x_1 + \ldots + x_n = 0$ в $\mathbb{R}^n$; (**б**) пространства многочленов степени не выше n; (**в**) пространства многочленов степени не выше n, для которых $p(1) = 0$; (**г**) …для которых $p(1) = p(2) = 0$; (**д**) …для которых $p(1) = p'(1) = 0$; (**е**) …для которых $p(1) = p(i) = 0$ ($i = \sqrt{-1}$, но многочлены всё ещё с действительными коэффициентами).

9. Докажите, что произвольный базис подпространства данного конечномерного векторного пространства V можно дополнить до базиса всего пространства V.

10. Пусть U_1, U_2 — подпространства данного пространства V. Выразите размерность наименьшего подпространства, содержащего $U_1 \cup U_2$, через

$\dim U_1$, $\dim U_2$, $\dim U_1 \cap U_2$. (Это подпространство называется *суммой* U_1 и U_2 и обозначается $U_1 + U_2$. Как мы уже знаем, оно состоит из всех векторов вида $u_1 + u_2$, где $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$.)

11. Найдите размерность пространства (**а**) многочленов от двух переменных степени не выше n; (**б**) многочленов $f(x, y)$ степени не выше n, обращающихся в нуль при $x = y$; (**в**) многочленов от k переменных степени не выше n.

12. Даны два многочлена $f(t)$ и $g(t)$. Докажите, что существует ненулевой многочлен $h(x, y)$, для которого $h(f(t), g(t)) = 0$.

13. Найдите размерность пространства, образованного таблицами 3×3, в которых суммы во всех столбцах, строках и в двух диагоналях одинаковы («магические квадраты»).

99. Контрольная работа

1. При каких λ векторы $\langle 2 - \lambda, 3\rangle$ и $\langle 3, 2 - \lambda\rangle$ линейно зависимы в $\mathbb{R}^2$?

2. Найдите размерность пространства линейных комбинаций векторов $\langle 1, 2, 3\rangle$, $\langle 4, 5, 6\rangle$, $\langle 7, 8, 9\rangle$, $\langle 10, 11, 12\rangle$, $\langle 13, 14, 15\rangle$ и укажите базис в этом пространстве.

3. Векторы $\langle a, b, c\rangle$, $\langle b, c, a\rangle$, $\langle c, a, b\rangle$ линейно зависимы в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что либо $a + b + c = 0$, либо $a = b = c$.

4. Докажите, что подпространство V конечномерного пространства W имеет размерность не больше, чем $\dim W$; при этом если $\dim V = \dim W$, то $V = W$.

5. В пятимерном пространстве есть два трёхмерных подпространства. Докажите, что они имеют общий ненулевой вектор.

6. Разрешается применять к набору векторов $x_1, \ldots, x_n$ две операции: заменять x_i на λx_i при положительном λ и заменять x_i на $x_i + \lambda x_j$ при любом λ.

(**а**) Докажите, что при этом базис остаётся базисом.

(**б**) Любой ли базис можно перевести в любой такими операциями в пространстве $\mathbb{R}^2$?

(**в**) Тот же вопрос для пространства $\mathbb{R}^3$.

100. Экстремумы и монотонность

1. (**а**) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в точках интервала (a, b), причём $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b)$. Докажите, что f неубывает на $[a, b]$ (то есть $f(x) \leqslant f(y)$ при $x \leqslant y$ для $x, y \in [a, b]$). (**б**) Что можно сказать, если $f'(x) \leqslant 0$ при $x \in (a, b)$? если $f'(x) > 0$ при $x \in (a, b)$?

2. Нарисуйте график функции $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ и укажите промежутки, на которых она возрастает/убывает.

3. Функция f определена на отрезке $[a, b]$ и достигает максимума в точке c этого отрезка. Докажите, что либо c является концом отрезка ($c = a$ или $c = b$), либо $f'(c)$ не определена, либо $f'(c) = 0$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $x(x-1)(x-2)$ при $-1/3 \leqslant x \leqslant 7/3$.

5. При каком φ выражение $5\sin\varphi + 7\cos\varphi$ достигает наибольшего значения? Чему равно это значение?

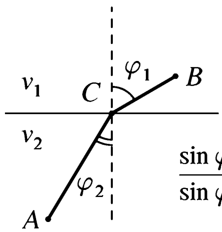
6. Найдите минимальное и максимальное расстояние от точек на кривой $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ до начала координат. (Указание: найдите максимальное и минимальное значения выражения $x^2 + 2xy + 2y^2$ на единичной окружности.)

7. Найдите минимальное и максимальное значение функции $x\ln x$ при $0 < x < 1$.

8. Найдите минимальное и максимальное значение функции $\ln x/x$ при $x > 0$.

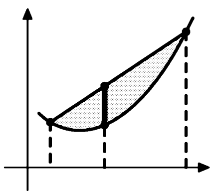
9. (**а**) Известно, что $x, y > 0$ и $x^y = y^x$. Докажите, что либо $x = y$, либо числа x, y находятся по разные стороны от e. (**б**) Решите уравнение $x^y = y^x$ в целых положительных числах.

10. (Закон преломления Снеллиуса) Скорость движения света в верхней полуплоскости равна v_1, а в нижней v_2. Как ему быстрее всего попасть из точки A в точку B? Другими словами, нужно найти такое положение точки C на границе, чтобы сумма $AC/v_2 + BC/v_1$ была минимальной. Докажите, что такая точка C существует и что для неё выполнен закон преломления (синусы углов пропорциональны скоростям).



$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

101. Выпуклость



Функция f, определённая на отрезке, интервале или луче в $\mathbb{R}$ и принимающая действительные значения, называется *выпуклой вниз*, если любая хорда её графика лежит не ниже самого графика (на соответствующем отрезке).

1. (**а**) Докажите, что для выпуклой вниз функции

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(**б**) Докажите, что для выпуклой вниз функции

$$f\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y\right) \leqslant \tfrac{1}{3}f(x) + \tfrac{2}{3}f(y).$$

(**в**) Закончите фразу: «функция f выпукла вниз, если и только если для любых точек a и b её области определения и для любых чисел $\lambda, \mu \geqslant 0$, для которых $\lambda + \mu = 1$, выполнено неравенство...». (**г**) Запишите определение *выпуклой вверх* функции.

2. Докажите, что функция $x \mapsto x^2$ выпукла вниз.

3. (**а**) Докажите, что для выпуклой вниз функции

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}.$$

(**б**) Докажите аналогичное неравенство для n слагаемых. (**в**) Докажите более общее неравенство: при любых неотрицательных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, в сумме равных единице,

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Для отрезка $[x, y]$ из области определения функции f будем называть отношение $(f(y) - f(x))/(y - x)$ *средней скоростью изменения функции f на отрезке* $[x, y]$.

4. Докажите, что если точки $a < b < c$ принадлежат области определения выпуклой вниз функции, то её средняя скорость изменения на отрезке $[a, b]$ не больше, чем на отрезке $[b, c]$. Покажите, что это свойство можно принять за определение выпуклой вниз функции.

5. Докажите, что приращение выпуклой вниз функции на отрезке заданной длины тем больше, чем правее этот отрезок.

6. Докажите, что если функция f выпукла вниз на отрезке $[0, 1]$, то $f(x) + f(1 - x)$ невозрастает на отрезке $[0, 1/2]$.

7. Докажите, что дифференцируемая на интервале функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда её производная неубывает.

8. Докажите, что график выпуклой вниз дифференцируемой функции лежит не ниже любой касательной к нему.

9. Докажите, что выпуклая вниз функция непрерывна в любой точке своей области определения (за исключением, возможно, крайних точек).

10. (**а**) Докажите, что если функция f определена на отрезке и удовлетворяет первому неравенству задачи 1 (для всех x и y), то она удовлетворяет и второму неравенству этой задачи. (**б**) Докажите, что если f к тому же и непрерывна, то она выпукла вниз.

11. Докажите, что если возрастающая непрерывная функция выпукла вниз, то обратная к ней функция выпукла вверх.

12. (**а**) Докажите, что функция $\exp\colon x \mapsto e^x$ выпукла вниз. (**б**) Выведите отсюда *неравенство Коши о среднем арифметическом и геометрическом*: среднее арифметическое $(x_1 + \ldots + x_n)/n$ неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$ не меньше их среднего геометрического $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

102. Неравенства

1. Докажите, что $e^x \geqslant 1 + x$ при всех x. (Указание: график выпуклой вниз функции лежит выше любой касательной к нему.)

2. Докажите, что если произведение чисел $x_1, \ldots, x_n > 0$ равно единице, то их сумма не меньше n.

3. Докажите, что произведение n неотрицательных чисел с данной суммой S максимально тогда и только тогда, когда все числа равны.

4. Докажите, что сумма n неотрицательных чисел с данным произведением P минимальна тогда и только тогда, когда все числа равны.

Среднее гармоническое положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ определяется как число, обратное к среднему арифметическому чисел $1/x_1, \ldots, 1/x_n$. *Среднее Квадратичное* положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ определяется как квадратный корень из среднего арифметического их квадратов.

5. Расположите среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратичное двух положительных чисел в порядке возрастания (и докажите соответствующие неравенства).

6. Тот же вопрос для n чисел.

7. Докажите, что выпуклая вниз функция, определённая на отрезке, достигает максимума в одном из концов этого отрезка.

8. Докажите, что любое треугольное сечение тетраэдра по площади не превосходит одной из граней.

9. Верно ли это для четырёхугольных сечений тетраэдра?

10. Докажите, что среднее арифметическое синусов трёх углов треугольника не больше $\sqrt{3}/2$.

11. Докажите, что среди треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет равносторонний. (Как связана эта задача с предыдущей?)

12. Докажите аналогичное утверждение для n-угольников.

13. Найдите наибольшее значение объёма тетраэдра, который умещается в коробку $3 \times 4 \times 5$.

14. (**а**) Докажите, что периметр правильного n-угольника, вписанного в данную окружность, увеличивается с увеличением n. (**б**) Тот же вопрос для площади.

15. Углы A, B, C лежат против сторон a, b, c треугольника (соответственно). Докажите, что

$$60^\circ \leqslant \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \leqslant 90^\circ.$$

16. (**а**) Докажите неравенство

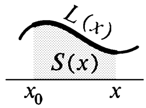
$$|x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

(**б**) Докажите неравенство

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}.$$

(**в**) Каков геометрический смысл этих неравенств? (**г**) Докажите аналогичные неравенства для $\mathbb{R}^n$.

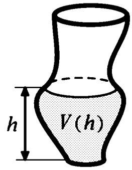
103. Как зовут?



Как называется и/или чему равна производная функции

1. $x \mapsto S(x)$, если $S(x)$ — площадь под графиком некоторой функции f (между вертикалями с координатами x_0 и x?

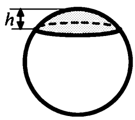
2. $x \mapsto L(x)$, если $L(x)$ — длина криволинейного участка границы в предыдущей задаче?



3. $h \mapsto V(h)$, если $V(h)$ — объём жидкости, залитый в кувшин до высоты h?

4. $V \mapsto h(V)$, если $h(V)$ — уровень жидкости в кувшине, наполненном V объёмными единицами жидкости?

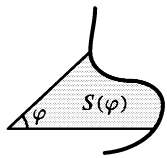
5. $t \mapsto \varphi(t)$, если $\varphi(t)$ — угол поворота колёса вокруг оси в момент времени t?



6. $r \mapsto V(r)$, если $V(r)$ — объём шара радиуса r?

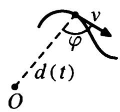
7. $h \mapsto V(h)$, если $V(h)$ — объём тела, оставшегося после срезания «крышки» высоты h с шара радиуса r?

8. $h \mapsto S(h)$, если $S(h)$ — площадь поверхности, оставшейся после срезания «крышки» высоты h со сферы радиуса r?



9. $\varphi \mapsto S(\varphi)$, если $S(\varphi)$ — площадь криволинейного сектора от оси абсцисс до направления φ?

10. $t \mapsto d(t)$, если $d(t)$ — расстояние до начала координат от движущейся по плоскости точки в момент времени t?



11. $x \mapsto U(x)$, если $U(x)$ — потенциальная энергия пружины, растянутой до длины x?

12. $t \mapsto M(t)$, если $M(t)$ — показания электросчётчика (в киловатт-часах) в момент времени t (в часах)?

13. $t \mapsto Q(t)$, если $Q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t?

14. $q \mapsto U(q)$, если $U(q)$ есть потенциальная энергия конденсатора, заряженного зарядом q?

15. Запишите (в виде интеграла) площадь «криволинейной трапеции» под графиком неотрицательной функции f между вертикалями $x = a$ и $x = b$, а также длину «кривой стороны» этой трапеции;

16. ...объём, заметаемый этой трапецией при вращении вокруг оси абсцисс;

17. ...вокруг оси ординат (считаем, что $0 < a < b$);

18. ...момент силы, возникающей, если эта трапеция сделана из однородного листа плотности ρ (масса на единицу площади) и давит на жёсткую невесомую ось абсцисс с шарниром в нуле.

19. Как найти формулы для объёма шара и конуса, считая известной площадь круга?

20. Запишите площадь поверхности вращения кривой $y = f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ вокруг оси абсцисс. Как найти площадь сферы с помощью этой формулы?

21. Запишите в виде интеграла момент инерции однородного стержня длины l и плотности ρ при вращении вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, и найдите этот интеграл.

104. Вычисление интегралов

Напомним, что *первообразной* (*неопределённым интегралом*) функции f называется функция g, для которой $g' = f$ (любая из таких функций). Часто для первообразной используют обозначение $g(x) = \int f(x)\,dx$.

1. Вычислите интегралы: (**а**) $\int x^n\,dx$ при $n \neq -1$; (**б**) $\int \frac{dx}{x}$; (**в**) $\int a^x\,dx$; (**г**) $\int \sin kx\,dx$.

2. Формула дифференцирования произведения $(fg)' = fg' + gf'$ (для дифференцируемых функций f, g) позволяет вычислить (неопределённый) интеграл от fg', если известен интеграл от $f'g$. (**а**) Запишите соответствующую формулу (*интегрирование по частям*):

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \ldots \int g(x)f'(x)\,dx.$$

(**б**) Вычислите интеграл $\int xe^x\,dx$ с помощью этой формулы (и проверьте ответ дифференцированием). (**в**) Та же задача для $\int x\cos x\,dx$ (**г**) Запишите формулу интегрирования по частям для определённых интегралов (считая, что функции f, g непрерывно дифференцируемы на некотором интервале, содержащем точки a и b):

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \ldots \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(**д**) Вычислите интеграл $\int_1^3 x\ln x\,dx$.

3. (**а**) Пусть $f_0, \ldots, f_n$ и $g_0, \ldots, g_n$ — две последовательности чисел. Запишите «дискретный вариант» формулы интегрирования по частям (называемый также *преобразованием Абеля*):

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(g_i - g_{i-1}) = \ldots \sum_{\ldots}^{\ldots} g_i(f_{i+1} - f_i).$$

(**б**) Вычислите сумму $\sum_{i=0}^{100} i2^i$ с помощью преобразования Абеля.

4. Вычислите интегралы:

(**а**) $\int x^2 \ln 3x\, dx$; (**б**) $\int x^2 \cos 2x\, dx$; (**в**) $\int \sin^4 x\, dx$; (**г**) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

5. Пусть $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\, dx$. (Формально интеграл $\int_0^\infty$ определяется как предел $\int_0^N$ при $N \to \infty$.) (**а**) Вычислите $\Gamma(0)$, $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$. (**б**) Выразите $\Gamma(s+1)$ через $\Gamma(s)$. Почему функцию $\Gamma(s)$ считают обобщением факториала?

6. Пусть $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. (**а**) Вычислите I_n, выразив I_n через I_{n-2}. (**б**) Заметив, что $I_0 > I_1 > I_2 > \ldots$, докажите *формулу Валлиса*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right).$$

Помимо формулы производной произведения, при интегрировании следует помнить о формуле для производной композиции: если $h(t) = f(g(t))$, то $h'(t) = f'(g(t))g'(t)$, — читая её «справа налево» и представляя подынтегральное выражение в виде $f'(g(t))g'(t)$ для некоторых дифференцируемых функций f и g (*замена переменной*).

7. Вычислите интегралы:

(**а**) $\int xe^{-x^2}\, dx$; (**б**) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; (**в**) $\int (2x+3)^{10}\, dx$; (**г**) $\int \sin(2x+3)\, dx$.

8. Докажите, что

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \cos x\, dx = \int_0^1 f(t)\, dt$$

для произвольной непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции.

9. (Продолжение) ...для произвольной интегрируемой на $[0, 1]$ функции.

10. Вычислите $\int e^x \sin x\, dx$.

11. (Московская олимпиада, 1997) Вычислите интеграл

$$\int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x))\, dx.$$

105. Евклидовы пространства

Пусть на векторном пространстве V задано *скалярное произведение*, то есть для любых векторов v и w задано число (v, w), и выполнены такие свойства:

- $(v, v) \geqslant 0$, причём $(v, v) = 0$ лишь при $v = 0$ (неотрицательность);
- $(v, w) = (w, v)$ (симметричность);

- $(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$; $(u, v+w) = (u, v) + (u, w)$; $(\lambda u, v) = (u, \lambda v) = \lambda(u, v)$ (билинейность).

В этом случае говорят, что на V задана структура *евклидова пространства.*

1. (**а**) Проверьте, что эти свойства выполнены для обычного скалярного произведения на плоскости и в пространстве (произведение длин векторов на косинус угла между ними). (**б**) Проверьте, что эти свойства выполнены, если в $\mathbb{R}^n$ определить скалярное произведение по формуле

$$(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle, \langle y_1, \ldots, y_n \rangle) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

(стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$).

2. Закончите определения: (**а**) два вектора в евклидовом пространстве V называются *ортогональными*, или *перпендикулярными*, если...; (**б**) *длиной* вектора v (обозначение: $\|v\|$) в евклидовом пространстве V называется число...

3. Сформулируйте и докажите *теорему Пифагора*: если векторы u и v евклидова пространства перпендикулярны, то сумма квадратов...

4. Пусть $e \neq 0$ — вектор в евклидовом пространстве E. (**а**) Покажите, что любой вектор $x \in E$ единственным образом представляется в виде суммы $x = u + v$, где u пропорционален e, а v перпендикулярен e. Вектор u называют *проекцией* вектора x на прямую, порождённую вектором e. (**б**) Докажите, что u — ближайший к x вектор этой прямой, а $\|v\|$ — расстояние от x до этой прямой.

5. (**а**) Докажите, что для любых двух векторов u, v евклидова пространства выполнено неравенство $|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$. (**б**) Закончите определение: *углом* между двумя векторами евклидова пространства называется арккосинус...

6. Докажите, что (**а**) два ненулевых ортогональных вектора не могут быть пропорциональны; (**б**) ненулевые попарно ортогональные векторы линейно независимы.

7. (**а**) Докажите, что в конечномерном евклидовом пространстве существует базис из попарно ортогональных векторов. (Указание: начните с произвольного базиса и корректируйте векторы по очереди.) (**б**) Докажите, что в конечномерном евклидовом пространстве существует *ортонормированный базис* (базис, векторы которого попарно ортогональны и имеют единичную длину). (**в**) Вычислите скалярное произведение двух векторов, имеющих в ортонормированном базисе координаты $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ и $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$. (**г**) Докажите, что если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, то координаты вектора v в этом базисе суть $(v, e_1), \ldots, (v, e_n)$.

8. Рассмотрим пространство непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.

(**а**) Покажите, что формула

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

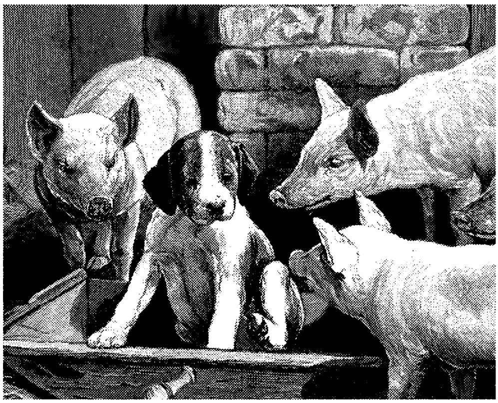
задаёт на нём скалярное произведение.

(**б**) Покажите, что функции $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$ попарно ортогональны.

(**в**) Покажите, что эти функции линейно независимы (т. е. никакая их *конечная* линейная комбинация не равна нулю).

9. (**а**) Укажите в $\mathbb{R}^n$ (со стандартным скалярным произведением) векторы $x_1, \ldots, x_{n+1}$, образующие попарно тупые углы (т. е. с отрицательными скалярными произведениями). (**б**) Докажите, что если в некотором евклидовом пространстве векторы $x_1, \ldots, x_{n+1}$ образуют попарно тупые углы, то любые n из них линейно независимы. (Отсюда следует, что в предыдущем пункте нельзя заменить $n + 1$ на $n + 2$.)

106. Разные задачи вступительных экзаменов



1. Несколько прямых на плоскости пересекаются в одной точке. Докажите, что геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до этих прямых постоянна, есть граница выпуклого многоугольника.

2. Разложите многочлен $x^{10} + x^5 + 1$ в произведение двух многочленов ненулевых степеней с целыми коэффициентами.

3. Множество M в пространстве таково, что его ортогональная проекция на некоторую плоскость — треугольник со сторонами $3, 4, 5$, а ортогональная проекция на некоторую другую плоскость — круг. Каким может быть радиус этого круга?

4. В пространстве задана точка, все координаты которой рациональны. Можно ли найти сферу, которая проходит через эту точку и не содержит других точек с рациональными координатами?

5. На плоскости даны несколько окружностей, которые проходят через одну точку и имеют в этой точке общую касательную. Докажите, что найдётся дуга окружности, которая пересекает все эти окружности в различных точках под углом 30°.

6. Укажите числа $a_1, \ldots, a_{100}$, для которых

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+100)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} \ldots + \frac{a_{100}}{x+100}.$$

7. Известно, что уравнение $b + ax = \sin x$ имеет n решений. Сколько решений может иметь уравнение $b - ax = \sin x$?

8. Даны два квадратных трёхчлена $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, принимающие при всех x положительные значения. Может ли минимум (по всем вещественным x) их отношения быть равным: (**а**) $\sqrt{2}$? (**б**) $3+2\sqrt{2}$? (**в**) $3 - 2\sqrt{2}$?

9. Найдите геометрическое место точек, из которых можно провести две касательные к параболе $y = x^2$, пересекающиеся под прямым углом.

10. Параболу $y = x^2$ повернули на 90° относительно некоторой точки. Оказалось, что полученная парабола пересекает исходную в четырёх точках. Докажите, что они лежат на одной окружности.

11. На плоскости нарисовали параболу $y = x^2$, а оси координат стёрли. С помощью циркуля и линейки восстановите оси.

12. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел n, для которых в числа n и $n + 1$ каждый простой множитель входит в степени выше первой?

13. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

14. Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ верно неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

15. На какую наибольшую степень двойки делится $(k+1)\cdot\ldots\cdot(2k)$?

16. Докажите, что если в тетраэдре суммы противолежащих рёбер равны, то суммы противолежащих двугранных углов равны.

17. Докажите, что в тетраэдре $R \geqslant 3r$.

18. Докажите, что если все биссектрисы треугольника меньше 1, то его площадь меньше $1/\sqrt{3}$.

19. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться правильный пятиугольник?

20. Постройте квадрат по четырём точкам, принадлежащим его сторонам.

21. Пространственный четырехугольник касается шара. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

22. Докажите, что если четырехугольник является вписанным и описанным, то его площадь равна корню из произведения длин его сторон.

23. Докажите, что $\sin 10^\circ$ не является рациональным числом.

24. Даны отрезки, длины которых суть a и b. Постройте отрезок длины (**а**) $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^4$; (**б**) $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

25. Найдите наибольшее значение функции $y = x^{1/4} + (1 - x)^{1/4}$.

26. Постройте четырехугольник по четырём сторонам и средней линии.

27. Можно ли представить сумму $(xy)^{200} + 1$ в виде произведения двух многочленов положительной степени?

28. Уравнения $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ не имеют действительных корней. Может ли иметь действительные корни уравнение $x^2 + |p_1 + p_2|x/2 + |q_1 + q_2|/2 = 0$?

29. Вычислите:

(**а**) $\lg(\operatorname{tg} 1^\circ) + \lg(\operatorname{tg} 2^\circ) + \ldots + \lg(\operatorname{tg} 89^\circ)$; (**б**) $\lg(\operatorname{tg} 1^\circ) \cdot \ldots \cdot \lg(\operatorname{tg} 89^\circ)$.

30. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник данной площади.

31. Решите уравнения:

(**а**) $\sin^n 10^\circ + \cos^n 10^\circ = 1$; (**б**) $\sin^{10} x \cdot \cos^6 x = 7/8$; (**в**) $\sin^7 x + \sin^{-3} x = \cos^7 x + \cos^{-3} x$; (**г**) $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0$; (**д**) $3^n + \log_2 n = 10$; (**е**) $\sqrt{107 + \sqrt{107 + x}} = x$; (**ж**) $x^2 + x^2/(x+1)^2 = 1$; (**з**) $x^{x^n} = n$, где $n \in \mathbb{N}$.

32. Известно, что $ab = 4$, $c^2 + 4d^2 = 4$. Докажите, что $(a-c)^2 + (b-d)^2$ не меньше 1,6.

33. В выпуклом четырехугольнике $ABCE$ $AB = CE$. Через середины диагоналей проведена прямая (середины не совпадают). Докажите, что эта прямая образует с прямыми AB и CE равные углы.

34. Длины последовательных сторон выпуклого четырехугольника равны a, b, c и d. Докажите, что $S \leqslant (ac + bd)/2$.

35. Даны три окружности попарно не равных радиусов. Докажите, что точки пересечения пар внешних касательных лежат на одной прямой.

36. Медианы AH, BE, CM треугольника ABC отражены симметрично относительно его биссектрис AK, BP, CT соответственно. Докажите, что прямые, содержащие полученные отрезки, пересекаются в одной точке.

37. Докажите, что если сумма двух чисел больше 2, то сумма их тринадцатых степеней больше 2.

38. Пользуясь только линейкой, проведите касательную к данной окружности из точки вне окружности.

107. Евклидовы пространства: разные задачи

1. Пусть W — подпространство конечномерного евклидова пространства V. (**а**) Докажите, что любой вектор $v \in V$ единственным образом представим в виде суммы $v = w + w^\perp$, где $w \in W$, а $w^\perp$ ортогонален всем векторам из W. (**б**) Докажите, что векторы, ортогональные всем векторам подпространства W, образуют некоторое подпространство (обозначаемое $W^\perp$) и что $(W^\perp)^\perp = W$. (**в**) Чему равна $\dim W^\perp$, если известны $\dim W = m$ и

$\dim V = n$? (**г**) Докажите, что любой ортогональный базис в W можно дополнить до ортогонального базиса в V.

2. Покажите, что в произвольном евклидовом пространстве сумма квадратов длин сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей.

3. Определите в произвольном евклидовом пространстве «расстояние» между двумя точками (векторами) и докажите неравенство треугольника.

4. Как формулируются и верны ли аналоги теоремы косинусов и теоремы синусов для произвольного евклидова пространства?

5. При каких условиях на числа a, b, c, d в двумерном пространстве с базисом e, f можно ввести скалярное произведение, для которого

$$(e, e) = a, \quad (e, f) = b, \quad (f, e) = c, \quad (f, f) = d?$$

6. В $\mathbb{R}^2$ (с обычным скалярным произведением) заданы два вектора e, f. Покажите, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} (e, e) & (e, f) \\ (f, e) & (f, f) \end{pmatrix}$$

(**а**) неотрицателен; (**б**) равен квадрату площади параллелограмма, натянутого на e и f. (**в**) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для трёх векторов в $\mathbb{R}^3$.

7. В $\mathbb{R}^2$ задано два скалярных произведения: обычное и ещё одно. Докажите, что найдётся базис, векторы которого ортогональны в смысле обоих скалярных произведений.

8. (**а**) Строки 2×2-матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что её столбцы также образуют ортонормированный базис. (**б**) Та же задача для $n \times n$-матриц.

9. (**а**) Покажите, что если векторы $e_1, \ldots, e_n$ евклидова пространства ортогональны и имеют единичную длину, то для любого вектора x выполнено *неравенство Бесселя*

$$(x, e_1)^2 + \ldots + (x, e_n)^2 \leqslant (x, x).$$

(**б**) Покажите, что это неравенство обращается в равенство, если векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис. (**в**) Применяя это неравенство к функции $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$ и к ортогональным функциям $x \mapsto \sin nx$, покажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \pi^2/6.$$

(**г**) Докажите, что это неравенство на самом деле является равенством.

108. Линейные рекуррентные соотношения

Последовательность Фибоначчи задаётся условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$.

1. Рассмотрим все последовательности, удовлетворяющие последнему равенству (а первые два члена — любые). (**а**) Как нужно такие последовательности складывать и умножать на число, чтобы получить векторное пространство? (**б**) Какова размерность этого пространства? (**в**) Укажите какой-нибудь базис в этом пространстве.

2. (Продолжение) (**а**) Найдите какую-нибудь геометрическую прогрессию (последовательность $a, aq, aq^2, \ldots$) в этом пространстве. (**б**) Укажите в этом пространстве базис, состоящий из геометрических прогрессий. (**в**) Найдите явную формулу для чисел Фибоначчи. [Ответ содержит степени золотого сечения.]

3. Рассмотрим теперь рекуррентное соотношение $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ и все последовательности, ему удовлетворяющие. (**а**) Какова размерность пространства, ими образуемого? (**б**) Укажите базис в этом пространстве. (**в**) Найдите формулу, выражающую a_n через a_0 и a_1. (**г**) Есть ли в этом пространстве базис из геометрических прогрессий?

4. (Продолжение) Та же задача для последовательностей, удовлетворяющих соотношению $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$.

5. Напишите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют все последовательности вида $a_n = P(n)$, где P — многочлен степени не выше k, и только они.

Общее определение: последовательность $a_0, a_1, \ldots$ *удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению степени* k, если при всех $n \geqslant k$ верно равенство

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

где c_i — фиксированные числа.

6. Докажите, что последовательность α удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению некоторой степени тогда и только тогда, когда её сдвиги $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ линейно зависимы (α' — это последовательность α, сдвинутая на единицу влево, с отброшенным нулевым членом).

7. Фиксируем некоторое рекуррентное соотношение степени k. Какова размерность пространства последовательностей, ему удовлетворяющих?

8. Геометрическая прогрессия со знаменателем q удовлетворяет рекуррентному соотношению тогда и только тогда, когда q является корнем некоторого многочлена. Какого? (Этот многочлен называется *характеристическим* многочленом рекуррентного соотношения.)

9. Докажите, что если характеристический многочлен не имеет кратных корней, то в пространстве решений (=последовательностей, удовлетворяющих соотношению) есть базис из геометрических прогрессий. (Указание: геометрические прогрессии с разными знаменателями линейно независимы.)

10. Докажите, если что q — кратный корень характеристического многочлена (то есть характеристический многочлен делится на $(x-q)^2$), то не только прогрессия $a_n = q^n$, но и последовательность $a_n = nq^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению. (Указание: кратный корень есть корень производной многочлена.)

11. Для произвольного рекуррентного соотношения укажите базис в пространстве его решений (всех последовательностей, ему удовлетворяющих), если известно разложение на множители характеристического многочлена.

12. Укажите явную формулу для n-го члена последовательности $\{a_k\}$, если известно, что $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$ и $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$ при $n \geqslant 3$.

13. Укажите явную формулу для n-го члена последовательности $\{a_k\}$, если известно, что

(**а**) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ при $n \geqslant 2$;

(**б**) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ и $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1$ при $n \geqslant 2$.

109. Площади

Поскольку одной из целей этого листка является строгое определение площади, то при решении задач не следует ссылаться на интуитивное понятие площади (из курса геометрии).

Пусть дано некоторое множество X (например, прямая $\mathbb{R}$ или плоскость $\mathbb{R}^2$). Семейство $\mathscr{F}$ его подмножеств называют *полукольцом*, если:

• пересечение $A \cap B$ любых двух множеств A, B из $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$;

• разность $A \setminus B$ любых двух множеств A, B из $\mathscr{F}$ представима в виде конечного объединения непересекающихся множеств из $\mathscr{F}$.

1. (**а**) Докажите, что промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы) на прямой образуют полукольцо. (**б**) Докажите, что «прямоугольники» (произведения промежутков; их 16 видов в зависимости от того, какие края включаются) образуют полукольцо на плоскости.

2. (**а**) Докажите, что для любого полукольца $\mathscr{F}$ объединение $A \cup B$ любых двух множеств $A, B \in \mathscr{F}$ представимо в виде объединения *непересекающихся* множеств из полукольца. (**б**) Докажите, что для любых множеств A, B, C из полукольца разность $A \setminus (B \cup C)$ представима в виде конечного объединения *непересекающихся* множества из полукольца.

Верен и такой общий факт:

3. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — множества полукольца (возможно, пересекающиеся). Тогда существует такой набор попарно непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_m$ из полукольца, что любое A_i есть объединение некоторых из множеств B_i. [Указание: рассуждая по индукции и добавляя A_n, мы должны доразбить имеющиеся B_i и добавить недостающие.]

Говорят, что на полукольце $\mathscr{F}$ задана *мера* μ, если каждому множеству $X \in \mathscr{F}$ поставлено в соответствие число $\mu(X)$, при этом:

• $\mu(X) \geqslant 0$ для любого множества X из $\mathscr{F}$ (неотрицательность);

• если множество X представлено в виде конечного объединения *непересекающихся* множеств $X_1, \ldots, X_k$ (запись: $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_k$), то $\mu(X) = \mu(X_1) + \ldots + \mu(X_k)$ (*аддитивность*).

4. (**а**) Докажите, что длина промежутка (расстояние между концами) является мерой на полукольце промежутков. (**б**) Приведите ещё несколько примеров мер на полукольце промежутков. (**в**) Докажите, что можно получить меру на полукольце прямоугольников, считая мерой прямоугольника произведение длин его сторон (промежутков-сомножителей).

5. Рассмотрим полукольцо $\mathscr{F}$ с мерой μ.

(**а**) Докажите, что если $A \subset B$ для множеств $A, B \in \mathscr{F}$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Докажите, что если $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathscr{F}$, то (**б**) при $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \subset B$ верно неравенство $\mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) \leqslant \mu(B)$; (**в**) при $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ верно неравенство $\mu(B) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n)$.

6. (**а**) Докажите, что мера μ на полукольце промежутков, определённая как расстояние между концами, *счётно-аддитивна*, т. е. если промежуток I есть счётное объединение непересекающихся промежутков $I_1, I_2, I_3, \ldots$, то $\mu(I)$ равно сумме ряда $\sum \mu(I_k)$. [Указание: если отрезок покрыт счётным числом интервалов, то можно выбрать конечное подпокрытие.]

(**б**) Тот же вопрос для полукольца прямоугольников и рассмотренной на нём меры (произведения сторон).

Семейство $\mathscr{F}$, состоящее из подмножеств некоторого множества X, называют *кольцом*, если пересечение, объединение и разность любых двух множеств из $\mathscr{F}$ принадлежат $\mathscr{F}$.

7. (**а**) Всякое ли кольцо является полукольцом? (**б**) Покажите, что если $\mathscr{F}$ является полукольцом, то семейство $\overline{\mathscr{F}}$, состоящее из всех конечных объединений множеств из $\mathscr{F}$, является кольцом. (**в**) Покажите, что любая мера на полукольце $\mathscr{F}$ однозначно продолжается до меры на кольце $\overline{\mathscr{F}}$. (Это значит, что существует и единственна мера на $\overline{\mathscr{F}}$, которая совпадает с исходной мерой на множествах из полукольца.)

Например, можно продолжить построенную нами меру (произведение сторон) с полукольца прямоугольников на кольцо их конечных объединений (такие объединения мы будем называть *ступенчатыми* множествами). Тем самым мы определили площадь ступенчатых множеств, но этого мало — ни круг, ни треугольник не являются ступенчатыми, и нужен следующий шаг.

Пусть фиксировано некоторое множество X, кольцо F его подмножеств и мера μ на этом кольце. (Основной пример: плоскость, ступенчатые множества и определённая на них площадь.) Опишем конструкцию, расширяющую F до большего кольца с мерой и называемую *продолжением по Жордану.*

Для произвольного множества $A \subset X$ рассмотрим все подмножества $E \subset A$ из кольца и их меры $\mu(E)$. Точную верхнюю грань этих мер (возможно, $+\infty$) называют *внутренней мерой Жордана* множества A и обозначают $\mu_*(A)$.

8. Как определить *внешнюю меру Жордана* множества A? (Она обозначается $\mu^*(A)$.)

9. Докажите, что $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$ для любого множества A.

10. Пусть множество A содержится в множестве U, которое принадлежит кольцу. Докажите, что $\mu^*(A) = \mu(U) - \mu_*(U \setminus A)$.

Если внешняя и внутренняя меры равны и конечны, то их общее значение называют *мерой Жордана* данного множества, а само множество называют *измеримым по Жордану.*

11. Закончите фразу: «множество $A \subset X$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества B и C из кольца F, для которых $B \subset A \subset C$ и...».

12. Покажите, что измеримые по Жордану множества образуют кольцо (пересечение, объединение и разность измеримых множеств измеримы).

13. (Продолжение) ... и что мера Жордана на этом кольце неотрицательна и аддитивна.

14. Какова внешняя и внутренняя мера (**а**) множества рациональных точек на отрезке $[0, 1]$? (**б**) «канторова множества» (числа на отрезке $[0, 1]$, которые могут быть записаны бесконечными троичными дробями без цифры 1). (В обоих случаях рассматривается стандартная мера на прямой.)

Проверим теперь, что мера Жордана на плоскости обладает свойствами площади, указанными в учебниках геометрии.

15. Докажите, что на плоскости (**а**) треугольники измеримы; (**б**) круги измеримы.

16. Докажите, что на плоскости ограниченное множество A измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда внешняя мера множества его граничных точек равна нулю. (*Граничная точка* множества A — это такая точка, в любой окрестности которой есть и точки множества A, и точки не из A.)

17. (**а**) Докажите, что измеримое по Жордану множество на плоскости остаётся измеримым при параллельном переносе и мера его не меняется. (**б**) Тот же вопрос для симметрии относительно вертикальной или горизонтальной оси. (**в**) Тот же вопрос для центральной симметрии.

Более сложен вопрос для поворота.

18. (**а**) Докажите, что для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными осям координат, мера Жордана равна половине произведения катетов. (**б**) Докажите, что мера единичного квадрата при любом повороте остаётся равной единице. (**в**) Докажите, что мера любого прямоугольника при любом повороте остаётся равной произведению его сторон. (**г**) Покажите, что любое измеримое по Жордану множество остаётся измеримым при повороте и мера его не меняется. [Указание. Можно разбить повёрнутый квадрат на треугольники и подсчитать их площади. Другой способ: если мера единичного квадрата, повёрнутого на данный угол, равна c, то мера любого прямоугольника и вообще любого измеримого множества при повороте также умножается на c. Пример круга показывает, что $c = 1$.]

Таким образом, все свойства площади из школьного курса геометрии доказаны.

19. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная ограниченная функция. Покажите, что f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда её подграфик (множество всех пар $\langle x, y\rangle$, для которых $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant f(x)$) измерим по Жордану, и интеграл равен мере этого множества. (Тем самым интуитивное описание интеграла становится теоремой.)

20. Докажите, что если множества $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ измеримы по Жордану и их пересечение пусто, то $\mu(A_i) \to 0$ при $i \to \infty$.

21. Докажите, что мера Жордана на прямой или плоскости счётно-аддитивна: если множество A, измеримое по Жордану, есть объединение непересекающихся измеримых по Жордану множеств A_i, то $\mu(A) = \sum \mu(A_i)$.

Важно, что мы *заранее предполагаем, что A измеримо по Жордану*: счётное объединение измеримых множеств может не быть измеримым, даже если ряд из мер сходится.

22. Приведите пример таких множеств.

Этот недостаток устранён в определении меры по Лебегу, к которому мы и переходим.

Пусть дано множество X и кольцо $\mathscr{F}$ его подмножеств со счётно-аддитивной мерой μ. Множество $N \subset X$ называется *нулевым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует его покрытие $X \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ множествами $A_i \in \mathscr{F}$ с $\sum \mu(A_i) < \varepsilon$.

Более общее определение: *верхней мерой* $\overline{\mu}(N)$ называется точная нижняя грань величин $\sum \mu(A_i)$ для всех таких покрытий. (Она определена для любого множества, но может быть бесконечной.)

23. (**а**) Докажите, что счётное объединение нулевых множеств (относительно данной меры на данном кольце подмножеств данного пространства) является нулевым. (**б**) Докажите более общее утверждение: верхняя мера объединения (счётного числа) множеств не превосходит суммы ряда из их верхних мер.

24. Докажите, что верхняя мера множества S из кольца $\mathscr{F}$ совпадает с (изначально определённой) мерой $\mu(S)$ этого множества.

Говорят, что множество $A \subset X$ *измеримо по Лебегу*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно ε-приблизить его множеством из $\mathscr{F}$, то есть существует такое $S \in \mathscr{F}$, что $\overline{\mu}(A \bigtriangleup S) < \varepsilon$.

Для измеримых по Лебегу множеств можно определить *меру Лебега* как предел мер приближающих их множеств.

25. Докажите, что это определение корректно (предел последовательности мер приближающих множеств существует и не зависит от выбора этих множеств).

26. Докажите, что объединение, пересечение и разность измеримых по Лебегу множеств измеримы по Лебегу.

27. Докажите, что нулевые множества — это в точности измеримые по Лебегу множества, имеющие меру 0.

28. Докажите, что если A_i — последовательность измеримых по Лебегу множеств и ряд из их мер сходится, то объединение всех A_i измеримо по Лебегу.

29. (Продолжение) Докажите, что если в условиях предыдущей задачи множества A_i не пересекаются, то мера их объединения равна сумме ряда из их мер.

Естественно спросить — а может быть, всякое множество (скажем, на прямой) измеримо? Оказывается, что нет (во всяком случае, если принять аксиому выбора).

30. Будем называть два числа x и y эквивалентными, если их разность $y - x$ рациональна. (**а**) Покажите, что все действительные числа разбиваются на непересекающиеся «классы эквивалентности» (числа одного класса попарно эквивалентны, разных — нет). (**б**) Выберем в каждом классе по одному представителю, лежащему между 0 и 1 (почему это возможно?); они образуют некоторое множество S. [Аксиома выбора как раз и позволяет рассмотреть такое множество.] Покажите, что можно покрыть всю прямую счётным числом сдвигов множества S. (**в**) Выведите отсюда, что множество S не является нулевым. (**г**) Покажите, что счётное число непересекающихся сдвигов множества S помещаются внутрь некоторого отрезка. (**д**) Выведите отсюда, что множество S не может быть измеримым и иметь положительную меру.

31. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — нулевое множество. Докажите, что его *сечения* $A_x = \{y \mid \langle x, y\rangle \in A\}$ являются нулевыми множествами для всех x, кроме попадающих в некоторое нулевое множество.

32. Докажите, что множество чисел отрезка $[0, 1]$, не содержащих в десятичной записи группы цифр 12345, измеримо по Лебегу, и найдите его меру.

33. Та же задача для множества чисел отрезка $[0, 1]$, у которых среднее арифметическое первых n цифр десятичной записи стремится к (**а**) 3; (**б**) 4,5.

34. Существует ли измеримое по Лебегу множество X, которое в каждом отрезке имеет половинную меру, т. е. для любого отрезка I выполнено равенство $\mu(I \cap X) = \mu(I)/2$?

Экзамен за 11 класс

Экзамен за 11 класс проводился по программе «Матшкольник» (см., например, [5]). Экзамен состоял из письменной и устной частей; представление о вопросах и задачах устной части можно получить из программы «Матшкольник», задачи письменной части были такими:

1. Приведите пример двух перестановок π и σ, каждая из которых имеет порядок 2, а их композиция $\sigma \circ \pi$ — порядок 7. (Порядок перестановки α — минимальное n, при котором α^n есть тождественная перестановка.)

2. Володя прошёл по прямой 1 км, повернул на 60° против часовой стрелки, прошёл по прямой $1/2$ км, повернул на 60° против часовой стрелки, прошёл по прямой $1/4$ км и так далее (каждый следующий отрезок пути вдвое короче предыдущего). На какое расстояние от начальной точки удалено его предельное положение?

3. (**а**) Сколько общих (комплексных) корней имеют уравнения $z^{36} - 1 = 0$ и $z^{45} + 1 = 0$? (**б**) Найдите наибольший общий делитель многочленов $z^{36} - 1$ и $z^{45} + 1$ (многочлен наибольшей степени, на который они оба делятся).

4. Обозначим через S_l симметрию относительно прямой l. Какие значения может принимать угол между прямыми l и m, если известно, что $S_l \circ S_m \circ S_l \circ S_m \circ S_l = S_m \circ S_l \circ S_m \circ S_l \circ S_m$?

5. Докажите, что векторы $\langle 1,0,0,0,0\rangle$, $\langle 0,1,0,0,0\rangle$, $\langle 0,0,1,0,0\rangle$, $\langle 0,0,0,1,0\rangle$, $\langle 0,0,0,0,1\rangle$ останутся линейно независимыми в $\mathbb{R}^5$, если заменить нули на любые числа, не превосходящие по модулю $1/1000$.

6. Докажите, что из любых пяти векторов евклидова пространства можно выбрать два, длина суммы которых не больше, чем длина суммы трёх оставшихся.

7. Пусть $P(x) = x(x-1)\ldots(x-100)$. Докажите, что множество всех точек x, для которых $P'(x)/P(x) > 1$, является объединением конечного числа непересекающихся интервалов, и вычислите сумму длин этих интервалов.

8. Найдите размерность и укажите какой-нибудь базис наименьшего подпространства, содержащего векторы $\langle 1,0,0,-1\rangle$, $\langle 2,1,1,0\rangle$, $\langle 1,1,1,1\rangle$, $\langle 1,2,3,4\rangle$, $\langle 0,1,2,3\rangle$ в $\mathbb{R}^4$.

9. Докажите, что композиция двух возрастающих выпуклых вниз функций с действительными аргументами и значениями выпукла вниз.

10. Докажите, что в любую окружность можно вписать 100-угольник, все стороны и диагонали которого имеют иррациональную длину.

11. Положим $x_0 = a$ и $x_{n+1} = f(x_n)$, где $f(x) = 2x - x^2$. При каких a эта последовательность сходится и чему равен её предел?

12. Докажите *принцип Кавальери* для измеримых по Жордану фигур: если любая горизонтальная прямая пересекает две измеримые фигуры по равным отрезкам, то меры этих фигур равны.

13. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, принимающая и положительные, и отрицательные значения. Докажите, что найдётся арифметическая прогрессия $a < b < c$, для которой $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

14. Пусть a_k — число знаков в десятичной записи числа 7^k. Найдите предел последовательности a_k/k.

15. Укажите первообразную функции $x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$.

16. Известно, что ряд $\sum_i a_i$ с положительными членами расходится. Докажите, что $a_{n+1} > a_n/2$ при бесконечно многих n.

Популярные лекции по математике

Обычно решения задач школьники не записывают, обсуждая их с преподавателями на уроках. Чтобы у них накапливался и другой опыт (написание связных математических текстов, понимание и ясное изложение услышанного результата), мы время от времени (не чаще раза в неделю) рассказывали им какой-либо математический сюжет с тем, чтобы они потом принесли письменное изложение рассказанного. В этом разделе мы приводим темы таких лекций (с комментариями).

2001 – 2002 год

Теорема Эйлера В – Р + Г = 2, её применение к доказательству непланарности графов.

2002 – 2003 год

Пентагональная теорема Эйлера. (Количества разбиений n на чётное число различных слагаемых и на нечётное число различных слагаемых равны, если n не является пятиугольным числом и отличаются на единицу иначе).

Аксиоматический метод (в двух частях). (Ошибки в геометрических доказательствах. Аксиомы абелевой группы и следствия из них.)

Часто ли встречаются простые числа? (Расходимость ряда из обратных к простым числам, простейшие следствия из этого факта.)

10-адические числа. (Определение, арифметические операции, решение уравнения $x^2 = x$.)

Суммы степеней и нахождение площадей. (Площадь под графиком функции $y = x^k$ на отрезке $[0, 1]$ равна старшему коэффициенту суммы $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ как многочлена от n. Вычисление этого коэффициента.)

Пифагоровы тройки. (Описание всех пифагоровых троек с помощью стереографической проекции окружности на прямую.)

Дизъюнктное объединение игр. (Игра «Ним». Ним-сумма. Функционал Шпрага – Гранди и анализ позиции в дизъюнктном объединении игр.)

Графы на поверхностях. (Правильные многогранники на сфере и на торе.)

Теорема Паскаля. (Доказательство с помощью теоремы Безу о множестве общих нулей двух многочленов.)

Системы линейных уравнений. (Однородная система, где число уравнений меньше, чем число неизвестных, имеет нетривиальное решение.)

Основная теорема алгебры. (Доказательство с помощью понятия индекса кривой — «Дама с собачкой».)

2003 – 2004 год

Коды и неравенство Крафта – Макмиллана. (Префиксные коды. Длины $l_1, \ldots, l_k$ кодовых слов (двоичного) префиксного кода удовлетворяют неравенству $2^{-l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{-l_k} \leqslant 1$.)

Физический маятник: как записать уравнение для него и как его численно решать (ломаные Эйлера).

Двусторонние рынки. (Устойчивые (стабильные) паросочетания. Алгоритм поиска устойчивого паросочетания.)

Теория игр. (Чистые и смешанные стратегии. Равновесие Нэша.)

Теорема Ферма для многочленов. (Доказательство с помощью теоремы Мейсона – Стоттерса (о связи числа различных корней и степеней многочленов f, g, h, для которых $f = g + h$) и без неё (в духе неверного доказательства для целых чисел, использующего разложение на множители).)

Коды, исправляющие ошибки. (Задача о коде, исправляющем k ошибок в словах длины n и передающем s битов. Пример: $\langle x, y\rangle \mapsto \langle x, x, y, y, x \oplus y\rangle$ — кодирование двух битов пятью с исправлением одной ошибки. Верхняя оценка $2^n/(n+1)$ для числа различных сообщений при кодировании с исправлением одной ошибки. Код Хемминга, достигающий этой оценки, и укладка шаров. Построение кода исчерпыванием (выбор точки вне уже построенных шаров).)

Энтропия и теорема Шеннона для канала с шумом. (Определение и элементарные свойства взаимной информации для пары случайных величин. Общее определение пропускной способности канала с шумом. Теорема Шеннона о максимальной скорости передачи информации по двоичному симметричному каналу с шумом.)

Конечные поля. (Количество элементов в конечном поле — степень простого числа p. Существование полей из p^2 и p^3 элементов. Два пути доказательства существования поля из p^n элементов (подсчёт числа неприводимых многочленов и изучение поля корней многочлена $x^{p^n} - x$).)

Избранные курсовые работы

Простые числа в прогрессии $ak+1$

Александр Буряк

Теорема 1. *Пусть $a \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число. Тогда арифметическая прогрессия $ak+1$, где $k \geqslant 1$, содержит бесконечное количество простых чисел.*

Доказательство. Многочлен со старшим коэффициентом, равным 1, назовём унитарным. Комплексный корень x степени r из 1 такой, что при любом $1 \leqslant k \leqslant (r-1)$ $x^k \neq 1$, назовём примитивным. Теперь игровое поле определено, начнём игру.
Утверждения теоремы для $a=1$ и $a=2$ выводятся из теоремы о бесконечности множества простых чисел. Поэтому считаем, что $a \geqslant 3$.

Лемма 1. *Существует многочлен $A(x)$ с целыми коэффициентами, свободный член которого равен 1, и натуральное число a_0 такие, что при всех натуральных x простые делители числа $A(x)$, большие a_0, имеют вид $ak+1$.*

Используя лемму 1, докажем исходную теорему. Построим алгоритм, который по конечному множеству P простых чисел вида $ak+1$ укажет простое число такого вида, не принадлежащее P. Существование такого алгоритма докажет утверждение теоремы. Пусть $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Положим $b = a_0! \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i$. Среди чисел, кратных b, очевидно, найдётся такое b', что $|A(b')| > 1$. Свободный член многочлена $A(x)$ равен 1, поэтому $A(b') \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b')$, т. е. $A(b')$ не делится на числа, являющиеся делителями b'. В частности, $A(b')$ не делится на числа, не превышающие a_0. Отсюда, согласно лемме 1, следует, что все его простые делители имеют вид $ak+1$. Все простые числа из множества P также являются делителями b', поэтому любой простой делитель числа $A(b')$ не принадлежит множеству P. Значит, в качестве искомого простого числа можно взять любой простой делитель $A(b')$ (у этого числа есть простые делители, т. к. $|A(b')| > 1$).

Доказательство леммы 1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_t$ — примитивные корни a-ой степени из 1. Определим многочлен

$$B(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - x_i). \tag{1}$$

Докажем, что он является искомым. Во-первых, докажем, что его коэффициенты — целые числа. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — всевозможные делители числа a, включая 1, но исключая a. Пусть

$$F_k(x) = \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant m} (x^{\text{НОД}(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})} - 1).$$

Тогда многочлен $B(x)$ равен

$$B(x) = (x^a - 1) / \left(\frac{F_1(x) \cdot F_3(x) \cdot F_5(x) \cdot \ldots}{F_2(x) \cdot F_4(x) \cdot F_6(x) \cdot \ldots} \right). \tag{2}$$

Докажем это. Достаточно доказать, что дробь в скобках является многочленом, корни которого есть все непримитивные корни a-ой степени из 1, причём все они имеют кратность 1. Все корни числителя и знаменателя есть непримитивные корни a-ой степени из 1, причём понятно, что в числителе присутствуют все непримитивные корни. Нужно доказать, что кратность каждого корня числителя на 1 больше кратности этого же корня в знаменателе (если число не является корнем многочлена, то будем говорить, что оно является корнем кратности 0). Пусть c — какой-нибудь непримитивный корень. Посчитаем разность r его кратности в числителе и в знаменателе. Пусть m — количество таких делителей d числа a, что $c^d = 1$. Теперь заметим, что множество корней многочлена $x^{\text{НОД}(d_1, d_2, \ldots, d_s)} - 1$ является пересечением множеств корней многочленов $(x^{d_1} - 1), (x^{d_2} - 1), \ldots, (x^{d_s} - 1)$. Отсюда следует, что кратность корня c в числителе равна сумме $C_m^1 + C_m^3 + \ldots$, а в знаменателе равна $C_m^2 + C_m^4 + \ldots$, откуда разность r равна

$$r = C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - C_m^4 + \ldots = 1,$$

что и требовалось доказать. Частное двух унитарных многочленов с целыми коэффициентами — также унитарный многочлен с целыми коэффициентами (это следует из возможности вычисления частного делением «в столбик»). Из этого факта и равенства (2) следует, что многочлен $B(x)$ имеет целые коэффициенты. Теперь докажем, что свободный член b_0 многочлена $B(x)$ равен 1. Из равенства (1) получаем, что

$$b_0 = (-1)^t \cdot \prod_{i=1}^{t} x_i, \qquad \text{где } x_1, x_2, \ldots, x_t \text{ — примитивные корни.}$$

Но все примитивные корни можно разбить на пары сопряжённых, так как если z — примитивный корень, то $\overline{z}$ — тоже примитивный корень, причём отличный от него (единственно возможные действительные корни 1 и -1 непримитивны при $a \geqslant 3$). Отсюда следует, что $b_0 = 1$, так как $z\overline{z} = 1$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 2. *Пусть многочлены $C(x)$ и $D(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты. Тогда существует натуральное число g_0, такое что при любом простом $p > g_0$ многочлены $C(x)$ и $D(x)$ не имеют общих корней по модулю p.*

Закончим доказательство леммы 1, используя лемму 2. Пусть h_0 — натуральное число, такое что при любом $1 \leqslant d \leqslant (a-1)$ и любом простом $p > h_0$ многочлены $B(x)$ и $x^d - 1$ взаимно просты по модулю p. Существование такой константы следует из леммы 2 и определения многочлена $B(x)$. Пусть x_0 — произвольное натуральное число. Предположим, что $B(x_0)$ делится на простое $p > h_0$. Для доказательства леммы 1 достаточно доказать, что $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ a)$. Многочлен $B(x)$ делит многочлен $x^a - 1$, значит $x_0^a - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Пусть d — наименьшее натуральное число такое, что $x_0^d - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Легко видеть, что $d \mid a$, а значит $a = d$, так как при любом $1 \leqslant d \leqslant (a-1)$ многочлены $B(x)$ и $x^d - 1$ не имеют общих корней по модулю p. Из малой теоремы Ферма следует, что $x_0^{p-1} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Значит, $a = d \mid (p-1)$, то есть $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ a)$, что и требовалось доказать. □

Доказательство леммы 2. Так как многочлены $C(x)$ и $D(x)$ взаимно просты, то существуют такие многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с рациональными коэффициентами, что $C(x) \cdot P(x) + D(x) \cdot Q(x) = 1$. (Это следует из того, что для многочленов с рациональными коэффициентами есть алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя.) Пусть n — наименьшее общее кратное знаменателей всех коэффициентов многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Положим $P_1(x) = n \cdot P(x)$, $Q_1(x) = n \cdot Q(x)$. Многочлены $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ уже имеют целые коэффициенты, причём имеет место равенство $C(x) \cdot P_1(x) + D(x) \cdot Q_1(x) = n$. Поэтому при любом простом $p > n$ многочлены $C(x)$ и $D(x)$ не могут иметь общих корней по модулю p. Значит, в качестве искомого числа можно взять n. □

Чёрные и белые клетки

Антон Подкопаев

Правила игры

Имеется клетчатая плоскость, на которой конечное число чёрных клеток (*колония*) изменяется следующим образом: на каждом ходе к каждой клетке прикладывается другая плоскость (*шаблон*) с конечным числом чёрных клеток так, чтобы одна из них (*отмеченная клетка*) совместилась с данной (шаблон имеет постоянную ориентацию), и определяется голосованием среди состояний до этого хода клеток, совместившихся с клетками шаблона, какого цвета будет эта клетка на следующем шаге (побеждает цвет простого большинства (более 50%): белый или чёрный; количество клеток в шаблоне нечётно).

Наша основная цель — научиться по шаблону определять, существует ли «вечная» конфигурация чёрных клеток. (Если существует, то шаблон будем называть *живучим*.)

Выбор отмеченной клетки

Существенен ли для того, чтобы шаблон был живучим, выбор отмеченной клетки?

Теорема 1. *Пусть в некотором шаблоне отмеченную клетку сделали обычной (*старая отмеченная клетка*), а другую клетку отметили (*новая отмеченная клетка*). Тогда ход с новым шаблоном есть композиция хода со старым шаблоном и параллельного переноса, переводящего старую отмеченную в новую.*

Доказательство. Совместим игровые плоскости до хода и после хода со старым шаблоном. Сопоставим каждой клетке второй плоскости *след шаблона* — множество клеток, когда отмеченная клетка совпадает с данной. Применим ко второй плоскости рассматриваемый параллельный перенос. Тогда для каждого следа старая отмеченная перейдёт в новую и новая отмеченная будет отражать результат голосования (положение шаблона не изменилось!). Значит, ход сделан по правилам (т.е. образ второй плоскости при переносе удовлетворяет новым правилам хода). □

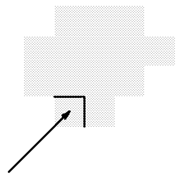
Таким образом, выбор отмеченной клетки на живучесть не влияет.

Оседлые шаблоны и критерий их живучести

Определение. Оседлым *назовём шаблон, для которого любая колония никогда не выходит за пределы некоторого многоугольника (разного для разных колоний).*

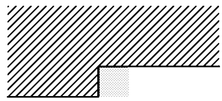
Заменим на время клетки их центрами и выберем систему координат так, чтобы они были в точках с целыми координатами.

Теорема 2. *Шаблон живуч и оседл тогда и только тогда, когда для любых двух дополнительных лучей (естественно, с* $\operatorname{tg}\phi \in \mathbb{Q}$*), выходящих из отмеченной клетки, клеток шаблона на них поровну.*



Доказательство. **Необходимость.** Рассмотрим некоторую прямую Ox и перпендикулярную ей Oy (проходящие через отмеченную точку O). Введём систему координат Oxy. Выберем в колонии точку с наименьшей ординатой, а из них — с наименьшей абсциссой.

Определение. Верхней левой полуплоскостью *назовём объединение полуплоскости* $y > 0$ *и открытого луча* $y = 0, x < 0$. *Аналогично для других полуплоскостей.*



Чтобы голосование сохранило нашу клетку, необходимо, чтобы число клеток шаблона в верхней правой полуплоскости было не меньше, чем в нижней левой, иначе *нижняя левая* клетка каждый ход будет «атакована», а т. к. шаблон оседлый, то вся колония исчезнет. Но, взяв *верхнюю правую* клетку, убеждаемся в противоположном неравенстве. Значит, числа клеток в этих полуплоскостях равны. Аналогично для нижней правой и верхней левой полуплоскостей.

Но обе суммы чисел клеток в парах полуплоскостей равны. Следовательно, в нижней правой столько же клеток, сколько в нижней левой. Значит, на *левом* луче столько же клеток, сколько на *правом.* Аналогично для других прямых.

Достаточность. Будем строить устойчивую конфигурацию, поочерёдно учитывая в ней каждую прямую.

$+ \qquad =$

Начнём с одной точки. Возьмём некоторую прямую, проходящую через отмеченную точку. Пусть a — расстояние от отмеченной до самой далёкой точки на левом луче (по этой прямой, а не пифагорово!), b — на правом луче. Прибавим к уже имеющейся устойчивой фигуре каждый раз отрезок длины $a + b$ (если НОД$(a, b) \neq 1$, то оставим на нём только каждую НОД(a, b)-ую точку). Под словом «прибавим» подразумевается *сумма Минковского*: от каждой точки фигуры в одну сторону откладывается один и тот же отрезок (со всеми точками).

Докажем, что получившаяся фигура устойчива. Действительно, через каждую точку этой фигуры проходит отрезок каждого из направлений. Тогда по этому направлению она обеспечена голосами по крайней мере половины точек (всех левых или всех правых), значит, и всего не менее половины соседей чёрные. Следовательно, фигура устойчива.

Остаётся доказать, что эта конфигурация ограничена многоугольником. Проведём между каждой парой параллельных сторон «полосы» и найдём их объединение. Если белая клетка ему не принадлежит, то все её соседи белые.

Если принадлежит, то по какому-то направлению у неё нет чёрных соседей, а по остальным — не более половины. Значит, она так и остаётся белой. Теорема доказана полностью. □

Критерий живучести произвольного шаблона

Определение. Шириной колонии по данному направлению *назовём длину её ортогональной проекции на любую прямую этого направления.*

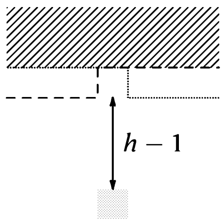
Теорема 3. *Любой (в т.ч. живучий) шаблон можно сделать оседлым с помощью замены отмеченной клетки.*

Доказательство.

Лемма 1. *При любом шаблоне ширина любой колонии по любому направлению в процессе эволюции — невозрастающая функция от времени.*

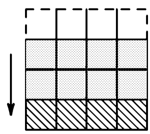
Доказательство. Посмотрим, на каком максимальном расстоянии от края проекции колонии по нашему направлению до хода появляется чёрная клетка в результате хода. Обозначим это расстояние через h, а вектор, ведущий от новой клетки к старой колонии, — через $\bar{h}$.

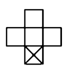
Определение. *Назовём* верхней (нижней) h-полуплоскостью *полуплоскость шаблона, полученную из пересечения верхней (нижней) левой и верхней (нижней) правой полуплоскостей переносом на* $\bar{h}$.



Возьмём ту h-полуплоскость, которая «сонаправлена» $\bar{h}$. Тогда, так как новая клетка всё-таки появится, в нашей h-полуплоскости — большинство клеток шаблона. Но отсюда видно, что все клетки, удалённые от противоположного края колонии не более, чем на $-\bar{h}$, исчезнут и ширина колонии по этому направлению не увеличится. □

Из леммы 1 следует, что любая колония может быть ограничена выпуклым многоугольником постоянного размера (возможно, перемещающимся в пространстве). Но мы пожертвуем постоянством размеров ради точности.



эволюция для шаблона 

Определение. Облегающим многоугольником *данной колонии будем называть минимальный выпуклый многоугольник со* *сторонами, параллельными заранее заданным направлениям (чаще всего прямым в шаблоне), целиком содержащий эту колонию.*

Лемма 2. *При одном и том же шаблоне все «вечные» колонии перемещаются в течение всей эволюции с одинаковой для всех постоянной скоростью (т.е. их облегающие многоугольники перемещаются на один и тот же вектор за один ход).*

Доказательство. Сначала докажем, что для каждой отдельно взятой колонии в процессе эволюции скорость постоянна. Рассмотрим её после стабилизации облегающего многоугольника, которая при условии «бессмертия» колонии непременно произойдёт. Вектор перемещения её облегающего многоугольника совпадает с вектором его перемещения, который был бы, если бы он был полностью окрашен в чёрный цвет, т.к. образ подмножества колонии всегда является подмножеством её образа. Но на каждом ходу колония оказывается в одинаковой ситуации: извне чёрных клеток, способных влиять на ход событий, нет. Значит, скорость постоянна, что и требовалось.

Пусть теперь скорости каких-то двух колоний различны. Вложим один из их закрашенных облегающих многоугольников в другой и заставим эволюционировать вместе. Рано или поздно они разойдутся, что невозможно, так как один является подмножеством другого. Противоречие. Значит, все скорости постоянны и равны. □

Расширим понятие «отмеченная клетка». В лемме 3 отмеченная клетка будет обозначать только место приложения, не будет голосовать и не всегда будет на месте чёрной клетки (а чёрных, голосующих клеток будет попрежнему нечётное число).

Лемма 3. *Если передвинуть отмеченную клетку на $-\bar{v}$, то отмеченная клетка будет на месте чёрной (т.е. будет отмеченной клеткой в обычном понимании), в противном случае ни одна колония не выживет.*

Доказательство. Чтобы полученный оседлый шаблон был живучим, необходимо равенство количеств клеток в любых двух дополнительных полуплоскостях (см. теорему 2), которое возможно лишь при совпадении отмеченной клетки с некоторой чёрной. □

Теорема 3 доказана. □

Как можно выбрать отмеченную клетку в определённом живучем шаблоне, чтобы он стал и оседлым? Очевидно, такая клетка ровно одна — это средняя клетка при следующем порядке сравнения: при некоторой системе координат Oxy большей считается точка с большей абсциссой, а при равенстве — с большей ординатой. Вообще говоря, при разном выборе Oxy могут оказаться выбранными разные точки. К счастью, так будет тогда и только тогда, когда шаблон не является живучим (приглядитесь к доказательству теоремы 2).

Получаем *критерий живучести произвольного шаблона:* шаблон является живучим тогда и только тогда, когда на любых двух дополнительных лучах с рациональными угловыми коэффициентами, исходящих из средней клетки шаблона, одинаковое число клеток.

Ограниченность коэффициента увеличения для живучего шаблона

Теорема 4. *Для каждого живучего шаблона существует (зависящее от него) число $C \in \mathbb{N}$, такое, что любая колония, состоящая из n клеток ($n \in \mathbb{N}$), в процессе эволюции никогда не состоит более, чем из Cn клеток.*

Доказательство. Сделаем шаблон оседлым — количество клеток (обозначим его через N) от этого не изменится. Покроем облегающий многоугольник рассматриваемой колонии всевозможными устойчивыми многоугольниками из доказательства достаточного условия теоремы 2, содержащими хотя бы одну из клеток этого большого многоугольника. Очевидно, таких маленьких многоугольников будет не менее N: можно зафиксировать точку приложения (как в лемме 3 теоремы 3) и прикладывать её к каждой клетке большого многоугольника; получим N маленьких многоугольников, удовлетворяющих нашему условию.

Если какой-то из маленьких многоугольников (обозначим площадь каждого через C) абсолютно белый, то он таким и останется (правила хода инвариантны относительно перемены цвета!); в противном случае любая чёрная клетка большого многоугольника сможет «поддерживать» не более, чем C маленьких многоугольников. Значит, чёрных клеток не меньше N/C и коэффициент увеличения всегда не больше C. □

Неограниченность коэффициента увеличения для неживучего шаблона

В этом параграфе мы докажем следующую теорему:

Теорема 5. *Если шаблон не является живучим, то для любого $C > 0$ найдётся такая колония из n клеток, что в некоторый момент своей эволюции она состоит по крайней мере из Cn клеток. Более того, существует такая колония, что максимальное число клеток в ней в процессе эволюции есть $O(n^2)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство.

Лемма 4. *В любом шаблоне можно выбрать отмеченную клетку и пару примыкающих к ней полуплоскостей, такие, что количества клеток в этих полуплоскостях равны, причём так, чтобы на соответствующих им взаимно дополнительных лучах было разное число клеток шаблона.*

Доказательство. Возьмём среднюю клетку шаблона при следующем порядке: сначала сравниваются абсциссы, а при равенстве — ординаты. Тогда левая нижняя и правая верхняя параллельные оси Ox полуплоскости имеют одинаковое число клеток. Будем вращать наши полуплоскости против часовой стрелки, пока на наших лучах не станет разное число клеток (такое непременно произойдёт, так как шаблон неживучий и потому не удовлетворяет критерию из §4). При этом равенство числа клеток в полуплоскостях будет, несомненно, сохраняться. Так мы получим полуплоскости, удовлетворяющие обоим условиям. □

Рассмотрим также прямую, следующую непосредственно за нашей по часовой стрелке. (Следует заметить, что все неживучие шаблоны имеют по крайней мере две прямые). Первую из прямых назовём *горизонтальной*, а вторую — *вертикальной*. Пусть $l_1 + 1$ — ширина шаблона в направлении горизонтальной прямой, $h_1 + 1$ — в перпендикулярном ему направлении, l_2+1 — в направлении вертикальной прямой, h_2+1 — в перпендикулярном ему направлении.

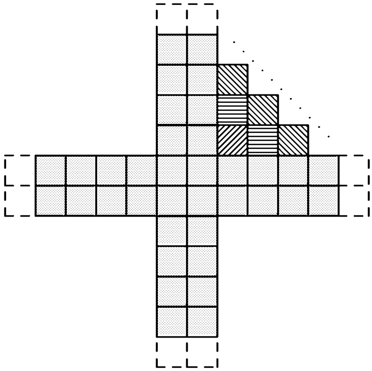
Определение. Горизонтальной (соответственно, вертикальной) полосой *назовём чёрный прямоугольник, у которого длинная сторона параллельна горизонтальной (соответственно, вертикальной) прямой, а короткая имеет длину не менее $h_1(h_2)$.*

Лемма 5. *За один ход длина полосы (вертикальной или горизонтальной) уменьшается с обоих концов не более, чем на $l_1(l_2)$.*

Доказательство. Для того, чтобы столбец полосы не исчезал по всей ширине (при наличии «прикрытия» длины не менее l_1 (не менее l_2) слева и справа), достаточно клеточного превосходства (или, во всяком случае, «ничьей») верхней и нижней полуплоскостей (в которые мы отныне будем включать клетки нашей прямой) над своими дополнениями: для любой клетки работает один из двух «комплектов» клеток шаблона — верхний или нижний. Такое превосходство имеет место и для горизонтальной прямой, и для вертикальной, так как их верхние и нижние полуплоскости (в нашем новом понимании) содержат хотя бы одну из полуплоскостей из леммы 1, а в каждой из них — половина клеток шаблона. Следовательно, каждый ход исчезает только «прикрытие». □

Лемма 6. *Существует колония, состоящая из пересекающихся и делящих друг друга пополам достаточно длинных ($O(n)$) и минимально узких горизонтальной и вертикальной полос, в процессе эволюции образующая в своём составе параллелограмм размерами не менее $l_1 n \times n$.*

Доказательство. Посмотрим на угловую клетку второго квадранта из образуемых нашими полосами, если на горизонтальной прямой в шаблоне больше клеток на правом луче, и угловую клетку четвёртого квадранта в противном случае (второй случай аналогичен первому, поэтому мы его не будем рассматривать). На первом шаге она обязательно станет чёрной, так как в нижней правой полуплоскости шаблона, как легко убедиться, находится большинство его клеток. Так будет продолжаться, пока в нижней строке квадранта не появится l_1 клеток. В этот момент начнут появляться чёрные клетки во второй снизу строке, ещё через l_1 ходов — в третьей снизу, и т.д. В конце концов заполнится весь параллелограмм, «натянутый» на этот квадрант. □



эволюция для шаблона 

Легко убедиться, что для полос при этом достаточно длины $2l_1(3n-1)$ (с каждой стороны по nl_1 «активных» и $(2n-1)l_1$ для «прикрытия» — всего понадобится $2n-1$ ходов). Площадь параллелограмма же будет не менее $n^2 l_1$, следовательно, хотя бы для нашей конструкции коэффициент увеличения для любого неживучего шаблона не ограничен, что и требовалось. □

Теорема Виета и сумма радикалов

Дмитрий Рисенберг

Теорема Виета и сумма радикалов

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[3]{\frac{-2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}.$$

Доказательство.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[3]{\frac{-2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+$$
$$+3\left(\frac{-\sqrt[3]{2}}{9}+\frac{\sqrt[3]{4}}{9}+\frac{\sqrt[3]{4}}{9}+\frac{\sqrt[3]{16}}{9}+\frac{\sqrt[3]{16}}{9}-\frac{\sqrt[3]{32}}{9}\right)-\frac{12}{9}=\sqrt[3]{2}-1. \quad \square$$

Теперь решим более общую задачу: найдём достаточные условия на действительные числа a, b и c, являющиеся корнями многочлена третьей степени x^3+px^2+qx+r, при которых формула, выражающая сумму кубических корней $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ через p, q и r, имеет относительно небольшую сложность (сложность формулы тем больше, чем больше в ней радикалов и слагаемых). По теореме Виета для многочленов третьей степени $p=-\left(a+b+c\right)$, $q=ab+ac+bc$, $r=-abc$.

Обозначим $A=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, $B=\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{bc}$.

Тогда ясно, что

$$A^3=a+b+c+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+3\sqrt[3]{a^2c}+3\sqrt[3]{ac^2}+3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}+6\sqrt{abc}.$$

Заметим, что

$$3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+3\sqrt[3]{a^2c}+3\sqrt[3]{ac^2}+3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}+6\sqrt{abc}=$$
$$=3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)=$$
$$=3\left(A-\sqrt[3]{a}\right)\cdot\left(A-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(A-\sqrt[3]{c}\right)=3AB-3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{r}+3AB,$$

откуда $A^3=-p+3\sqrt[3]{r}+3AB$, т. е. $B=\frac{A^3+p-3\sqrt[3]{r}}{3A}$, $3\sqrt[3]{r}+3AB=A^3+p$.

Аналогично,

$$B^3=ab+ac+bc+3\sqrt[3]{a^3b^2c}+3\sqrt[3]{a^3bc^2}+$$
$$+3\sqrt[3]{a^2b^3c}+3\sqrt[3]{a^2bc^3}+3\sqrt[3]{ab^3c^2}+3\sqrt[3]{ab^2c^3}+6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=$$
$$=ab+ac+bc+3\sqrt[3]{abc}\left(AB+\sqrt[3]{r}\right)=q-3\sqrt[3]{r^2}-3AB\sqrt[3]{r}.$$

Получаем уравнение на A: $\left(\frac{A^3+p-3\sqrt[3]{r}}{3A}\right)^3=q-\sqrt[3]{r}(A^3+p)$. Обозначив

$A^3 = x$, получим

$$0 = x^3 + \left(3p + 18\sqrt[3]{r}\right)x^2 + \left(3p^2 + 9p\sqrt[3]{r} + 27\sqrt[3]{r^2}\right)x + \left(p - \sqrt[3]{r}\right)^3 =$$

$$= x^3 + 3\left(p + 6\sqrt[3]{r}\right)x^2 + +3\left(p + 6\sqrt[3]{r}\right)^2 x + \left(p + 6\sqrt[3]{r}\right)^3 + \left(-27p\sqrt[3]{r} -\right.$$

$$\left. - 81\sqrt[3]{r^2} - 27q\right)x - 27p^2\sqrt[3]{r} - 81p\sqrt[3]{r^2} - 243r = \left(x + p + 6\sqrt[3]{r}\right)^3 +$$

$$+ \left(x + p + 6\sqrt[3]{r}\right)\left(-27p\sqrt[3]{r} - 81\sqrt[3]{r^2} - 27q\right) - 27p^2\sqrt[3]{r} -$$

$$- 81p\sqrt[3]{r^2} - 243r - \left(p + 6\sqrt[3]{r}\right)\left(-27p\sqrt[3]{r} - 81\sqrt[3]{r^2} - 27q\right) =$$

$$= \left(x + p + 6\sqrt[3]{r}\right)^3 + \left(x + p + 6\sqrt[3]{r}\right)\left(-27p\sqrt[3]{r} - 81\sqrt[3]{r^2} - 27q\right) +$$

$$+ 162p\sqrt[3]{r^2} + 243r + 162q\sqrt[3]{r} + 27pq.$$

Если

$$0 = -27p\sqrt[3]{r} - 81\sqrt[3]{r^2} - 27q = p\sqrt[3]{r} + 3\sqrt[3]{r^2} + q,$$

то

$$162p\sqrt[3]{r^2} + 243r + 162q\sqrt[3]{r} + 27pq =$$

$$= 81\sqrt[3]{r}\left(p\sqrt[3]{r} + q + \left(p\sqrt[3]{r} + q + 3\sqrt[3]{r^2}\right)\right) + 27pq = 81p\sqrt[3]{r^2} + 81q\sqrt[3]{r} +$$

$$+ 27pq = 27p\left(q + 3\sqrt[3]{r^2}\right) + 81q\sqrt[3]{r} = 81q\sqrt[3]{r} - 27p^2\sqrt[3]{r}.$$

Этим доказана

Теорема 1. *Если числа a, b и c удовлетворяют условию*

$$p\sqrt[3]{r} + 3\sqrt[3]{r^2} + q = 0, \tag{3}$$

то

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{p^2\sqrt[3]{r} - 3q\sqrt[3]{r}} - p - 6\sqrt[3]{r}},$$

где $p = -\left(a + b + c\right)$, $q = ab + ac + bc$, $r = -abc$.

Оказывается, зная одну тройку чисел, удовлетворяющих условию 3, можно с помощью некоторых преобразований, описанных ниже, получить ещё несколько троек, удовлетворяющих этому условию.

Лемма 2. *Если числа a, b, c удовлетворяют условию* (3), *то и числа* $-a$, $-b$, $-c$ *удовлетворяют этому условию.*

Доказательство. Очевидно. □

Более интересные примеры получаются следующим образом. Положим $a_1 = 1/a$, $b_1 = 1/b$, $c_1 = 1/c$, $a_2 = a + \sqrt[3]{abc}$, $b_2 = b + \sqrt[3]{abc}$, $c_2 = c + \sqrt[3]{abc}$, $p_i = -a_i - b_i - c_i$, $q_i = a_i b_i + a_i c_i + b_i c_i$, $r_i = -a_i b_i c_i$; всюду далее числа a, b и c отличны от нуля.

Лемма 3. *Если числа a, b, c удовлетворяют условию* (3), *то и числа a_1, b_1, c_1 тоже удовлетворяют этому условию.*

Доказательство. Поскольку

$$p_1 = -1/a - 1/b - 1/c = -\frac{ab+ac+bc}{abc} = -q/r,$$
$$q_1 = 1/ab + 1/ac + 1/bc = \frac{a+b+c}{abc} = p/r, \quad r_1 = -1/abc = 1/r,$$

легко видеть, что

$$p_1\sqrt[3]{r_1} + 3\sqrt[3]{r_1^2} + q_1 = \frac{q + 3\sqrt[3]{r^2} + p\sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r^4}} = 0. \qquad \square$$

Лемма 4. *Если числа a, b, c удовлетворяют условию* (3), *то и числа a_2, b_2, c_2 тоже удовлетворяют этому условию.*

Доказательство. Вычислим p_2, q_2, r_2:

$$p_2 = -\left(a + \sqrt[3]{abc}\right) - \left(b + \sqrt[3]{abc}\right) - \left(c + \sqrt[3]{abc}\right) = \\ = -a - b - c - 3\sqrt[3]{abc} = p + 3\sqrt[3]{r},$$

$$q_2 = \left(a + \sqrt[3]{abc}\right)\left(b + \sqrt[3]{abc}\right) + \left(a + \sqrt[3]{abc}\right)\left(c + \sqrt[3]{abc}\right) + \\ + \left(b + \sqrt[3]{abc}\right)\left(c + \sqrt[3]{abc}\right) = ab + ac + bc + \\ + 2\left(a+b+c\right)\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = q + 2p\sqrt[3]{r} + 3\sqrt[3]{r^2} = p\sqrt[3]{r},$$

$$r_2 = -\left(a + \sqrt[3]{abc}\right)\left(b + \sqrt[3]{abc}\right)\left(c + \sqrt[3]{abc}\right) = \\ = -abc - \left(ab+ac+bc\right)\sqrt[3]{abc} - \left(a+b+c\right)\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - abc = \\ = r + r + p\sqrt[3]{r^2} + q\sqrt[3]{r} = -r.$$

(Отметим, кстати, что отсюда следует, что для ненулевых чисел a, b, c числа a_2, b_2 и c_2 также отличны от нуля).

Поэтому

$$p_2\sqrt[3]{r_2} + 3\sqrt[3]{r_2^2} + q_2 = -p\sqrt[3]{r} - 3\sqrt[3]{r} + 3\sqrt[3]{r^2} + p\sqrt[3]{r} = 0. \qquad \square$$

Определим преобразования

$$\alpha\colon\ \left(a, b, c\right) \mapsto \left(a + \sqrt[3]{abc}, b + \sqrt[3]{abc}, c + \sqrt[3]{abc}\right),$$

$$\beta\colon\ \left(a, b, c\right) \mapsto \left(1/a, 1/b, 1/c\right).$$

Доказанные утверждения означают, что преобразования α и β переводят множество троек ненулевых чисел (a, b, c), удовлетворяющих условию (3), в себя, т. е., например, что тройки чисел

$$(-1/9, 2/9, -4/9); (9, -9/2, 9/4); (-9, 9/2, -9/4)$$

удовлетворяют условию (3).

Заметим, что эти преобразования переводят тройки ненулевых чисел, удовлетворяющих условию (3), в тройки ненулевых чисел, и поэтому имеют смысл их многократные композиции в любом порядке. Поэтому можно было бы попытаться с помощью этих преобразований получить из одной тройки чисел, удовлетворяющих условию (3), бесконечное число троек с тем же свойством. Оказывается, это невозможно: из любой тройки получается лишь конечное число троек; более того, среди многократных композиций встречается лишь конечное число различных преобразований. Для доказательства этого утверждения рассмотрим некоторые свойства преобразований α и β (на множестве троек ненулевых чисел, удовлетворяющих условию (3)).

Лемма 5. $\beta\left(\beta\left(a, b, c\right)\right) = \left(a, b, c\right)$.

Доказательство. Очевидно. $\square$

Лемма 6. $\alpha\left(\alpha\left(a, b, c\right)\right) = \left(a, b, c\right)$.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $r_2 = -r$. $\square$

Теорема 2. *Преобразования $\beta\left(\alpha\left(a,b,c\right)\right)$ и $\alpha\left(\beta\left(a,b,c\right)\right)$ дают одну и ту же тройку чисел, но порядок чисел, возможно, отличается на сдвиг по циклу.*

Доказательство. Пусть числа a, b, c удовлетворяют условию (3). Положим $\beta\left(\alpha\left(a, b, c\right)\right) = \left(a_3, b_3, c_3\right)$, $\alpha\left(\beta\left(a, b, c\right)\right) = \left(a_4, b_4, c_4\right)$. Вычислим p_3, q_3, r_3, p_4, q_4, r_4.

$$p_3 = \frac{1}{a+\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{b+\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{c+\sqrt[3]{abc}} = \\
= \frac{ab+ac+bc+2\left(a+b+c\right)\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{\left(a+\sqrt[3]{abc}\right)\left(b+\sqrt[3]{abc}\right)\left(c+\sqrt[3]{abc}\right)} = \\
= \frac{q+2p\sqrt[3]{r}+3\sqrt[3]{r^2}}{r} = \frac{p\sqrt[3]{r}}{r},$$

$$p_4 = \frac{a+\sqrt[3]{abc}}{a\sqrt[3]{abc}} + \frac{b+\sqrt[3]{abc}}{b\sqrt[3]{abc}} + \frac{c+\sqrt[3]{abc}}{c\sqrt[3]{abc}} = \\
= \frac{3abc+\left(ab+ac+bc\right)\sqrt[3]{abc}}{abc\sqrt[3]{abc}} = \frac{q+3\sqrt[3]{r^2}}{-r},$$

$$q_3 = \frac{1}{a+\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{1}{b+\sqrt[3]{abc}} + \\
+ \frac{1}{a+\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{1}{c+\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{b+\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{1}{c+\sqrt[3]{abc}} = \\
= \frac{a+b+c+3\sqrt[3]{abc}}{\left(a+\sqrt[3]{abc}\right)\left(b+\sqrt[3]{abc}\right)\left(c+\sqrt[3]{abc}\right)} = \frac{-p-3\sqrt[3]{r}}{r},$$

$$q_4 = \frac{a+\sqrt[3]{abc}}{a\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{b+\sqrt[3]{abc}}{b\sqrt[3]{abc}} + \\
+ \frac{a+\sqrt[3]{abc}}{a\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{c+\sqrt[3]{abc}}{c\sqrt[3]{abc}} + \frac{b+\sqrt[3]{abc}}{b\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{c+\sqrt[3]{abc}}{c\sqrt[3]{abc}} = \\
= \frac{3abc+2\left(ab+ac+bc\right)\sqrt[3]{abc}+\left(a+b+c\right)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{abc\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \\
= \frac{3\sqrt[3]{r^2}+2q+p\sqrt[3]{r}}{r\sqrt[3]{r}} = \frac{q}{r\sqrt[3]{r}},$$

$$r_3 = -\frac{1}{a+\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{1}{b+\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{1}{c+\sqrt[3]{abc}} = 1/r,$$

$$r_4 = -\frac{a+\sqrt[3]{abc}}{a\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{b+\sqrt[3]{abc}}{b\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{c+\sqrt[3]{abc}}{c\sqrt[3]{abc}} = \frac{r}{r^2} = 1/r,$$

и из условия (3) легко следует, что $p_3 = p_4$, $q_3 = q_4$, $r_3 = r_4$.

Поэтому числа a_3, b_3, c_3 и a_4, b_4, c_4 являются корнями одного и того же многочлена третьей степени, значит, они равны (многочлен третьей степени имеет не более трёх корней).

Для доказательства второй части утверждения рассмотрим выражения

$$(a_3 - b_3)(b_3 - c_3)(a_3 - c_3) \quad \text{и} \quad (a_4 - b_4)(b_4 - c_4)(a_4 - c_4).$$

По модулю они равны, а отличие в знаке зависит от того, за какое количество перестановок из (a_3, b_3, c_3) можно получить (a_4, b_4, c_4) (если это количество — чётное число, то знаки совпадают, если оно нечётное — противоположны).

$$(a_3 - b_3)(b_3 - c_3)(a_3 - c_3) = \left(\frac{1}{a+\sqrt[3]{abc}} - \frac{1}{b+\sqrt[3]{abc}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{b+\sqrt[3]{abc}} - \frac{1}{c+\sqrt[3]{abc}}\right)\left(\frac{1}{a+\sqrt[3]{abc}} - \frac{1}{c+\sqrt[3]{abc}}\right) =$$
$$= \frac{(b-a)(c-b)(c-a)}{abc\sqrt[3]{abc}}.$$

$$(a_4 - b_4)(b_4 - c_4)(a_4 - c_4) = \left(\frac{a+\sqrt[3]{abc}}{a\sqrt[3]{abc}} - \frac{b+\sqrt[3]{abc}}{b\sqrt[3]{abc}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{b+\sqrt[3]{abc}}{b\sqrt[3]{abc}} - \frac{c+\sqrt[3]{abc}}{c\sqrt[3]{abc}}\right)\left(\frac{a+\sqrt[3]{abc}}{a\sqrt[3]{abc}} - \frac{c+\sqrt[3]{abc}}{c\sqrt[3]{abc}}\right) =$$
$$= \frac{(b-a)(c-b)(c-a)\,abc}{a^2b^2c^2\sqrt[3]{abc}} = \frac{(b-a)(c-b)(c-a)}{abc\sqrt[3]{abc}}.$$

Таким образом, тройки чисел $(a_3,\ b_3,\ c_3)$ и $(a_4,\ b_4,\ c_4)$ либо совпадают, либо отличаются на сдвиг по циклу. $\square$

Применение: сумма косинусов

Применим наш метод для вычисления суммы

$$\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{5\pi}{7}}.$$

Пусть $a_5=\cos(\pi/7)$, $b_5=\cos(3\pi/7)$, $c_5=\cos(5\pi/7)$.

$$\begin{aligned}p_5&=-\big(\cos(\pi/7)+\cos(3\pi/7)+\cos(5\pi/7)\big)=\\&=\frac{-\cos(\pi/7)+\cos(3\pi/7)+\cos(5\pi/7)}{\sin(\pi/7)}\sin(\pi/7)=\\&=-\frac{\sin(2\pi/7)+\sin(4\pi/7)+\sin(-2\pi/7)+\sin(6\pi/7)+\sin(-4\pi/7)}{2\sin(\pi/7)}=\\&=-\frac{\sin(\pi/7)}{2\sin(\pi/7)}=-1/2.\end{aligned}$$

Аналогично можно установить равенства

$$q_5=-1/2,\qquad r_5=1/8.$$

Поэтому $p_5\sqrt[3]{r_5}+3\sqrt[3]{r_5^2}+q_5=-1/4+3/4-1/2=0$, т. е. числа $\cos(\pi/7)$, $\cos(3\pi/7)$ и $\cos(5\pi/7)$ тоже удовлетворяют условию (3), и простое вычисление даёт равенство

$$\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{5\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{7}-5}{2}}.$$

Отчёт об изучении кривой дракона

Александр Никитин
Руслан Савченко

Определение кривой дракона

Сложим бумажную полоску пополам, потом ещё раз пополам, потом ещё и т.д. Затем развернём её так, чтобы в местах сгибов получились прямые углы, и положим на плоскость. Вид сверху будет ломаной; она называется *кривой дракона*.

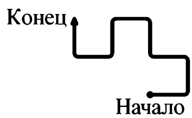


Рис. 1. Кривая дракона LLL.

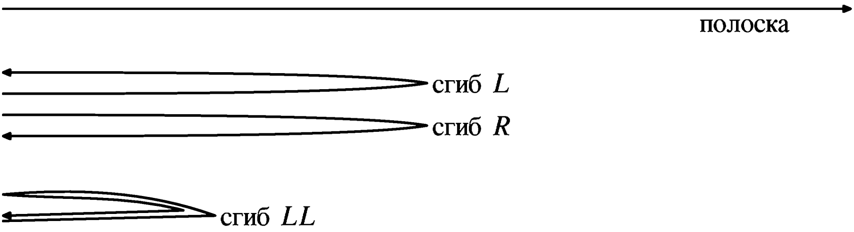


Рис. 2. Процесс складывания полоски

На рис. 1 показана кривая дракона, имеющая 8 *рёбер* и 9 *вершин*; нам будет удобно изображать углы закруглёнными (особенно если несколько звеньев ломаной имеют общую вершину). Эта кривая, как мы увидим дальше, имеет имя LLL.

Назовём число складываний полоски *степенью* кривой дракона; кривая степени n имеет 2^n рёбер. На каждом шаге можно складывать в одну или другую сторону, поэтому существуют различные кривые одной и той же степени.

Удобно считать, что на полоске выбрано направление (таким образом, у неё есть *начало* и *конец*) и что начало неподвижно. Сгиб (поворот второй половины на 180°) по часовой стрелке обозначается R, а против часовой стрелки — L. Записав буквы L и R в порядке выполнения действий, получим *имя* кривой дракона. Иногда мы будем говорить «кривая A» вместо «кривая с именем A».

Все рёбра кривой имеют одинаковую длину; соседние образуют прямой угол. Поэтому кривую можно положить на клетчатую бумагу так, чтобы все рёбра лежали на линиях сетки (рис. 3). Такую сетку назовём *сеткой* кривой дракона.

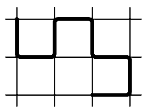


Рис. 3. Сетка кривой LLL.

Пройдём по нашей кривой дракона из начала в конец, записывая при каждом повороте направо r, а при каждом повороте налево — l. Полученную последовательность назовём *записью* кривой. (Например, кривая на рис. 3 имеет запись $llrllrr$.) Можно представлять себе получение записи так: идя по сложенной (и ещё не развёрнутой) полоске, мы поворачиваем в сгибах на 180° через левый или через правый бок; соответствующая последовательность букв l и r будет записью кривой.

Получение записи кривой дракона по имени

Имя однозначно определяет кривую и, следовательно, её запись. Как же получить запись по имени? Это можно сделать индуктивно, и даже двумя способами: читая имя слева направо или справа налево. Другими словами, зная запись кривой с именем A, можно получить записи кривых αA и $A\alpha$ (здесь α — это R или L). Это делается следующим образом.

Получение записи и изображения кривой с именем αA

Пусть кривая с именем A имеет запись a. Тогда записью кривой с именем LA будет слово $al\overline{a}$, а записью кривой с именем RA будет слово $ar\overline{a}$ (где через $\overline{s}$ обозначается слово, которое получается из s, записанного в обратном порядке, заменой $r \leftrightarrow l$). Действительно, представим себе, что у нас имеется сложенная бумажная полоска, которую мы только собираемся разворачивать.

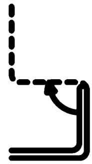


Рис. 4. Две копии кривой с именем L после разворота дают кривую с именем LL.

Развернём полоску, не трогая самого первого сгиба (как на рис. 4). Мы получили кривую A, а сгиб α остался неразвёрнутым. Когда мы его развернём, две копии кривой A разделятся, образовав прямой угол в точке сгиба, и получится кривая с именем αA. Её запись делится на части: шли по кривой, дошли до конца, сделали поворот α и пошли по этой же кривой назад, проходя повороты в обратном порядке (при проходе назад левый поворот становится правым и наоборот).

Получение записи и изображения кривой с именем $A\alpha$

Оказывается, что запись кривой $A\alpha$ можно получить слиянием исходной записи с (конечной) последовательностью $lrlrl\ldots$ (при $\alpha = L$) или $rlrlr\ldots$ (при $\alpha = R$). Например, переход от кривой LLL к кривой $LLLR$ выглядит так:

запись кривой LLL:		l		l		r		l		l		r		r	
последовательность:	r		l		r		l		r		l		r		l
запись кривой $LLLR$:	r	l	l	l	r	r	l	l	r	l	l	r	r	r	l

В самом деле, запись кривой с именем A — последовательность поворотов (на 180°) вдоль полоски, сложенной в соответствии с A. Согнём полоску ещё раз, добавив сгиб α.

При этом запись изменится: старые сгибы будут чередоваться с новыми, причём новые повороты будут по очереди то налево, то направо. (Это особенно понятно в тот момент, когда мы разогнули последний сгиб до прямого угла; мы ходим по согнутой полоске туда-сюда: в одну сторону при этом поворот у нового сгиба будет левым, а в другую — правым.)

Что же происходит при этом с самой кривой? В результате последнего сгиба каждое ребро старой кривой делится на две половины, образующие прямой угол (рис. 5), и переход от старой кривой к новой заменяет гипотенузу двумя катетами: над каждым ребром старой кривой надстраивается прямоугольный равнобедренный треугольник, и направления этих *надстроек* чередуются (рис. 6).

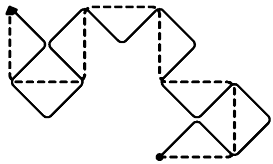


Рис. 5. Из кривой LLL получается кривая $LLLR$.

При этом расположение надстроек (слева или справа от ребра старой кривой) чередуется одновременно с направлением самих рёбер старой кривой (горизонтальное или вертикальное).

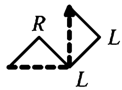


Рис. 6. Надстройки на рёбрах кривой дракона.

Заметим, что масштаб изображения при таком переходе изменяется в $\sqrt{2}$ раз, а сетка поворачивается на 45°.

Почему кривая дракона не проходит дважды по одному и тому же ребру сетки

Будем доказывать по индукции более сильное утверждение: (i) кривая дракона не проходит дважды по одному ребру, и (ii) если два её перпендикулярных ребра проходят через одну и ту же вершину сетки, то одно из них входит в эту вершину, а другое из неё исходит.

Для кривых первой степени это очевидно.

Шаг индукции: пусть кривая с именем A обладает этим свойством. Докажем его для кривой с именем $A\alpha$ (где α — это L или R).

Новая кривая целиком расположена в сетке, образованной диагоналями прежней сетки. Поэтому у каждого ребра новой сетки есть только два возможных способа образования (из двух смежных сторон прежней сетки, если они были рёбрами старой кривой (с подходящей ориентацией). Но, по предположению индукции, возможные рёбра-прародители направлены по-разному относительно общей вершины: одно входит, а другое исходит. Кроме того, одно из них горизонтально, а другое вертикально, поэтому надстройка у одного ребра слева, а у другого — справа. Легко понять, что в такой ситуации надстройки пересечься не могут (рис. 7).

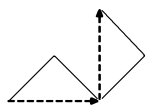


Рис. 7. Надстройки перпендикулярных рёбер не совпадут.

Осталось доказать сохранение свойства (ii). Вершины у новой кривой дракона бывают двух типов: оставшиеся от предыдущей кривой и вершины надстроек. В первом случае сохранение свойства (ii) следует из (i).

Второй случай (новые вершины): рёбра одной надстройки, очевидно, направлены в разные стороны; если же одна точка служит вершиной сразу двум надстройкам, то родители надстроек противоположно направлены (иначе бы надстройки не пересеклись), и свойство (ii) сохраняется (см. рис. 8).

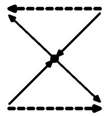


Рис. 8. Взаимно перпендикулярные рёбра надстроек.

Бесконечные кривые дракона

Пусть дана бесконечная влево последовательность $\ldots\alpha_n\ldots\alpha_2\alpha_1$ из букв R и L. Для всякого m слово $A(m) = \alpha_m\ldots\alpha_2\alpha_1$ является именем некоторой кривой дракона. При этом запись кривой с именем $A(m)$ является началом записи кривой с именем $A(m+1)$. Поэтому каждая следующая кривая продолжает предыдущую. Объединение их всех образует *бесконечную кривую дракона с именем* $\ldots\alpha_n\ldots\alpha_2\alpha_1$. Ясно, что бесконечная кривая дракона не проходит дважды по одному ребру. В самом деле, иначе некоторое её конечное начало проходило бы дважды по этому ребру.

Выпустим из одной точки четыре одинаковые бесконечные кривые дракона (в четырёх направлениях). Легко заметить, что эти четыре кривые не имеют общих рёбер. В самом деле, если общее ребро есть у двух соседних кривых, то оно будет общим для некоторых их конечных начал с именами $A(k)$. Эти два начала вместе образуют кривую с именем $\beta A(k)$ (где β равно L или R), а никакая кривая дракона не может проходить дважды по одному ребру. Если же пересекаются кривые, выходящие в противоположных направлениях, то одна из двух других кривых находится внутри замкнутого контура, что невозможно, т. к. она бесконечна.

Итак, эти четыре кривые пересечься не могут. Оказывается, что (за некоторыми исключениями, о которых ниже) они покрывают всю сетку. Чтобы убедиться в этом, мы докажем, что (за некоторыми исключениями) четыре кривые с именем $A(i)$, выпущенные из одной точки, полностью покрывают квадрат с центром в этой точке (и чем больше i, тем больше сторона квадрата). При доказательстве имя $A(i)$ удобно читать слева направо (как в предыдущем разделе), применяя следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть четыре кривые с именем S, выпущенные из одной точки, покрывают квадрат размера $2l \times 2l$ с центром в начальной точке. Пусть $S' = S\alpha\beta$ получается из S добавлением справа двух произвольных букв (L или R). Тогда четыре кривые с именем S', выпущенные из одной точки, покрывают квадрат размером $(4l-2)\times(4l-2)$ с центром в начальной точке.*

Доказательство. Из общего начала O выходят четыре кривые с именем S. Нам удобно изменить ориентацию рёбер на двух из них (противоположных);

тогда четыре кривые можно соединить в две кривые на единицу большей степени (мы делали это, доказывая отсутствие общих рёбер); в этих объединённых кривых точка O будет серединой.

Заметим, что после этого соблюдается рассмотренное выше правило: из двух перпендикулярных рёбер с общей вершиной одно является входящим, а другое исходящим. В самом деле, рёбра противоположных кривых не имеют общих концов, а рёбра соседних кривых можно считать рёбрами одной, вдвое более длинной, кривой. В частности, если четыре ребра ограничивают квадрат сетки, то их направления согласованы (они образуют цикл).

Переход от S к $S\alpha$ соответствует надстройке рёбер у S, и правила согласования направления ребра и направления надстройки (и то, и другое чередуется вдоль кривой) гарантируют, что из четырёх рёбер цикла два противоположных надстраиваются внутрь, а два других — наружу. (Здесь существенно, что у двух кривых из четырёх изменена ориентация.) Таким образом, если имелся цикл из рёбер (сторон квадрата), то при добавлении надстроек (т.е. при переходе от S к $S\alpha$) диагонали этого квадрата будут покрыты четырьмя новыми рёбрами.

При следующем переходе (от $S\alpha$ к $S\alpha\beta$) у каждого из этих рёбер появится надстройка; при этом мы уже знаем, что пересекаться они не могут, то есть возможна либо конфигурация рис. 9, либо симметричная ей. В обоих случаях средние линии квадрата покрыты полностью, а стороны — наполовину.

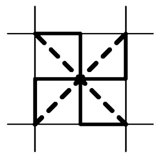


Рис. 9. Надстройки на диагоналях квадратика.

Вспомним условие леммы: по предположению имеется квадрат $2l \times 2l$ на сетке, в котором все рёбра сетки покрыты кривыми с именем S. После перехода к $S\alpha\beta$, как мы знаем, средние линии всех квадратов сетки внутри $(2l \times 2l)$-квадрата будут покрыты. Также будут покрыты и все стороны этих квадратов (за исключением части границы большого квадрата): к каждой стороне примыкают два квадрата сетки, покрывающих её наполовину (и без пересечений). Таким образом, кривые с именами $S\alpha\beta$ покрывают квадрат $4l \times 4l$, за исключением (возможно) периметра, так что квадрат $(4l - 2) \times (4l - 2)$ заведомо покрыт полностью. Лемма 1 доказана.

Прежде чем возвращаться к бесконечному влево имени и соответствующей кривой, сделаем ещё одно наблюдение:

Лемма 2. *Если имя кривой состоит из пяти символов и начинается на RR или LL, то четыре таких кривых покрывают квадрат* 4×4.

Доказательство. Это можно проверить перебором всех 32 возможностей. Перебор можно сократить, если заметить, что кривые RR и LL дают похожие картинки, а также что в некоторых из случаев четырёх символов уже

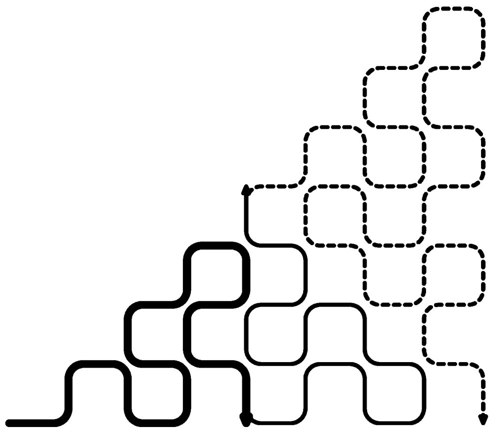


Рис. 10. Двукратная надстройка сохраняет вид кривой

достаточно.

Рассмотрим теперь бесконечное влево имя и соответствующие бесконечные кривые. Тут возможны два принципиально разных случая:

• имя кривой $(\ldots \alpha_3\alpha_2\alpha_1)$ содержит бесконечное число подслов RR или LL. В этом случае четыре кривые покрывают всю сетку: по лемме 2 такое подслово даёт через три шага измельчения (каждый шаг соответствует добавлению справа одной буквы, то есть построению надстроек на рёбрах) квадрат 4×4, который затем (по лемме 1) даёт квадрат 6×6, 10×10 и так далее.

• имя кривой имеет вид $\ldots RLRLRL\alpha_n \ldots \alpha_1$ (чередующиеся L и R с произвольным окончанием). В этом случае четыре таких кривых не покрывают плоскость.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим кривую $\ldots LRLRLR$ и заметим, что она целиком лежит в угле в 45°. В этом легко убедиться по индукции: кривая такого типа заполняет прямоугольный равнобедренный треугольник, начинаясь в остром угле и кончаясь в прямом, и если продолжить построение на один шаг, то два таких треугольника вместе образуют больший треугольник (рис. 10); на следующем шаге получается треугольник, ориентированный как исходный, но вдвое большего размера, что и завершает шаг индукции.

Что произойдёт при добавлении к записи $\ldots LRLRLR$ произвольного окончания? Над бесконечной кривой, помещающейся в угол 45°, выполняется конечное число шагов надстройки; ясно, что полученная кривая выходит за пределы этого угла на ограниченное расстояние и потому также может быть целиком заключена в такой угол. Следовательно, для заполнения плоскости нужно как минимум восемь таких кривых (так как $360/45 = 8$).

Таким образом, мы получили полный ответ:

Теорема. *Если бесконечная влево запись бесконечной кривой дракона содержит бесконечное число фрагментов RR или RL, то четыре таких кривые, выпущенные из одной точки, покрывают плоскость (точнее, сетку) без перекрытий и наложений. В противном случае четыре таких кривые (как их ни располагай) плоскость покрыть не могут.*

Помимо этого, наше описание кривых $\ldots RLRLRLR$ позволяет заметить, что такими кривыми можно-таки замостить плоскость, только их нужно не четыре, а восемь (рис. 11).

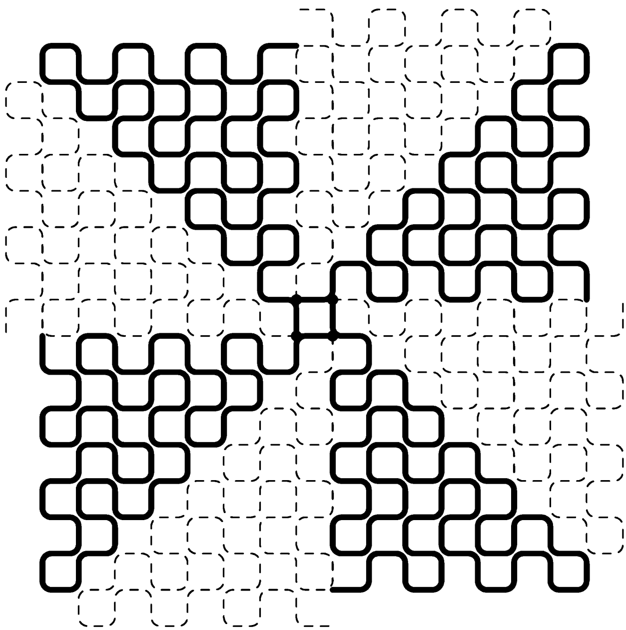


Рис. 11. Восемь кривых вида $\ldots RLRLRL$ также заполняют плоскость.

Избранные решения и комментарии к задачам

Система обозначений такова: номер $m.n$ имеет решение n-ой задачи в m-ом листке.

1.6. Да, можно стартовать с равенства $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, после чего несколько раз заменять дробь $\frac{1}{n}$ с наибольшим знаменателем на $\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$, увеличивая тем самым число слагаемых на 2.

1.7. Заметим, что $\frac{1}{3} + \frac{2}{21} = \frac{3}{7}$, $\frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{2}{21}$, $\frac{1}{35} + \frac{1}{15} = \frac{2}{21}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{45} = \frac{1}{3}$. Отсюда видно, что

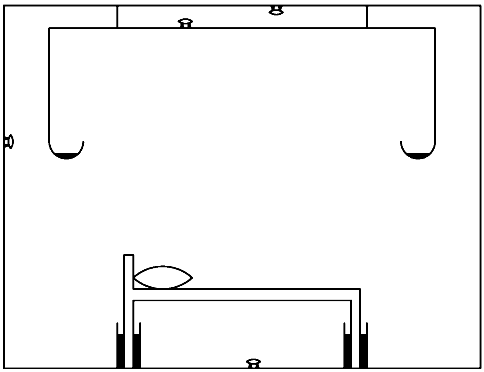
$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{231}.$$

Здесь 9 слагаемых, поэтому можно аналогично задаче 1.6 заменить самую маленькую дробь на сумму 9 дробей, что даст как раз 17 дробей.

4.6. Одинаково — как было бы иначе устроено пересечение? (Заметим, что примеры пересечения есть; указание такого примера — хорошая задача по «москвоведению».)

5.8. Нет. Если бы это было возможно, то сумма длин дуг на выпуклых участках границы была бы равна сумме длин дуг на вогнутых участках, что неверно для круга.

6.6. Можно изолировать ножки кровати ёмкостями с водой, а над кроватью разместить балдахин с загнутыми внутрь краями, где тоже налита вода (см. рисунок).



(кружок в МЦНМО) Собрав достаточное количество купюр, фирма начала звонить по их номерам, предлагая приобрести такую купюру.

7.7. Нужно осуществлять деление пополам: в первом пункте достаточно просто спрашивать «Больше ли твоё число, чем...», на каждом шаге уменьшая длину отрезка вдвое; во втором пункте можно отгадывать по одной двоичные цифры числа.

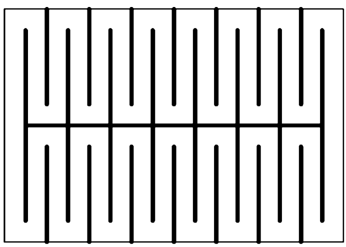
(кружок в МЦНМО) Например, «Я загадал одно из двух чисел: 1,5 и 2,5. Твоё число больше?».

13.1. Первый: он кладёт монету в центр стола и дальше придерживается симметричной стратегии.

13.2. Конечно, к плохо подстриженному — ведь именно он стриг второго.

13.4. Влево: двери у него с «невидимой» стороны.

13.5. Вырезав подходящее отверстие, можно развернуть лист в очень длинную ленту (см. рисунок).



13.7. Можно получить $\mathrm{VI} \neq \mathrm{I}$ или $\mathrm{V}\overline{\mathrm{I}\ } = \mathrm{I}$, т. е. $\sqrt{1} = 1$.

13.8. Ни одной, написано $|1| = 1$.

13.9. Так можно представить любое число, ведь $a = (a-1)^1 + 1^{a-1}$.

28.3. (**а**) Можно: $((2 : ((3 : 5) : 7)) : 11) : 13$. (**б**) Нельзя: как ни расставляй скобки, число 3 всегда будет в знаменателе. (**в**) Например, $(2 : (3 : 5)) : 7 = 2 : (3 : (5 : 7)))$ (потом можно добавить 11 и 13).

28.4. (**а**) Можно получить те и только те комбинации множителей, в которых 2 в числителе, а 3 в знаменателе. Формально это надо доказывать индукцией по числу множителей, что требует аккуратного рассуждения. Если надо расставить в $a : b : c : \ldots$ скобки так, чтобы c было в числителе (напомним, что a в числителе, а b в знаменателе), то можно применить предположение индукции, считая внешней операцией $a : [b : c : \ldots]$. Если $c, d, \ldots, e$ должны быть все в знаменателе, а f в числителе, то можно расставить скобки так: $((a : b) : c) : d) : [e : f : \ldots]$, где квадратная скобка строится по предположению индукции. Поэтому всего дробей $2^4 = 16$ (каждое из чисел $5, 7, 11, 13$ может быть в двух позициях).

(**б**) Из решения предыдущего пункта следует, что произведение есть $(2/3)^{16}$.

29.5. Каждый сделал не более 8 рукопожатий — поэтому все варианты от 0 до 8 реализованы. Тот (та), кто сделал(а) 8 рукопожатий, пожал руку всем, кроме своей жены (мужа), поэтому 0 рукопожатий сделала (сделал) именно его жена (муж). Аналогично, у того (той), кто сделал 7 рукопожатий, жена (муж) сделала (сделал) одно, у того (той), кто 6 — два, у того (той), кто 5 — 3. Значит, миссис Браун сделала 4 (это единственное, что осталось).

31.4. Посмотрим на остатки по модулю 7: они будут 4, 6, 5, 2, 0, поэтому 500003 составное. (Предыдущее число тоже составное, оно делится на 31, но это трудно обнаружить.)

34.3. Если расстояние равно 1, скорость — 1, и скорость ветра — x, то в первом случае время полёта равно 1, во втором $2/(1-x^2)$, а в третьем $2/\sqrt{1-x^2}$, то есть во втором требуется большего всего всего времени, затем идёт третий случай, а меньше всего времени потребуется в первом случае.

34.4. Если фигура невыпуклая, её можно заменить на фигуру с большей площадью и тем же периметром. Поэтому фигурой максимальной площади будет прямоугольник. Среди прямоугольников с периметром не более 19 наибольшую площадь имеет прямоугольник 5×4 (площадь равна 20, периметр — 18). Периметр 19 невозможен по соображениям чётности.

34.5. 31 цифра. С одной стороны, $2^{100} = 1024^{10} > 10^{30}$, а значит, число содержит не менее 31 цифры. С другой стороны, $1024^{10} = 10^{31} \cdot (1{,}024)^{10}$, а $1{,}024^{10} < 1{,}1^{10} < 10$, так что 31 цифры достаточно.

34.9. Любые сомножители, большие 3, можно разбить на меньшие, не уменьшая произведения; сомножители 1 бесполезны, так что можно считать, что среди сомножителей встречаются только двойки и тройки. Если среди сомножителей есть три двойки, их можно заменить на две тройки (произведение только увеличится). Так что наибольшее произведение будет $3^{12}2^2$.

34.10. Сравнивая последовательность Фибоначчи с геометрической прогрессией $1, 2, 4, 8, \ldots$, можно заметить, что её сотый член не превосходит 2^{99} (см. задачу 34.5). С другой стороны, за членом x через один идёт член, не меньший $2x$, поэтому $2n+1$-ый член последовательности Фибоначчи не меньше 2^n, а $2^{49} = 2^9 \cdot (2^{10})^4 > 100 \cdot 1000^4$ имеет не менее 15 цифр в десятичной записи.

34.11. Умножая число, большее единицы, на $1{,}001$, мы увеличиваем его как минимум на $0{,}001$. Поэтому годится $n = 10\,000$.

34.12. Поскольку $0{,}999 \times 1{,}001 < 1$, годится то же n, что и в задаче 11.

34.13. Назовём точку x доступной, если в неё можно привезти сколь угодно большой запас бензина, закончив путь в x. Ясно, что если точка x доступна, то и точка $x + 10$ доступна (из A литров в точке x не менее $3A/5$ литров можно перевезти в точку $x + 10$, так как на перевозку уходит не более $2/5$ бензина в баке). Следовательно, любая точка доступна, то есть можно добраться до края пустыни.

34.14. Решение без оценки времени до остановки: первый (стоящий с краю) солдат поворачивается не более одного раза — повернувшись лицом наружу, он более не поворачивается. Аналогично, после того, как первый солдат перестал поворачиваться, второй от края солдат может совершить не более одного поворота, и т.д.

Оценка 2^n: изображая вправо смотрящего единицей, а влево смотрящего — нулём, мы видим, что каждый шаг заменяет несколько групп 10 на 01, тем самым уменьшая число (которое изначально не больше 2^n).

Оценка n^2: снова представим последовательность солдат набором из n нулей и единиц. Удобно представлять себе, что 1 и 0 сортируются «самообслуживанием»: нули стремятся влево, а единицы вправо. Первый нуль займёт предельное положение за n шагов (или меньше), после этого ещё через n шагов своё место непременно займёт второй, и так далее — всего менее n^2 шагов.

Точная оценка есть $n - 1$. Уменьшить её нельзя — ровно столько шагов потребуется, если в самом начале единственный нуль стоит справа. Покажем, что $(n - 1)$ шагов достаточно для любой начальной конфигурации.

Лемма: k-й слева нуль встанет на своё место с задержкой не более $(k-1)$ по сравнению с беспрепятственным движением. В самом деле, для первого нуля движение беспрепятственное; k-му нулю может помешать $(k - 1)$-й, если они окажутся рядом до окончания движения $(k - 1)$-го налево. Но в этом случае расстояние между ними после встречи будет не более единицы, и потому k-й нуль встанет на своё место через шаг после $(k-1)$-го.

Из леммы видно, что рост задержки компенсируется сокращением пути. Таким образом, каждому нулю потребуется не более $(n-1)$ шагов, чтобы встать на предназначенное ему место.

34.18. Любые два разных множества A и B гирь имеют разный вес, поскольку иначе $A \setminus B$ и $B \setminus A$ друг друга бы уравновешивали. Поэтому все веса — различные целые числа, а число подмножеств больше миллиона.

34.19. $763 \cdot 852 \cdot 941$. В самом деле, 9 должно стоять в разряде сотен (иначе переставим туда и увеличим произведение). Если 8 не в разряде сотен другого числа, то обмен приводит к увеличению (поскольку относительное влияние увеличения в старшем разряде больше, чем в любом другом). То же для 7. Теперь видно, что 6 надо поставить в разряд десятков, причём туда, где это (относительно) важнее всего, то есть к 7 и так далее.

35.5. Есть три варианта ответа (в зависимости от того, какие две вершины не смежные): $(0,-2)$, $(0,0)$; $(2,4)$, $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$; $(-2,0)$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

35.8. Задача сформулирована некорректно — решений нет. Чтобы противоречия не было, нужно заменить свободный член на 6 (идея была в том, что школьники должны это сами заметить)! Ответ (при коэффициенте 6): $a=-4$, $b=1$.

36.1. Площадь такого треугольника равна $|ps-rq|/2$. Поэтому его площадь кратна $1/2$. Легко заметить, что минимум $1/2$ достигается.

36.2. Площадь равна $(l+n)/2+k-1$.

36.4. Указание: разрежьте его на слои толщиной 1, каждый из которых представляет собой трапецию или треугольник.

36.5. $1/6$. Действительно, минимум обязан, очевидно, достигаться на тетраэдре. А для объёма тетраэдра есть формула, выражающая его через координаты вершин. Эта формула напоминает формулу из задачи 1, только в знаменателе будет не 2, а 6. Отметим, что формулы, аналогичной формулы для плоскости, нет: существует тетраэдр, внутри и на границе которого нет целых точек, кроме вершин, объём которого сколь угодно велик!

38.3. $8!$.

38.10. Если мы нанизываем бусины на незамкнутую нить, то имеется $15!/(3!\cdot 5!\cdot 7!)$ вариантов. Любые бусы можно несколькими способами разрезать и превратить в незамкнутую нить.

Заметим, что при каждом из 15 поворотов бус конфигурация (расстановка цветов бусин) не может перейти в себя. В противном случае пришлось бы распределить красные бусины поровну по 3 промежуткам между жёлтыми бусинами (а 5 не делится на 3). Аналогично, при осевой симметрии конфигурация также не может перейти в себя (ось симметрии должна была бы пройти и через белую, и через красную, и через синюю бусины, что невозможно).

Следовательно, каждым бусам соответствует ровно $(15 \cdot 2)$ незамкнутых нитей с нанизанными бусинками. Ответ: $15!/(30 \cdot 3! \cdot 5! \cdot 7!)$.

38.11. $n!/n = (n-1)!$

38.14. Чтобы указать разделение k одинаковых бокалов на n разных групп, поставим бокалы в ряд и добавим $(n-1)$ разделителей (отделяющие бокалы одной группы от бокалов другой). Остаётся подсчитать число способов выбрать места для разделителей. Ответ: C_{n+k-1}^k.

38.21. Если ладьи держат под боем все поля доски, то либо на каждой горизонтали есть по ладье, либо на каждой вертикали есть по ладье. (Иначе на пересечении небитых горизонтали и вертикали есть небитая клетка.) Получаем $8^8 + 8^8 - 8!$ (надо вычесть $8!$, так как дважды посчитаны способы расстановки, в которых на каждой вертикали и на каждой горизонтали есть по ладье).

38.22. Каждая точка пересечения диагоналей соответствует четырёхугольнику, образованному из вершин исходного, так что ответ C_n^4.

39.2. 3, это (положительный) корень уравнения $x = \sqrt{6+x}$.

39.3. $(\sqrt{5}-1)/2$; это (больший единицы) корень уравнения $x = 1 + \frac{1}{x}$.

39.7. $(1+\sqrt{5})/2$. Можно заметить, что эта задача уже была (в связи с цепной дробью из единиц, см. задачу 39.3).

40.1. Ладей можно поставить 8 (по числу вертикалей или горизонталей). Слонов 14 (диагоналей одного направления 15, но из двух одноклеточных можно занять только одну; пример — слоны на полях a1 – g1 и a8 – g8). Королей 16 (в каждом квадрате 2×2 не более одного). Коней 32 (больше нельзя, т. к. существует маршрут коня, обходящий доску, и соседние в этом маршруте клетки не могут быть одновременно заняты; пример — кони на всех полях одного цвета). Ферзей 8 (не больше, чем ладей; пример: a3, b6, c8, d2, e4, f1, g7, h5).

40.2. Для расстановки ладей есть $8!$ способов. Для расстановки слонов — 2^8. Для коней всего 2 способа: в маршруте, обходящем всю доску, можно выбрать все чётные или все нечётные клетки; эти способы легко описать: все белые клетки и все чёрные.

40.3. Указание: Осевая симметрия не может перевести расстановку в себя.

40.4. На всех расстановках действует группа симметрий из 8 элементов. Все орбиты чётны, кроме одной (если конфигурация устойчива относительно всех симметрий, то короли не могут стоять у средних линий доски, а также в серединном квадрате).

40.5. $(A_8^3)^2/3!$.

40.6. (**a**) $(A_8^4)^2/4! - 8 \cdot (A_7^3)^2/3! + C_8^2 \cdot (A_6^2)2/2! - C_8^3 \cdot (A_5^1)^2 + C_8^4$;

(б) $8! - 8 \cdot 7! + C_8^2 \cdot 6! - \ldots + 1$.

40.7. (а) n; (б) $2n-2$; (в) $[(n+1)/2]^2$; (г) $[(n^2+1)/2]$ при $n \geqslant 3$ и n при $n \leqslant 2$. Все рассуждения аналогичны доске 8×8 (кроме последнего, которое использует возможность обхода доски $n \times n$ конём при $n \geqslant 4$).

40.8. (а) $n!$; (б) 2^n; (в) 2 при чётном $n \geqslant 6$ и 1 при нечётном $n \geqslant 5$.

41.28. Число 2002 даёт остаток 2 при делении на 4, а в произведении $(x-y)(x+y)$ оба сомножителя имеют одинаковую чётность.

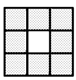
41.29. Сумма двух квадратов не может давать остаток 3 по модулю 4. Сумма трёх квадратов не может давать остаток 7 по модулю 8.

42.4. По индукции можно доказать, что $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$, где $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

42.12. (а) При $n \geqslant 5$ и $n = 1$. Доказательство. Если $2^n > n^2$ и $n > 4$, то $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1$, поскольку $n^2 > 2n+1$ для таких n. (б) См. решение пункта (в). (в) При $n > k$ и $n = 1$. Доказательство. База индукции: $k^{k+1} > (k+1)^k$. Докажем и это утверждение при $k > 2$ по индукции. $3^4 > 4^3$, поэтому база индукции есть. Пусть $(m-1)^m > m^{m-1}$. Это означает, что $m > \left(\frac{m}{m-1}\right)^m$, но последнее выражение больше, чем $\left(\frac{m+1}{m}\right)^m$, поэтому $m^{m+1} > (m+1)^m$, что доказывает шаг индукции. Произведём шаг индукции для основного утверждения. Пусть $k^n > n^k$ и $n > k$. Тогда $k^{n+1} = k \cdot k^n > k \cdot n^k \geqslant (n+1)^k$, поскольку $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < k$ (см. базу индукции). Утверждение доказано.

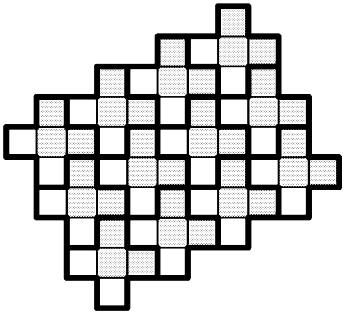
42.15. Тут есть непредвиденная проблема: надо доказывать, что новая окружность пересекается со старыми в $2k$ точках, то появляется $2k$ новых частей. [Это неверно, если не предполагать, что предыдущие окружности попарно пересекаются, например, если пересечь две концентрические окружности окружностью большого радиуса, проходящей через центр.]

43.1. Очевидно, может, см. рисунок (центральная дырка в квадрате 3×3 затягивается).



43.2. Нет, представим себе, что каждая чёрная клетка размазывается по пяти клеткам (она и четыре соседа), и в каждой клетке $1/5$ черноты. Тогда в новых чёрных клетках будет как минимум $3/5$ черноты, и поэтому их не боле $5/3$ старых.

43.3. (решение Л. Антоненко) Разобьём всю плоскость на «кресты» из 5 клеток. Если в каждом кресте закрасить в чёрный цвет центральную, правую и верхнюю клетки, то на следующем шаге вся плоскость станет чёрной. Поэтому если взять пересечение этой картинки с большим квадратом на плоскости и сделать бордюр по краям, то можно получить коэффициент



увеличения, который будет сколь угодно близко к $5/3$. Кстати, для n-мерного пространства тоже можно получить оценку на прирост за один шаг. Он не превосходит $\frac{2n+1}{n+1}$, и эта оценка точна (для доказательства можно построить разбиение на кресты, что проще всего сделать по индукции).

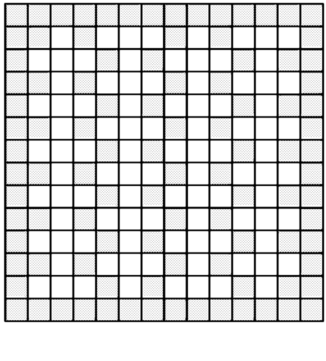
43.4. Нет. Разобьём всё плоскость на квадраты 2×2. Если квадрат был пустым, он останется пустым навеки.

43.5. Поменяем правила игры: будем считать, что однажды став чёрной, клетка уже не меняет цвета. Ясно, что если на n-ом шаге по старым правилам клетка оказывалась чёрной, то она тем более будет чёрной на n-ом шаге игры при новых правилах. Будем вычислять на каждом шаге эволюции число n_1, равное количеству чёрных клеток, и число n_2, равное количеству пар (белая клетка, чёрная клетка, имеющая с этой белой клеткой общую сторону). Проверим, что число $n = n_1 + 1/2n_2$ не возрастает в ходе эволюции. В самом деле, если какая-то клетка стала чёрной, то она добавила единицу к первому слагаемому, а во второе слагаемое внесла положительный вклад, не превосходящий $1/2$, и отрицательный вклад, не меньший $3/2$.

Предположим, что сначала было n_1 чёрных клеток, а после нескольких шагов их стало $n_1' \geqslant 3n_1$. Обозначим также число пар (белая клетка, чёрная клетка, имеющая с этой белой клеткой общую сторону) в начальный и в конечный моменты эволюции через n_2 и n_2'. Тогда имеют место неравенства $3n_1 \leqslant n_1' < n_1' + 1/2n_2' \leqslant n_1 + 1/2n_2$, откуда $n_2 > 4n_1$. Но это невозможно, поскольку у любой чёрной клетки не более 4 белых соседей (да и вообще соседей).

Аналогичное рассуждение для n-мерного пространства доказывает оценку сверху $n+1$.

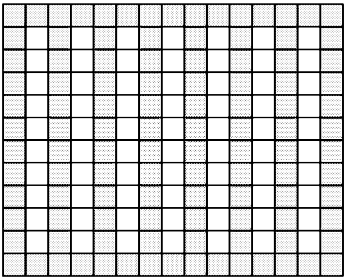
43.6. Да, может.



Ключевая конструкция: Разделим плоскость на бесконечные полоски ширины 3, у каждой из которых средний столбец пуст, а два крайних раскрашены, как шахматная доска. Тогда эта фигура эволюционирует периодически с периодом 2 (в её «шахматной» части чёрные и белые клетки меняются местами). Возьмём пересечение данной картинки с большим квадратом, а по краям сделаем чёрный бордюр.

Тогда эволюция будет происходить по-другому: полученный прямоугольник станет медленно затягиваться чёрным, начиная с краёв. Таким образом можно получить изменение, сколь угодно близкое к трёхкратному. Отметим, что в n-мерном пространстве можно аналогично доказать, что оценка $n+1$ точна.

43.7. Может — если к чередующимся чёрным и белым полоскам в большом квадрате добавить верхнюю и нижнюю крышки, то постепенно квадрат станет чёрным. Таким образом можно получить увеличение, сколь угодно близкое к двукратному.



43.8. По монотонности достаточно проверить, что исчезнет, скажем, большой квадрат (или треугольник — равнобедренный прямоугольный треугольник уменьшается в размерах.

44.1. Площадь доски равна $Л_1(Д)$.

44.2. (**а**) $1 + 2x + x^2$; (**б**) $1 + x + x^2$.

44.3. Для расстановки k ладей на доске $Д$ надо расставить i ладей на доске $Д_1$ и $k - i$ ладей на доске $Д_2$, поэтому $Л_k(Д) = \sum Л_i(Д_1)Л_{k-i}(Д_2)$, а именно это и требуется доказать.

44.4. В каждой расстановке ладья либо стои́т на $к$, либо нет. Соответственно, остальные расставляются либо на $Д_2$, либо на $Д_1$.

44.5. $n(n-1)/2$. То, что этого хватит, очевидно: за $n-1$ вопрос найдём, где стои́т ладья в первом ряду, за $n-2$ вопроса — во 2 ряду и т. д. Докажем, что меньше вопросов недостаточно. Будем играть нечестно: пока возможно, отвечать «нет», вырезая из доски соответствующие клетки и следя, чтобы на оставшейся доске можно было расставить нужное количество ладей. Нам надо будет ответить «да» только в том случае, если на соответствующую клетку обязательно нужно поставить ладью. Поэтому, если отгадывающий минимизирует число вопросов, то «да» отвечать не придётся. После последнего вопроса остаётся доска, на которой все n ладей можно расставить единственным способом. Без ограничения общности можно считать, что они стоят по диагонали (любую расстановку ладей можно свести к этому случаю, перенумеровав столбцы и строки доски). Из любой пары клеток, симметричных относительно диагонали, необходимо было спросить хотя бы про одну: иначе возможных расстановок ладей было бы не меньше 2. Поэтому задано минимум $n(n-1)/2$ вопросов.

44.6. Можно либо использовать задачу 44.9, либо построить биекцию. Строим биекцию индуктивно. Обозначим квадратную доску $n \times n$ через K_n. При этом $K_n = K_{n-1} \cup У_n$ (квадрат разбивается в объединение квадрата меньшего размера и «уголка» $У_n$). Далее, $Д_n = Д_{n-1} \cup П_n$ (диаграмма $Д_n$ есть объединение предыдущей диаграммы и полоски $П_n$ длины $2n-1$). Можно считать, что биекция между расстановками, не задевающими $У_n$ и $П_n$, построена. Зафиксируем некоторую расстановку $(k-1)$-ой ладьи в $Д_{n-1}$ (обозначим её s). Теперь рассмотрим все способы дополнить s до расстановки k ладей в $Д_n$; для этого нужно поставить одну ладью в нижнюю строку. Таких способов $2n-k$: в нижней строке ровно столько клеток подходят для ладьи. Занумеруем как-нибудь эти клетки. Если ладья стоит на клетке с номером $l, 1 \leqslant l \leqslant n$, то поставим ладью на l-ую клетку вертикальной стороны $У_n$, вычеркнем вертикаль и горизонталь этой клетки и на оставшейся части реализуем расстановку, соответствующую s. Если же ладья стоит на клетке с номером $l > n$, то реализуем расстановку, соответствующую s, в $K_n \setminus У_n$ — стандартном квадрате. Среди $n-1$ клетки $У_n$, расположенных на горизонтальной стороне, есть $n-k$ мест, куда можно поставить ладью. Поставим ладью на $(l-n)$-ое из этих мест. Биективность очевидна.

44.7. $Л_j(B \cup A) = \sum_{p=0}^{j} Л_p(B)(j-p)!C_n^{j-p} \cdot C_{m-p}^{j-p}$. Действительно, если в части B стоит p из j ладей, то оставшихся ладей надо расставить, выбрав в части A $(j-p)$ из $(m-p)$ горизонталей и $(j-p)$ из n вертикалей (считаем, что m — размер по вертикали) и приведя их в соответствие.

44.8. Обе части этого равенства равны числу расстановок m не бьющих друг друга ладей на диаграмме Юнга со строками $b_1 + p, \ldots, b_m + p$. Для правой части это так, ибо надо выбрать место в короткой строке, потом в следующей и т. д. Левая часть показывает, как считать по-другому: можно расставить k ладей внутри исходной диаграммы и потом $m-k$ в оставшемся прямоугольнике.

44.9. Рассмотрим равенство задачи 44.8, как равенство двух многочленов от p. Тогда доказываемое утверждение очевидно.

44.10. Очевидно, число расстановок k чёрнопольных слонов на доске $2n+1 \times 2n+1$ со слоном на поле a1 равно числу расстановок $k-1$ белопольных слонов на доске $2n \times 2n$. Далее, число расстановок k чёрнопольных слонов на доске $2n+1 \times 2n+1$ без клетки a1 равно числу способов расстановки k белопольных слонов на доске $2n+1 \times 2n+1$ (это следует из задачи 44.9). Поэтому $ЧС(x, K_{2n+1}) = БС(x, K_{2n+1}) + xЧС(x, K_{2n})$ и $ЧС(x, K_{2n}) = (ЧС(x, K_{2n+1}) - БС(x, K_{2n+1}))/x$.

44.11. По задаче 9 две диаграммы эквивалентны тогда и только тогда, когда их S-наборы совпадают. Заметим, что если строки диаграммы $Д$ различны и не равны нулю, то её S-набор $S(Д)$ образует неубывающую последовательность натуральных чисел. Далее, если к диаграмме $Д$ указанного вида добавить несколько пустых строк, это не скажется на её ладейном многочлене. Однако S-набор изменится, а именно к набору добавится убывающий фрагмент $0, -1, -2, \ldots$, после которого будет идти некоторая неубывающая последовательность. Осталось заметить, что если S-набор произвольной диаграммы содержит отрицательное число k, то он содержит также и все числа $k+1, \ldots, -1, 0$. Теперь способ построения биекции ясен: для заданной диаграммы построим её S-набор, возьмём там наименьшее отрицательное число n и упорядочим набор так: сначала $n, n+1, \ldots, 0$, а потом все остальные числа в порядке неубывания. Для такой S-последовательности мы можем построить диаграмму с различными ненулевыми и (быть может) несколькими нулевыми строками.

44.12. Пусть A, A' — соответственно доска и её дополнение в прямоугольнике $m \times n$. Тогда по формуле включения-исключения получаем $Л(x, A') = \sum_k Л_k(A)(-x)^k f_{m-k,n-k}(x)$, где $f_{m,n}(x)$ — ладейный многочлен прямоугольника $m \times n$. Поэтому дополнения эквивалентных досок эквивалентны.

44.13. **(б)** Указание: k-ое ладейное число этого прямоугольника равно $C_n^k \cdot C_m^k \cdot k!$.

44.14. Обозначим через f_{n+1} это число способов. Покажем, что f_n — n-ое число Фибоначчи. Доказательство: проверим, что $f_{n+1} \leqslant f_n + f_{n-1}$. Выбросим клетку k из оптимальной доски $Д^n$. Поскольку верно равенство $Л(x, Д^n) = Л(x, Д_1^n) + Л(x, Д_2^n)$ (см. обозначения в задаче 4), то достаточно проверить, что $Л(1, Д_2^n) \leqslant Л(1, Д^{n-2})$. А это верно, поскольку если в $Д_2^n$ $n-k$ клеток, то она состоит из не более чем $k-1$ связной компоненты, и добавлением не более $k-2$ клеток мы восстановим связность. Для диаграммы в виде «лесенки» неравенство $f_{n+1} \leqslant f_n + f_{n-1}$ обращается в равенство.

44.15. Пусть $a_n(x)$, $b_n(x)$ — многочлены для этих досок. Тогда коэффициент многочлена $a_n(x)$ при x^k равен C_{n-k+1}^k. (Доказательство: добавим к доске справа одну клетку; пусть есть расстановка (на исходной доске) k королей. Тогда клетка справа от каждого короля пуста. Значит, наша задача эквивалентна такой: на доске из $n+1-k$ клеток выбрать k (если это сделано, то можно каждую клетку удвоить и в левую поставить короля; обратно, расстановка королей указывает, какие клетки надо «схлопнуть»).) Кроме того, $b_n(x) = a_n(2x)$ (очевидно). Многочлен $a_n(x)$ называется *многочленом Фибоначчи* и удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_n(x) = a_{n-1}(x) + xa_{n-2}(x)$; $a_n(1)$ — число Фибоначчи.

45.1. С помощью первой транспозиции положим первый шар в первый ящик (если он там не лежит), с помощью второй транспозиции — второй шар во второй ящик и т. д. После $(n-1)$-й транспозиции первые $n-1$ шаров (а значит и последний, n-й шар) будет лежать в своём ящике.

45.2. То же рассуждение, но первый шар придётся перемещать постепенно (на это уйдёт $n-1$ транспозиция или меньше), потом мы займёмся вторым (не более $n-2$ транспозиций) и т. д.; всего получится не более $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = n(n-1)/2$ транспозиций.

45.3. Можно свести задачу к задаче 45.2, если поменять ролями шары и ящики (или считать, что мы перемещаем ящики, а шары неподвижны). По-простому: если на первом месте лежит шар с номером i, положим туда шар с номером $i-1$, затем $i-2$ и так далее, пока не будет шар с номером один. (Далее аналогично с шаром на втором месте и т. д.)

45.4. Ответ на первый вопрос: $n-1$. Приведённое выше рассуждение показывает, что этого достаточно. Меньшим количеством обойтись не удастся. Действительно, рассмотрим цикл (первый шар лежит во втором ящике, второй шар — в третьем, ..., $(n-1)$-й шар — в n-м, n-й шар — в первом. Предположим, что можно обойтись менее чем $n-1$ транспозицией. Соединим отрезком каждые два ящика, участвующие в какой-нибудь транспозиции. Полученный граф будет несвязным, так что существует непустое собственное подмножество ящиков, такое что шары перемещаются только внутри него. Но найдётся такой номер k, что k-й ящик входит в это подмножество, а $(k+1)$-й — нет; при этом k-й шар не попадёт на своё место. Противоречие. Ответ на второй и третий (они одинаковые) вопросы: $n(n-1)/2$. Выше мы видели, что этого хватит. Переставим шары в обратном порядке: первый шар положим в n-й ящик, второй шар — в $(n-1)$-й, ..., n-й шар — в первый. Какие два шара ни возьми, они лежат в неправильном порядке: шар с большим номером лежит в меньшем ящике. При одной транспозиции с соседними ящиками мы исправим максимум одну пару шаров, а всего пар $n(n-1)/2$.

45.5. Например, так:

$$1234 \to 2134 \to 2314 \to 2341 \to 2431 \to 2413 \to 2143 \to 1243 \to$$
$$1423 \to 4123 \to 4213 \to 4231 \to 4321 \to 4312 \to 4132 \to 1432 \to$$
$$1342 \to 3142 \to 3412 \to 3421 \to 3241 \to 3214 \to 3124 \to 1324 \to 1234.$$

45.6. Докажем существование такой последовательности по индукции. Предположим, что для n шаров она существует. Для $n+1$ шаров делаем так: перемещаем первый шар направо до упора, потом делаем один шаг процедуры с шарами $2, 3, \ldots, n+1$, потом перемещаем первый шар налево до упора, опять делаем один шаг процедуры с шарами $2, 3, \ldots, n+1$ и т. д. Поскольку число шагов в процедуре чётно, перед последним шагом (приводящим шары $2, 3, \ldots, n+1$ в исходное положение) первый шар будет стоять на правильном месте, и после этого шага всё вернётся в исходное положение. Например, для четырёх шаров получится как раз последовательность, приведённая в решении к предыдущей задаче.

45.11. Перестановка раскладывается в произведение циклов, поэтому достаточно решить задачу для цикла. А цикл есть вращение по кругу, каковое есть композиция двух осевых симметрий (которые имеют порядок 2, то есть состоят из простых обменов).

45.14. Нарисуем граф, который показывает, какая буква в какую переходит. Он будет состоять из циклов. Если N — наименьшее кратное длин этих циклов, то после N итераций всё вернётся на круги своя.

45.15. Вращение AB можно рассматривать как перестановку (полезно, чтобы школьники чётко объяснили, что играет роль шаров, а что ящиков); каждая перестановка имеет конечный порядок (доказательство аналогично задаче 45.14). Объяснение «поскольку число возможных положений кубика конечно, результаты $(AB)^n$ и $(AB)^m$ для каких-то m и n совпадают, а тогда $(AB)^{m-n}$ приводит в исходное положение» не вполне корректно ($(AB)^{m-n}$ приводит в исходное положение не тот кубик).

45.16. Будем считать, что пустое место — это фишка с номером 16. Тогда любое перемещение является транспозицией. Но чтобы фишка с номером 16 осталась на своём месте, необходимо чётное число транспозиций (количество перемещений этой фишки вверх должно быть равно количеству перемещений вниз, а количество перемещений влево — количеству перемещений вправо). Поэтому результат не может быть получен (иначе чётное число транспозиций — те, что мы сделали, плюс $14 \leftrightarrow 15$ — приведёт нас в исходное положение, а по задаче 45.8 это невозможно). Другой вариант: если перечислять фишки змейкой (первая строка слева направо, вторая справа налево, третья слева направо, четвёртая справа налево), игнорируя пустое место, то чётность такой перестановки не будет меняться (при горизонтальных перемещениях последовательность не меняется, а при вертикальных одна фишка перескакивает через чётное число мест).

46.13. Любые два соседних стула дают «пару» с вероятностью $5/9$. Пар соседних стульев 10. Следовательно, ответ $50/9$.

46.14. Добавим в колоду дополнительную 53-ю карту (джокер) и свернём её в кольцо, то есть выложим все 53 карты по кругу. Джокер показывает место «склейки». Число карт до появления первого туза теперь соответствует числу карт между джокером и соседним с ним (по часовой стрелке) тузом. Четыре туза и джокер делят колоду на пять интервалов, сумма длин которых равна 48. В силу симметрии математические ожидания длин всех пяти интервалов равны. Значит среднее расстояние от джокера до первого туза равно $48/5$.

46.17. Предварительное замечание: стратегия в этой игре — это вероятность p, с которой нужно называть 1. Нужно подобрать такое A, что каждый игрок мог бы гарантировать мат. ожидание выигрыша не меньше нуля. На самом деле мы увидим, что каждый игрок может обеспечить себе мат. ожидание ровно 0 (мат. ожидание выигрыша не зависит от стратегии противника). В частности, мы должны получать нулевой в среднем выигрыш, если противник с вероятностью 1 говорит 1 или с вероятностью 1 говорит 2. Легко заметить, что если наш выигрыш равен нулю для «чистых» стратегий противника (когда он с вероятностью 1 называет одно число), то нулевым будет наш выигрыш и для любой другой стратегии противника. С точки зрения первого игрока наши условия эквивалентны уравнениям:

$$-p + (1-p)A = 0,$$
$$pA - 2(1-p) = 0.$$

С точки зрения второго игрока необходимо выполнение условий

$$p - (1-p)A = 0,$$
$$-pA + 2(1-p) = 0.$$

Разумеется, системы эквивалентны. Решая любую из них, находим $A = \sqrt{2}$.

48.3. Разобьём стороны клеток на пары, выходящие из одной вершины вправо и вверх. Стратегия второго игрока состоит в том, чтобы обводить сторону, составляющую пару с той, которую только что обвёл первый.

48.4. Ответ: 4950. Положим $I(n) = n(n-1)/2$. Заметим, что имеет место равенство $I(m+n) = I(n) + I(m) + mn$, поэтому если прибавить к сумме всех чисел на бумажке сумму значений $I(k)$ для всех имеющихся на доске чисел k, то полученная величина не изменяется. Сначала эта величина равна $I(100) = 4950$, а в конце она станет равной сумме всех произведений (ибо числа на доске равны единице, а $I(1) = 0$).

49.10. Для $n = 3$ ($n = 5$) строим аффинную плоскость над $\mathbb{F}_3$ ($\mathbb{F}_5$), а в качестве рядов, колонн, школ и классов берём разные пучки параллельных прямых. Для $n = 4$ то же самое с использованием поля из 4 элементов. Для $n = 6$ это, говорят, невозможно («ортогональные латинские квадраты»), но как это проверить без перебора (и как выполнить перебор за разумное время, пусть с помощью программы), не ясно. Отметим, что для нечётного n конструкция возможна даже если поля из n элементов не существует: поместим в клетку (a, b) квадрата $n \times n$ школьника из класса $(a + b) \bmod n$ и школы $(a - b) \bmod n$. Тогда условие выполнено, и все школьники задействованы по разу, ибо соответствующая система уравнений по модулю n однозначно разрешима (число 2 обратимо по нечётному модулю).

49.17. Столбцы и строки квадрата соответствуют точкам и прямым проективной плоскости (с 7 и 13 точками), а закрашенные клетки — отношению «лежит на». На самом деле эта оценка точная. Пусть сторона квадрата равна n, а столбцы содержат $a_1, \ldots, a_n$ закрашенных клеток. Посчитаем число способов выбрать две закрашенные клетки в одном столбце. В k-ом столбце из a_k клеток можно выбрать две $a_k(a_k-1)/2$ способами, поэтому число способов равно $\sum_{k=1}^n a_k(a_k-1)/2$. С другой стороны, по условию проекции на первую строку всех этих пар различны, поэтому их число не превосходит $n(n-1)/2$. Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем квадратичном (для краткости обозначив $s = \sum_{i=1}^n a_i$):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k-1)/2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 - a_k}{2} \geqslant \frac{s^2}{2n} - s/2.$$

Поэтому $n(n-1)/2 \geqslant s^2/2n - s/2$, откуда $s^2 - ns - n^2(n-1) \leqslant 0$. Дискриминант этого квадратного трёхчлена равен $D = n^2 + 4n^2(n-1)$. Пусть $n = q^2 + q + 1$. Тогда $D = n^2(4q^2 + 4q + 1)$, а корни трёхчлена суть $(n \pm n(2q+1))/2$, т. е. $-nq$ и $n(q+1)$. Значит, $s \leqslant n(q+1)$, что и даёт (при $q = 2, 3$) нужные оценки.

51.24. (а), (б) $761 + 1547t$, $t \in \mathbb{Z}$. Пункт (в) оказался неудачным — не ясно, что имеется в виду. В действительности можно рассуждать так: для взаимно простых модулей система равносильна одному сравнению по модулю, равному произведению модулей. Для не взаимно простых будем действовать «в другом направлении»: разложим все модули на простые множители и заменим каждое сравнение на систему сравнений по модулям, каждый из которых есть степень простого числа. После этого возможны два случая: либо для каждого простого числа все сравнения по модулю его степеней равносильны одному (самому ограничительному) из них (тогда система равносильна системе сравнений по взаимно простым модулям), либо для какого-то простого числа сравнения по модулю его степеней несовместны (тогда несовместна и исходная система).

51.25. Если m и n взаимно просты, и к тому же не являются оба нечётными (в последнем случае цвет клетки сохраняется). В самом деле, если это так, то можно сдвинуться на $2n$ и $2m$ в любом направлении, а потому и на 2. Поэтому можно сдвинуться на ($m \bmod 2$, $n \bmod 2$), т. е. попасть на соседнее поле. После этого легко попасть на любое поле.

51.26. Наибольшая сумма, которую нельзя уплатить — $ab - a - b$. Мы знаем все решения уравнения $ax + by = c$ в целых числах для любого заданного c (решения есть, т. к. числа взаимно просты). Назовём базовым решением то, для которого $0 \leqslant x \leqslant b-1$ (такое, очевидно, найдётся). Докажем, что если $s \geqslant (a-1)(b-1)$, то s можно уплатить без сдачи, т. е.

s можно представить в виде $ax + by$ с неотрицательными x и y. Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы в базовом представлении s число y было неотрицательно. Но $by \geqslant (a-1)(b-1) - a(b-1) = -(b-1)$. Целое число, которое кратно b и не меньше, чем $-(b-1)$, с необходимостью неотрицательно. Докажем теперь, что в базовом представлении числа $ab-a-b$ число y отрицательно. В самом деле, если $ab-a-b = ax+by$, то $a(b-1-x) = b(y+1)$, откуда $b \mid a(b-1-x)$. Но раз a и b взаимно просты, то $b \mid (b-1-x)$, что возможно лишь при $x = b-1$. Но тогда $y = -1$. Докажем последнее утверждение. Мы уже знаем, что представимость определяется знаком числа y в базовом представлении числа s. Пусть s не представимо, т. е. $y < 0$. Как мы только что выяснили, в базовом представлении числа $ab-a-b$ число x равно $b-1$, а число y равно -1. Поэтому если вычесть базовые представления, то получится представление для разности, которое вновь является базовым, причём число y для этого представления неотрицательно.

52.4. Действительно, если из пути Ахиллеса вычесть сумму пути черепахи и расстояния от черепахи до Ахиллеса, то эта величина может только возрастать (она не убывает при смещении Ахиллеса и остаётся неизменной при смещении черепахи).

52.5. На северный полюс за время $12\sqrt{2}$, сделав бесконечное число оборотов (составляющие скорости по широте и долготе в $\sqrt{2}$ меньше скорости).

52.6. Несложно проверить, что расстояние между кораблями убывает с той же скоростью, с которой перпендикулярная берегу составляющая расстояния возрастает. Значит, в конце расстояние будет равно $1/2$.

52.7. В этом случае время движения от точки 1 до точки 2 равно времени движения от $1/2$ до 1, от $1/4$ до $1/2$ и потому движение не может начаться за конечное время.

52.8. За 20 минут чай остыл (считая разность температур) в 8 раз, значит, в 2 раза он остынет ещё за $20/3$ минут.

52.9. Доползёт. Если мерить его скорость относительно шнура в долях шнура (формально говоря, изучать отношение координаты муравья к длине шнура), то его скорость убывает как $1/t$ и потому он дойдёт до любой точки шнура.

52.10. За время $1/n$ расстояние от начала координат увеличилось бы в $1+1/n$ раз, если бы точка двигалась с постоянной скоростью; на самом деле она ускоряется, поэтому оно увеличится в большее число раз, отсюда первое неравенство. С другой стороны, до точки $1+1/n$ она движется не менее $1/(n+1)$ секунды (было бы равенство, если бы скорость была как в конце движения) поэтому до точки $(1+1/n)^{n+1}$ она движется не менее 1 секунды.

52.11. Времена прохождения отрезков $1 \to 2$, $2 \to 4$, $4 \to 8$ и так далее оцениваются сверху геометрической прогрессией со знаменателем 2 в первом случае и отделены от нуля во втором.

53.3. Можно провести окружность с центром в одной из точек, касающуюся прямой, и провести касательную к ней из точки, симметричной второй данной точке.

Другое решение (придумал Р. Савченко): обозначим через B_1 точку, симметричную точке B относительно прямой; пусть m — прямая, параллельная исходной и делящая перпендикуляр, опущенный из B_1 на прямую, пополам. Построим на отрезке AB_1 как на диаметре окружность; пусть X, Y — её точки пересечения с прямой m. Пересечение исходной прямой с отрезками AX и AY даст две точки — для одной из них угол падения вдвое больше угла отражения, для другой сумма угла падения и удвоенного угла отражения равна 180°.

53.15. Изобразим исходные лучи сплошными, а повёрнутые — пунктирными. Если утверждение задачи неверно, то внутрь каждого сплошного угла попадёт ровно один повёрнутый луч. Пусть образ нулевого сплошного луча попадёт между k-ым и $(k+1)$-ым сплошными лучами. Это значит, что угол между нулевым и k-ым лучом меньше 120°, а между нулевым и $(k+1)$-ым — больше. Тогда любые k соседних сплошных углов меньше 120°, а любые $k+1$ — больше. Но первое невозможно при $k \geqslant 10$, а второе — при $k < 10$, поскольку $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$.

54.16. Рассмотрим граф, в котором вершинами являются последовательности из 6 нулей и единиц, а ориентированные рёбра между последовательностями i, j соответствуют последовательностям из 7 нулей и единиц, у которых первые 6 битов есть последовательность i, а последние 6 битов есть последовательность j. Тогда в каждой вершине число входящих рёбер равно числу исходящих, и граф связен, поэтому можно найти цикл, проходящий по всем рёбрам единожды. По такому циклу можно очевидным образом построить нужное расположение нулей и единиц.

54.17. Теорема Холла о представителях. Вот одно из возможных доказательств. Применяем индукцию по числу кружков: пусть у нас N кружков, а для любого меньшего числа кружков всё доказано. Рассмотрим два случая:

(1) условие теоремы для любого меньшего числа кружков выполнено с запасом: общее число школьников, в них занимающихся, хотя бы на 1 больше числа кружков. Тогда в одном кружке назначим старосту произвольно и удалим кружок (и старосту) из рассмотрения, для оставшихся выполнено условие Холла (число школьников могло уменьшиться только на 1, применяем предположение индукции).

(2) есть некоторое семейство из k кружков при $k < N$, которые содержат вместе ровно k школьников. Пометим эти кружки и этих школьников. Тогда любое семейство из l непомеченных кружков содержит по крайней мере

l непомеченных школьников (иначе вместе с помеченными они бы нарушили условие Холла). Тем самым можно применить предположение индукции отдельно к помеченным и непомеченным школьникам.

54.18. Следствие теоремы Холла: если бы n школьников решили вместе менее чем n задач, подсчёт рёбер выявил бы противоречие.

54.19. Рассмотрим произвольную вершину v_1. Из неё выходит бесконечно много одноцветных рёбер. Оставим их концы (и v_1), а остальные вершины выбросим. Пусть v_2 — один из этих концов. Посмотрим на цвета рёбер, соединяющих его с другими, оставим только одноцветные и так далее. Получится последовательность $v_1, v_2, \ldots$ с таким свойством: рёбра $v_i - v_j$ при фиксированном i и при всех $j > i$ имеют один и тот же цвет. Назвав его «цветом» вершины v_i, оставим бесконечное множество одноцветных вершин, и оно будет требуемым.

54.21. Для первой части достаточно пяти точек: если их выпуклая оболочка является треугольником, то обе оставшиеся точки внутри него и для данного положения одной из них легко заметить, что куда бы ни попала вторая, всё равно получится четырёхугольник. Далее надо применить теорему Рамсея: если k-элементные подмножества бесконечного множества разбиты на конечное число классов, то можно оставить бесконечно много элементов так, чтобы они образовывали подмножества только одного класса. Разобьём четвёрки точек на два классах — образующие выпуклый четырёхугольник и не образующие. Бесконечного подмножества второго типа быть не может (по доказанному), значит, есть бесконечно много точек, любые четыре из которых лежат в вершинах выпуклого 4-угольника. Легко видеть (индукция по n), что любые n лежат в вершинах выпуклого n-угольника. Осталось доказать теорему Рамсея индукцией по k. Для $k = 2$ это уже доказано. Если доказано для $k - 1$, для данной точки v_1 разобьём все не содержащие её $(k-1)$-подмножества на классы в зависимости от того, какой класс они образуют с данной точкой и применим предположение индукции и удалим лишние точки Далее для какой-либо точки v_2 из оставшихся разобьём не содержащие её $(k-1)$-подмножества на классы, и так далее. Затем точки $v_1, v_2, \ldots$ делятся на классы как раньше, и выбирается бесконечный класс.

59.4. Это сложная задача; одно из решений таково. Рассмотрим случайный процесс, при котором к пустому множеству добавляется по элементу, пока не получится всё множество. При этом вероятность пройти через некоторое множество X минимальна, когда X состоит из 5 элементов (поскольку все множества данной мощности равновероятны и одно из них обязательно появится, а пятиэлементных множеств больше всего). Если есть несколько несравнимых подмножеств, то события «пройти через них» несовместны, и потому число таких подмножеств не больше числа пятиэлементных подмножеств. Ответ: C_{10}^{5}.

59.21. Рассмотрим какой-нибудь контрпример. Найдём элемент, который входит в одно из выражений и не входит в другое, и оставим в каждом множестве только его (или ничего не оставим, если этого элемента нет). Полученный набор множеств также будет контрпримером.

59.22. Задача 59.21 делает перебор конечным.

59.23. Рассмотрим всевозможные наборы множеств, каждое из которых либо пусто, либо содержит один (фиксированный) элемент. Задача 21 показывает, что выражения, совпадающие на всех таких наборах, совпадают всюду. Количество наборов равно $2^n - 1$ (набор, где все множества пусты, не может быть контрпримером), поэтому количество различных выражений не больше чем 2^{2^n-1}. На самом деле их ровно столько (достаточно написать выражение, которое на одном наборе непусто, а на остальных пусто, а потом объединять такие выражения для нужных наборов).

60.7. (**а**) $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ (**б**) $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n+\ldots$ (**в**) $1+x/2-x^2/8+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^n+\ldots$ (биномиальный ряд для $\alpha=1/2$). (**г**) $1+x+\ldots+x^n+\ldots=(1-x)^{-1}$, поэтому корень из этого ряда равен $(1-x)^{-1/2}=1+x/2+3x^2/8+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n+\ldots$

60.9. Докажем, что n-ые коэффициенты в левой и правой частях равны. Если обозначить $(t)_k = t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-k+1)$, то доказываемую формулу можно записать в виде $(\alpha+\beta)_n = \sum_{k=0}^n C_n^k(\alpha)_k(\beta)_{n-k}$. Эта формула напоминает бином Ньютона, и на самом деле её можно точно таким же способом доказать индукцией по n. Более изящное (но трудно находимое) решение таково: мы хотим доказать равенство двух многочленов от α и β, которое верно при натуральных значениях переменных (ибо для них указанное свойство биномиального ряда есть в точности формула бинома Ньютона) — а значит, и для любых. (Для полноты картины докажем, что если многочлен P от двух переменных равен нулю во всех точках с натуральными координатами, то он тождественно равен нулю. Действительно, для фиксированного $n\in\mathbb{N}$ корни многочлена от одной переменной $f_n(x)=P(x,n)$ — все натуральные числа, и потому он тождественно равен нулю. Поэтому для любого $a\in\mathbb{R}$ корни многочлена $g_a(y)=P(a,y)$ — все натуральные числа, значит, он тождественно равен нулю, что и требовалось.)

61.6. Ответ: 18 кусков. Способ с 18 кусками такой: представим яблоки отрезками $[0,1],[1,2],\ldots,[6,7]$ и разделим $[0,7]$ на 12 равных частей. Точек деления будет 11, а кусков $7+11=18$. Покажем, что меньше 18 кусков быть не может. Рассмотрим граф отношения «достался кусок» на произведении множеств школьников и яблок. Если кусков меньше 18, то этот граф (имеющий $7+12=19$ вершин) не связен. В каждой компоненте входящие в неё яблоки должны быть разделены поровну между входящими в неё школьниками, что невозможно, так как $7/12$ не представляется в виде дроби с меньшими числителем и знаменателем. Вообще, при любых p и q минимальное число кусков равно $p + q - \text{НОД}(p, q)$. (Это хороший дополнительный вопрос.)

61.20. На каждом шаге определяем значения трёх функций на очередном целом числе. Значение одной из функций можно выбрать произвольным (что обеспечивает сюръективность: в качестве значения нужно брать неохваченный элемент $\mathbb{Z}$ с наименьшим номером), после чего значения остальных двух функций можно подобрать без нарушения инъективности. При этом на роль первой функции нужно по очереди назначать все (например, по кругу).

61.21. Нет: пусть f равна нулю всюду, кроме точки 0, где $f = 1$. Тогда образы множества $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ под действием функций f_1 и f_2 будут симметричны (относительно нуля), поэтому потому значения f_1 и f_2 в точке 0 также будут симметричны и дадут в сумме 0, а не 1.

62.18. (**а**) Неверно (образы при параллельных переносах в подходящем направлении не пересекаются). (**б**) Неверно (образы при гомотетиях не пересекаются). (**в**) Верно. Каждой букве Т поставим в соответствие треугольник с рациональными вершинами (обе координаты вершин должны быть рациональны) так, чтобы перекладина буквы Т пересекала две стороны треугольника, а вертикальная «ножка» — оставшуюся сторону. Двум непересекающимся буквам не может соответствовать один и тот же треугольник, а общее количество треугольников счётно.

62.25. (**а**) (**б**) В обоих случаях ответ «да». Например, можно рассматривать подмножества $\mathbb{Q}$ (ибо это множество тоже счётно), и для каждого действительного числа a в первом случае взять в качестве подмножества какую-либо последовательность рациональных чисел, сходящуюся к нему (скажем, обрывать его десятичную запись в разных местах), а во втором случае — множество всех рациональных чисел, меньших a. Выполнение условий очевидно. Другое решение: построим бесконечное двоичное дерево и отождествим $\mathbb{N}$ с множеством его вершин. Каждой бесконечной двоичной последовательности поставим в соответствие очевидный путь в дереве (выходим из корня и на каждом шаге идём влево, если член последовательности равен 0, и вправо в противном случае). Любые два таких пути имеют конечное число общих вершин (после первого расхождения они уже не встретятся) — поэтому пример в первом случае готов. Для второго случая по каждому пути построим множество вершин, лежащих «левее» этого пути. Условие выполняется, ибо иначе в дереве был бы цикл. (**в**) Нет, не может. Выберем какое-нибудь подмножество A, принадлежащее семейству. Если $A \triangle B = A \triangle C$, то $B = C$ (поскольку $B = ((A \triangle B) \setminus A) \cup (A \setminus (A \triangle B))$); таким образом, множество из нашего семейства однозначно задаётся своей симметрической разностью с A. Осталось заметить, что количество конечных подмножеств $\mathbb{N}$ счётно.

68.2. Из 400 подряд идущих лет 97 являются високосными, а оставшиеся

303 — нет, так что сдвиг составляет $97\cdot 2+303=497$, что делится на 7. С 1 января 1 года (понедельник) до 31 декабря 400 года (воскресенье) среди 13-х чисел имеется 685 понедельников, 685 вторников, 687 сред, 684 четвергов, 688 пятниц, 684 суббот, 687 воскресений. Таким образом, за эти 400 лет (а значит, и вообще, раз это полный период) 13 число чаще всего бывает пятницей.

69.12. $D(x)\sin\pi x$, где D — функция Дирихле.

69.13. (**а**) Да: пусть в указанных точках значением будет нуль, а в остальных — единица. (**б**) Пусть в точке $1/n$ значение будет $1/n$, а в остальных нуль.

69.15. Нет. Множество точек разрыва представимо в виде счётного объединения замкнутых множеств (где колебание не меньше $1/n$). Для $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ эти множества будут нигде не плотными. Тогда и $\mathbb{R}$ представимо в виде счётного объединения нигде не плотных множеств, что невозможно: будем строить вложенные отрезки, которые не пересекаются с большим количеством наших нигде не плотных множеств.

71.3. Выберем некоторое простое p и рассмотрим последовательность чисел $2p+1$, $4p+3$, …, 2^kp+2^k-1, …. Если среди них есть составные, то можно взять предыдущее перед первым из таких в качестве q. А составное найдётся: ведь $p \mid 2^{p-1}p+2^{p-1}-1$ по малой теореме Ферма.

71.5. Во-первых, произведение двух квадратичных вычетов — очевидно, вычет. Умножение на фиксированный ненулевой элемент — перестановка остатков. Значит, произведение невычета на вычет — невычет (иначе при умножении на фиксированный вычет слишком много невычетов). Теперь аналогично получаем, что произведение двух невычетов — вычет.

71.6. Очевидное следствие уже сделанного. Можно также умножить это выражение на символ Лежандра некоторого невычета. С одной стороны, знак суммы изменится, с другой стороны, по задаче 71.5 получится та же сумма с переставленными членами.

71.7. Если искомое число обозначить через N, то верно равенство $N=$ $=\sum_{k=0}^{p-1}\bigl(1+\bigl(\frac{1-k^2}{p}\bigr)\bigr)=p+\sum_{k=0}^{p-2}\bigl(\frac{(1-k)/(1+k)}{p}\bigr)=p+\sum_{l=0}^{p-2}\bigl(\frac{l}{p}\bigr)=p-\bigl(\frac{p-1}{p}\bigr)=$ $=p-(-1)^{(p-1)/2}$. Единственным неочевидным переходом здесь является равенство $\sum_{k=0}^{p-2}\bigl(\frac{(1-k)/(1+k)}{p}\bigr)=\sum_{l=0}^{p-2}\bigl(\frac{l}{p}\bigr)$. Оно верно, поскольку преобразование $k\mapsto(1-k)/(1+k)$ биективно отображает множество остатков, не равных -1, в себя.

71.8. (б) Рассмотрим многочлен $x^{p-1}-1=(x^{(p-1)/2}-1)(x^{(p-1)/2}+1)$, равный нулю при всех $x\neq 0$ (по модулю p). Любой вычет — корень первого сомножителя. Поэтому любой невычет — корень второго.

71.9. Следствие задачи 71.8: -1 является невычетом, а если a или b не делится на p (т. е. обратимо по модулю p), то получается, что -1 —

квадратичный вычет. Можно сказать то же самое иначе: для такого p число $(p-1)/2$ нечётно, так что $a^{p-1}+b^{p-1}$ делится на a^2+b^2. Но $a^{p-1}+b^{p-1}$ сравнимо с $0, 1, 2$ по модулю p по малой теореме Ферма (в зависимости от того, делятся ли на p числа a и b).

71.10. Предположим, что их конечное число; пусть $p_1, \ldots, p_n$ — все эти числа. Тогда число $4p_1^2p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_n^2+1$ не имеет ни простых делителей вида $4k+1$ (поскольку не делится на p_i), ни $4k+3$ (по задаче 71.9).

71.11. Достаточно доказать, что число a^2+a+1 (при любом a) не имеет простых делителей вида $3k+2$ (а дальше положить $a=3p_1\ldots p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — все простые числа вида $3k+1$). Если $a^2+a+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ для простого $p=3k+2$, то $a^3-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, т. е. порядок a делит и 3, и $p-1=3k+1$, т. е. равен 1. Значит, $a\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, поэтому $a^2+a+1\equiv 3(\mathrm{mod}\ p)$, что несовместимо с $a^2+a+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

72.13. Прежде всего, разложение по формуле бинома показывает, что a_n возрастает и $a_n \leqslant b_n$. Кроме того, ясно, что b_n возрастает и ограничена, поэтому каждая из последовательностей сходится. Наконец, из разложения по биному следует, что для любого фиксированного k и $n \geqslant k$ число a_n оценивается снизу последовательностью с пределом b_k.

72.15. Положим $a_1=\frac{19}{3}$, $b_1=\frac{20}{3}$. Заметим, что $b_1^2-a_1^2=\frac{13}{3}>2$. Из этого следует, что для некоторого $m_1\in\mathbb{N}$ имеет место включение $[m_1+\frac{1}{3}, m_1+\frac{2}{3}]\subset[a_1^2, b_1^2]$. Положим $a_2=\sqrt{m_1+\frac{1}{3}}$, $b_2=\sqrt{m_1+\frac{2}{3}}$. Заметим, что $b_2^3-a_2^3>a_2^2(b_2-a_2)>a_2/3>a_1/3>2$. Поэтому для некоторого $m_2\in\mathbb{N}$ выполнено включение $[m_2+\frac{1}{3}, m_2+\frac{2}{3}]\subset[a_2^3, b_2^3]$. Положим $a_3=\sqrt[3]{m_2+\frac{1}{3}}$, $b_3=\sqrt[3]{m_2+\frac{2}{3}}$. Продолжая в том же духе, построим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, для которых $\{x^n\}\in[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ при любом $x\in[a_n, b_n]$. Осталось взять их общую точку.

73.14. Пусть $M=\{a_1, a_2, \ldots\}$; функция $f(x)=\sum_{a_n\leqslant x}2^{-n}$ монотонна и разрывна в точности в точках множества M.

75.8. Принцип максимума доказывает единственность (если каждое число равно среднему арифметическому соседей, то максимум должен достигаться на краю, так что если с края нули, то и везде нули). А значит, и существование есть (альтернатива Фредгольма).

78.8. Нет (например, для $f(x)=x^3$ при $x=0$).

78.16. Нет. Например, пусть $f(x)=x+x^2D(x)$, где D — функция Дирихле. Если требовать, чтобы функция была дифференцируема в окрестности точки a, то это тоже неверно: можно взять $f(x)=x+x^2\sin(1/x)$.

78.17. Да. Построим последовательность функций f_n на отрезке $[0, 1]$, графики которых являются ломаными с возрастающим числом звеньев. При этом будем следить за тем, чтобы (а) $f_{n+1}(x)$ отличалось от $f_n(x)$ не более чем на 2^{-n} при любом x; (б) вершины ломаной f_n оставались вершинами и всех последующих ломаных; (в) наклон всех звеньев ломаной f_n по модулю был больше n. (Это легко сделать по индукции, взяв в качестве f_{n+1} мелкий, но крутой зигзаг вокруг f_n.) Предельная функция существует и непрерывна (предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций), но не дифференцируема ни в какой точке. Это следует из того, что если f дифференцируема в точке a, то отношения $[f(q)-f(p)]/(q-p)$ при $p < a < q$ имеют предел при $p, q \to a$ и потому ограничены.

79.1. Считая координаты точек (кроме концов) переменными, запишем систему уравнений (она зависит от того, серединой какого отрезка является каждая точка). Такая система имеет единственное решение (принцип максимума): пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — два решения, выберем наибольшее из чисел $|x_i - y_i|$ (из равных — то, где x_i максимально). Согласно уравнениям, x_i и y_i являются серединами отрезков $[x_j, x_k]$ и $[y_j, y_k]$, при этом $|x_j - y_j|$ не больше, а $|x_k - y_k|$ меньше $|x_i - y_i|$, чего не может быть. А раз система имеет единственное решение, то оно рационально, поскольку таковы коэффициенты.

79.2. Нет, поскольку все коэффициенты системы равны ± 1 или ± 2, все определители, входящие в правила Крамера, не так велики.

79.3. Если какая-то синяя точка лежит по одну сторону от некоторой прямой, а все зелёные — по другую, то рассмотрим самую дальнюю от прямой из этих синих точек (а из одинаково удалённых — крайнюю). Она должен быть серединой отрезка, один из концов которой должен быть ещё дальше удалён от прямой, что ведёт к противоречию.

79.4. Аналогичное рассуждение показывает, что координаты синих точек определяются системой уравнений с единственным решением (сама система зависит от того, какие точки окажутся концами отрезков с серединами в синих точках).

79.5. Каждая вершина (синяя) является серединой отрезка с концами в одной из новых точек (зелёной) и в другой синей вершине. Остаётся воспользоваться задачей 79.4.

79.6. Повернём $A'B'C'D'E'$ так, чтобы он перешёл в себя; в силу единственности и $ABCDE$ должен перейти в себя.

79.7. См. решение задачи 79.6.

80.1. Заметим, что можно изменить вес всех гирь на одно и то же число, не нарушая условия, а также разделить (если делится) на одно и то же число. Чётность любой гири равна чётности суммы всех гирь (оставшиеся делятся поровну), поэтому они либо все нечётны, либо все чётны. В первом случае можно вычесть единицу, во втором поделить на 2, и уменьшать суммарный вес гирь, пока он не станет равным нулю (индукция).

80.2. Условия на веса гирь представляют собой систему однородных линейных уравнений (при данном способе разделения гирь на равные кучи). Если она имеет решение, кроме равных весов, то имеет и рациональное (а следовательно, и целое) решение с таким свойством.

80.4. Аналогично случаю двух куч равного веса с равным числом гирь: если есть решение, где не все равны, то есть и такое целочисленное решение. В нём все числа сравнимы по модулю n, вычтем остаток, разделим и так далее.

81.1. Рассмотрим «самое отрицательное» число в таблице: если оно внутри, то все его соседи не менее отрицательны и можно сдвинуться к краю.

81.2. В этом случае в таблице не может быть ни отрицательных (по задаче 81.1), ни положительных чисел (аналогично).

81.3. По задаче 81.2 система имеет единственное решение, значит, оно рационально.

81.4. Следствие задачи 81.2 и «альтернативы Фредгольма».

81.5. Считая потенциалы вершин (кроме истока и стока) переменными, получаем систему линейных уравнений: каждый потенциал равен усреднённому потенциалу соседей (с весами, обратно пропорциональными сопротивлениям). Если в истоке и стоке потенциал равен нулю, то он везде равен нулю (не может достигаться максимум), отсюда следует единственность (и разрешимость).

81.6. Рассмотрим энергию как функцию потенциалов в вершинах (кроме истока и стока). Если фиксировать все потенциалы, кроме одного, то зависимость от этого оставшегося будет квадратичной, и её минимум достигается как раз в точке, задаваемой соответствующим уравнением. Остаётся воспользоваться тем, что минимум достигается (если хотя бы один из потенциалов велик, то на одном из сопротивлений большая разность потенциалов, поэтому энергия стремится к бесконечности, далее пользуемся компактностью).

81.7. Сопротивление можно определить как U/I, где U — разность потенциалов между истоком и стоком, а I — ток в подводящих проводах (сумма токов с учётом знаков в стоке или истоке; легко понять, что они одинаковы для истока и стока). Далее можно проверить, что суммарная мощность равна $UI = U^2/R$ (в каждом сопротивлении она равна произведению разности потенциалов и тока на нём, при суммировании по сопротивлениям всё сокращается и остаётся UI). Поэтому сопротивление можно определить как U^2, делённое на минимум выделяемой мощности по всем потенциалам в вершинах, а этот минимум только уменьшается, когда одно из сопротивлений увеличивают (поскольку от этого мощность уменьшается для каждого набора потенциалов).

82.3. В каждой из задач 82.1 – 82.3 выигрывает желающий нетривиальное решение. В случае $n = 2$ первый может сделать строку или столбец из нулей. Для нечётного размера доски у него есть симметричная стратегия. А именно, он должен занять центр и если второй ставит число в среднюю строку, то ставить что угодно на симметричное место в той же строке. А иначе ставить такое же число в клетку, симметричную относительно средней строки. Так он получит две одинаковые строки (и даже половинный ранг).

82.4. Ответ в этой задаче нам неизвестен.

83.1. Однородная система уравнений даже над $\mathbb{F}_2$ имеет нетривиальное решение, если неизвестных больше, чем уравнений.

83.2. 2^{m+n-1}. Состояния лампочек образуют векторное пространство над полем из двух элементов; нас интересует линейная оболочка векторов, соответствующих строкам и столбцам. Её размерность равна $m+n-1$: сумма всех векторов равна нулю (каждая лампочка входит дважды), а других зависимостей нет (оставим лишь лампочки по верхнему и левому краю, их $m+n-1$ и их легко перевести в любое заданное состояние).

83.3. Число элементов в векторном пространстве над полем из двух элементов есть степень двойки.

85.3. Для матриц 2×2 и 3×3 разложения таковы:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = (a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$$

и

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 =$$
$$= -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) =$$
$$= -(a+b+c)(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon),$$

где ε — корень степени 3 из единицы. Для бо́льших n определитель есть произведение линейных множителей вида $(a_0+\alpha a_1+\ldots+\alpha^i a_i+\ldots)$, где α — корень степени n из единицы (n таких корней дают n множителей). В самом деле, если один из множителей обращается в нуль, то домножение этого равенства на α сдвигает его по кругу, так что линейная комбинация строк с коэффициентами $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ равна нулю. Отсюда нетрудно вывести, что определитель делится на каждый из этих линейных множителей и даже на их произведение. Осталось воспользоваться соображениями степени.

86.8. Как математик прав, как программист — нет, поскольку «машинное сложение» может быть неассоциативным.

86.20. (**а**) Нельзя. Если $(3+4i)^n = 5^n$, то $(2+i)^{2n} = (2+i)^n(2-i)^n$, то есть $(2+i)^n = (2-i)^n$, что противоречит единственности разложения на простые множители в кольце $\mathbb{Z}[i]$. Можно также заметить, что последовательность $(2+i)^k \bmod (2-i)$ периодична с периодом 2: при чётном k имеем $(2+i)^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) - i$, при нечётном k имеем $(2+i)^k \equiv (2+i)(\mathrm{mod}\ 2) - i$.

Другое решение использует тот факт, что $\cos nx$ — многочлен $T_n(\cos x)$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 2^{n-1} (многочлен Чебышёва). Рациональный корень уравнения $T_n(s) = 1$, стало быть, не может иметь в знаменателе пятёрки.

87.11. Найдём отрезок, на котором точная верхняя грань значений не больше $1/2$ (такой есть, поскольку верхние суммы стремятся к нулю). Интеграл по этому отрезку обязательно равен нулю, поэтому найдётся вложенный отрезок, на котором точная верхняя грань не больше $1/4$ и т. д. Значение в общей точке этих отрезков не может быть положительным.

88.16. Таких функций нет. В самом деле, на каждом из лучей $x > 0$ и $x < 0$ уравнение можно явно решить. Очевидно, что склеить никакие два решения не получится. Более изысканное решение использует (неизвестную школьникам) теорему Дарбу: производная принимает все промежуточные значения.

88.17. $f(x) = ae^x$. Действительно, производная функции $f(x)/e^x$ равна нулю.

88.18. $f(x) = a\sin x + b\cos x$. Формула из указания верна: производная левой части действительно равна нулю. Заметим теперь, что уравнению удовлетворят синус и косинус, а также их линейные комбинации. Поэтому функция $g(x) = f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\sin x$ тоже удовлетворяет уравнению, причём обращается в нуле в нуль вместе со своей производной. Отсюда $g^2 + g'^2 \equiv 0$, т. е. $g \equiv 0$.

90.12. Например, $f(x) = x^{\ln x}$.

91.1. Простой пример неинтегрируемой производной возникает по причине неограниченности: например, функция $x^2\sin(1/x^2)$ всюду дифференцируема, а её производная в окрестности нуля не ограничена. Интеграл функции «сигнум» (знак) не является, очевидно, дифференцируемым в нуле.

91.14. Заметим, что $x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} \geqslant \sin(x^2) \geqslant x^2 - \frac{x^6}{6}$. Поэтому $|\sin(x^2) - x^2 + \frac{x^6}{6}| \leqslant \frac{x^{10}}{120}$, и потому с нужной точностью интеграл равен $1/3 - 1/42 = 13/42$. Для пункта (а) достаточно взять лишь первый член ряда.

91.15. **(а)** $x\ln x - x$. **(б)** Докажем, что предел этой последовательности равен $1/e$, или, что то же самое (ведь логарифм непрерывен), что предел логарифмов членов этой последовательности равен -1. Эти логарифмы суть $\frac{1}{n}(\ln 1 + \ldots + \ln n) - \ln n$. Заметим, что площадь под графиком логарифма на $[1, n]$ оценивается сверху величиной $\ln 2 + \ldots + \ln n$ и снизу — величиной

$\ln 1 + \ldots + \ln(n-1)$. Равна же эта площадь $n \ln n - n + 1$. Поэтому

$$\ln 1 + \ldots + \ln(n-1) \leqslant n \ln n - n + 1 \leqslant \ln 2 + \ldots + \ln n,$$

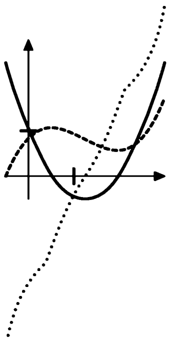
откуда

$$\frac{1}{n}(\ln 1 + \ldots + \ln n) - \frac{\ln n}{n} - \ln n \leqslant -1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}(\ln 2 + \ldots + \ln n) - \ln n,$$

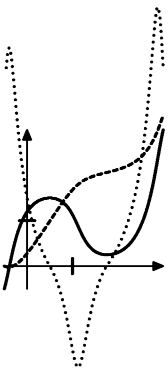
что можно переписать в виде

$$-1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}(\ln 1 + \ldots + \ln n) - \ln n \leqslant -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n},$$

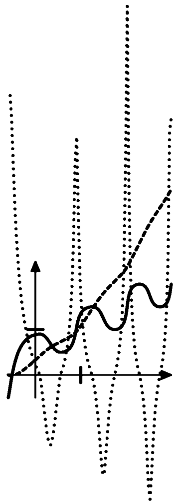
и утверждение доказано.



92.1.[5]

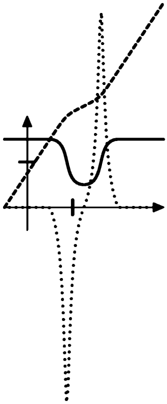


92.2.

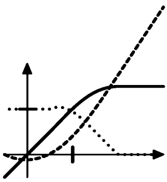


92.3.

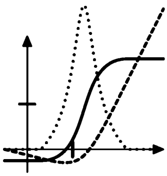
[5]Не для каждого из случаев легко предвидеть, что относительно точное изображение графиков производной и первообразной именно таково; такая точность, разумеется, не требовалась. Приводимые графики изготовлены В. Шуваловым с помощью программы MetaPost.



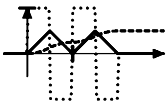
92.4.



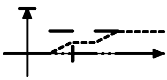
92.5.



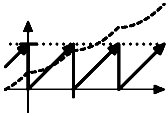
92.6.



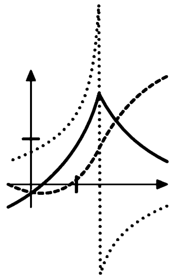
92.7.



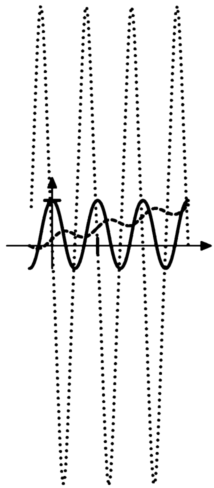
92.8.



92.9.



92.10.



92.11.

93.5. Во-первых,

$$\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}+\ldots+\frac{a_n}{A_n}\leqslant\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_1}+\ldots+\frac{a_n}{A_1}=\frac{A_n}{A_1},$$

поэтому если первый ряд сходится, то сходится и второй. Пусть первый ряд расходится. В этом случае есть два рассуждения. Можно воспользоваться задачей 93.6: ряд $\sum\frac{a_k}{A_k}$ расходится тогда и только тогда, когда произведения $\prod_{k>1}(1-\frac{a_k}{A_k})$ стремятся к нулю. Но n-ое частичное произведение равно $\frac{A_1}{A_n}$ и потому стремится к нулю тогда и только тогда, когда ряд расходится. Можно и иначе: если первый ряд расходится, то найдутся сколь угодно далёкие отрезки членов второго ряда с суммой больше $1/2$:

$$\frac{a_{m+1}}{A_{m+1}}+\ldots+\frac{a_n}{A_n}\geqslant\frac{a_{m+1}}{A_n}+\ldots+\frac{a_n}{A_n}=\frac{A_n-A_m}{A_n}=1-\frac{A_m}{A_n},$$

и из стремления частичных сумм A_k к бесконечности следует требуемое.

93.6. (1) $\Rightarrow$ (2): если раскрыть скобки, то среди слагаемых встречаются $a_1,\ldots,a_n$ и ещё какие-то неотрицательные числа.

(2) $\Rightarrow$ (3): произведения

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n)(1-a_1)\ldots(1-a_n)=(1-a_1^2)\ldots(1-a_n^2)$$

ограничены, поэтому утверждение очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1): заметим, что $1-x\geqslant 4^{-x}$ при $0\leqslant x\leqslant 1/2$ (функция $f(x)=4^{-x}$ выпукла вниз, а в точках 0 и $1/2$ имеет место равенство). Если бесконечно много из чисел a_i больше $1/2$, то произведения стремятся к нулю, а ряд расходится. В противном случае можно выбросить все такие числа (что не влияет на сходимость) и считать, что таких чисел вообще нет. Тогда

$$(1-a_1)\ldots(1-a_n)\geqslant 4^{-a_1-\ldots-a_n},$$

поэтому ряд не может сходиться.

93.13. В листке «Конечные приращения» было доказано, что $e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ при $x>0$. Докажем, что при $x>0$ выполнено неравенство

$$e^x\leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n e^x}{n!}.$$

Докажем это неравенство индукцией по n. Для $n=0$ неравенство имеет вид $e^x\leqslant e^x$ (т. е. верно). Пусть это неравенство верно для $n=k-1$. Функции e^x и $1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{x^k e^x}{k!}$ равны при $x=0$, а их производные суть e^x и $\left(1+x+\ldots+\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{x^{k-1}e^x}{(k-1)!}\right)+\frac{x^k e^x}{k!}$, то есть по предположению индукции первая производная не больше второй. Отсюда следует, что и для функций выполнено нужное неравенство, что и требовалось. Для доказательства нашего утверждения осталось заметить, что $\frac{x^n e^x}{n!}$ при фиксированном $x>0$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Другой способ рассуждения напоминает про доказательство этого равенства при $x=1$:

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

(чтобы доказать это, можно прологарифмировать рассматриваемую последовательность), и формула бинома показывает, что частичные суммы ряда мало отличаются от членов этой последовательности.

93.21. Умножим n-ую частичную сумму этого ряда на $2\sin\frac{1}{2}$. Получим

$$\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{3}{2}}{1}+\frac{\cos\frac{3}{2}-\cos\frac{5}{2}}{2}+\ldots+\frac{\cos\frac{2n-1}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}}{n}.$$

Перегруппировкой слагаемых из этого можно получить

$$\frac{\cos\frac{1}{2}}{1}-\left(\frac{\cos\frac{3}{2}}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\cos\frac{2n-1}{2}}{(n-1)n}\right)-\frac{\cos\frac{2n+1}{2}}{n}.$$

Ряд в скобках абсолютно сходится, а последнее слагаемое стремится к нулю. Поэтому и исходный ряд сходится.

93.22. Нет; из фундаментальности последовательности частичных сумм первого ряда следует фундаментальность для частичных сумм второго ряда.

93.23. Может! Рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}+\ldots.$$

Его частичные суммы с номерами, кратными трём, равны нулю, а члены ряда стремятся к нулю, значит, этот ряд сходится. Ряд же из кубов равен

$$1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot 2}-\frac{1}{8\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{8n}-\frac{1}{8n}+\ldots,$$

и его частичные суммы с номерами, кратными трём, пропорциональны частичным суммам гармонического ряда, значит, этот ряд расходится.

93.25. Точка, прямая или плоскость (это утверждение называется теоремой Штейница). Допустим, что ряд из проекций на какую-то прямую абсолютно сходится. Выберем оси декартовых координат так, чтобы эта прямая была первой из осей. Заметим, что при перестановках членов ряда первая координата суммы ряда всегда одна и та же. В зависимости от вида сходимости ряда из вторых координат получится точка или прямая (по теореме Римана).

Пусть теперь такой прямой не существует. Докажем, что найдётся вектор v, такой что для каждого $\varepsilon > 0$ сумма членов ряда, образующих с v угол меньше ε, не сходится абсолютно. Действительно, в противном случае можно выбрать конечное число таких углов, покрывающих всю плоскость (например, из компактности единичной окружности), и ряд был бы абсолютно сходящимся — противоречие.

Будем называть такой вектор особым направлением. Докажем, что в любой полуплоскости найдётся особое направление u. Если граница полуплоскости содержит особое направление, то всё доказано. Пусть это не так. Выберем оси декартовых координат так, чтобы прямая, ограничивающая полуплоскость, была второй из осей (а полуплоскость состояла из точек с отрицательными первыми координатами). Рассмотрим часть ряда, состоящую из векторов, лежащих в данной полуплоскости. Поскольку мы предположили, что ряд из проекций на любой вектор сходится условно, получаем, что ряд из первых координат выбранных векторов расходится. Последовательность направлений этих векторов имеет, очевидно, предельные точки. Более того, легко видеть, что найдётся предельное направление, которое является особым. (В противном случае у каждого направления есть окрестность, в которую попадает либо конечное число членов ряда, либо его абсолютно сходящаяся часть. Эти окрестности покрывают полуокружность возможных направлений, и снова надо воспользоваться компактностью.)

Будем теперь строить искомую перестановку (достигающую суммы s) постепенно. Заметим, что если w — особое направление, то можно указать часть ряда, у которой проекция суммы на w равна $+\infty$, а ряд из ортогональных составляющих абсолютно сходится. Действительно, для $\varepsilon_n = 1/n^2$ возьмём столько членов ряда, образующих с w угол меньше ε_n, чтобы сумма их длин была заключена между 1 и 2 (очевидно, для каждого нового ε_n можно обойтись ещё не задействованными членами).

Рассмотрим множество векторов, представимых в виде линейной комбинации особых направлений с неотрицательными коэффициентами. Это множество является, очевидно, плоским углом (с границей, поскольку предел особых направлений, очевидно, особое направление). Если он меньше развёрнутого, то его дополнение содержит полуплоскость, в которой, по доказанному, есть особое направление. Поэтому он либо развёрнутый, либо совпадает со всей плоскостью. В первом случае очевидно, что если v — направление одной из его сторон, то это особое направление, причём направление $-v$ тоже особо. Выберем вновь систему координат, у которой первая ось идёт вдоль v. Выберем несколько членов ряда, у которых сумма вторых координат близко к желаемой, после чего скорректируем первую координату, мало изменив вторую (с помощью части, найденной в предыдущем абзаце). Теперь — «для порядка» — возьмём первый из ещё не задействованных членов и продолжим процесс сначала. Во втором случае желаемая сумма представима в виде линейной комбинации особых направлений с неотрицательными коэффициентами. Выберем несколько векторов так, чтобы хорошо приблизить каждое слагаемое линейной комбинации. После этого возьмём первый из ещё не задействованных членов ряда и продолжим процесс сначала. В каждом из случаев мы получим то, что нужно, поскольку длины слагаемых условно сходящегося ряда стремятся к нулю, и мы достаточно часто оказываемся близко к желаемой сумме.

94.1. В самом деле, если $1974^n < 10^k \leqslant 1974^n + 2^n$, то $k > n$, и потому можно сократить на 2^n. Получится $987^n < 2^{k-n}5^n \leqslant 987^n + 1$, что возможно лишь, если второе неравенство обращается в равенство. А это невозможно, так как $987^n + 1$ не делится на 8 (а даёт остатки 2 и 4 по очереди).

94.2. Рассмотрим 28 центров граничных клеток; между любыми двумя должен пройти хотя бы один разрез, а каждая прямая даёт не более двух разрезов.

95.7. В первых двух случаях можно получить все одночлены в силу «треугольности». В третьем случае всё не так просто. Если бы эти многочлены были линейно зависимы, то были бы линейно зависимы (с теми же коэффициентами) и их производные всех порядков. Вычислив значения в точке, мы получаем систему линейных уравнений на коэффициенты линейной зависимости. Можно доказать (разными способами), что её определитель не равен нулю, и потому есть только тривиальное решение.

96.9. (**а**) Рассмотрим числа $nx \bmod y$: среди них найдётся два на расстоянии, меньшем $1/1000$, поскольку их бесконечно много, а длина отрезка $[0, y]$, на котором все они лежат, конечна (и равна y). Их разность — число того же вида, которое менее, чем на $1/1000$ отличается от кратного y, что и требовалось. (**б**) Если все векторы коллинеарны, то всё сводится к пункту (а). В противном случае есть два неколлинеарных, рассмотрим их линейные комбинации с целыми коэффициентами (это решётка на плоскости). Целочисленные кратные третьего вектора будем приводить по модулю первых двух, так чтобы они попадали в фиксированный параллелограмм решётки. Поскольку их бесконечно много, то какие-то два находятся на расстоянии не более $1/1000$. Дальнейшее ясно. (**в**) Аналогично (а), (б).

97.5. (**а**) Нет, сумма первого и третьего коллинеарна второму. (**б**) Да. (**в**) Да. (**г**) Да; наличие линейной зависимости означало бы, что многочлен степени не выше $n-1$, коэффициенты которого суть коэффициенты в этой линейной зависимости, равен нулю в n точках и потому равен нулю тождественно (а потому все его коэффициенты равны нулю). Этот же аргумент примени́м к задаче 96.7, в которой требовалось доказать, что каждый вектор является линейной комбинацией таких: многочлен с данными значениями можно построить. Удивительно, что эта задача встретила трудности и предложенные решения использовали «тяжёлую артиллерию» типа определителя Вандермонда.

97.8. Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы; при этом векторы линейно независимы тогда и только тогда, когда соответствующий определитель не равен нулю, поэтому утверждение доказано.

97.10. Наличие линейной зависимости означало бы, что некоторая функция вида $f(x) = a_1 x^{k_1} + \ldots + a_n x^{k_n}$ имеет по крайней мере n ненулевых корней. Докажем, что это невозможно. Предположим противное. Разделим на x^{k_1} и продифференцируем. По теореме Ролля полученная функция имеет по крайней мере $n-1$ корней. С другой стороны, по предположению индукции это невозможно.

98.5. Применим задачу 98.4 и заменим некоторые векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ на наши векторы. Теперь можно вычеркнуть столбцы, в которых стоят единицы у оставшихся векторов стандартного базиса.

98.12. Условие задачи означает, что если подставить $f(t)$ и $g(t)$ во всевозможные одночлены степени не выше n, то полученные многочлены от t окажутся линейно зависимыми. Докажем это. В самом деле, если раскрыть скобки в $h(f(t), g(t))$, где $\deg h = n$, то получится многочлен от t степени не больше, чем $n \max(\deg f, \deg g)$. При этом размерность пространства рассматриваемых многочленов h равна $(n+1)(n+2)/2$. При достаточно больших n это число больше, чем размерность пространства возможных многочленов от t, что повлечёт за собой желаемую линейную зависимость.

101.10. (**а**) Легко видеть, что неравенство

$$f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)+f(z)+f(t)}{4}$$

верно (дважды применяем неравенство для двух чисел). Теперь подставим $t = \frac{x+y+z}{3}$. (**б**) Сначала можно доказать «неравенство Иенсена»

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

в случае рациональных α_i, в сумме равных единице (сначала аналогично пункту (а) доказываем в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, а потом полагаем некоторые переменные равными). Поскольку функция непрерывна, аналогичное неравенство верно для любых действительных α_i, откуда следует выпуклость.

102.8. Докажем вспомогательное утверждение: если одна сторона треугольника (в пространстве) фиксирована, а оставшаяся вершина движется по прямой, то площадь — выпуклая вниз функция точки этой прямой. Из этого утверждение задачи, разумеется, следует (выпуклая функция достигает максимума в конце отрезка, поэтому вершины сечения можно по одной передвинуть в вершины тетраэдра с увеличением площади). Если основание треугольника a и прямая l, которую пробегает точка, лежат в одной плоскости, то изучаемая функция кусочно-линейна, причём нетрудно видеть, что эта функция выпукла вверх (нарушение линейности может произойти лишь в точке пересечения прямых a и l, при этом график лежит в верхней плоскости, т. к. площадь неотрицательна). В противном случае пусть α — плоскость, которая проходит через a перпендикулярно l, X — её точка пересечения с l. Расстояние от точки $Y \in l$ до a равно $\sqrt{d^2+y^2}$, где d —

расстояние между a и l, а $y = XY$. Эта функция выпукла, а площадь отличается от неё в постоянное число раз.

102.9. Четырёхугольные сечения тетраэдра возникают, когда две его вершины лежат по одну сторону секущей плоскости, а две — по другую, и четыре ребра, их соединяющие, протыкают плоскость в вершинах четырёхугольника.

Проведём ось через две противоположные вершины этого четырёхугольника и будем вращать секущую плоскость вокруг этой оси. Пока эта плоскость не пройдёт через одну из четырёх вершин тетраэдра, сечение будет оставаться четырёхугольным, а его площадь будет меняться (и эту функцию — зависимость площади от положения плоскости — мы и будем изучать). В момент упора секущая плоскость пройдёт через одну из вершин и сечение станет треугольным. Поэтому достаточно доказать, что указанная функция достигает максимума на одном из концов.

Ось вращения является диагональю четырёхугольного сечения и разбивает его на два треугольника, у которых является основанием. Это основание постоянно, поэтому нас по существу интересует сумма высот этих треугольников.

Спроектируем всё это вдоль оси вращения (на перпендикулярную ей плоскость). Приходим к такой задаче: на плоскости есть точка O и два отрезка. Вращающаяся вокруг O прямая пересекает эти два отрезка; нужно доказать, что расстояние между точками пересечения достигает максимума в одном из крайних положений прямой. А это следует из того, что (как функция угла) это расстояние выпукло вниз: оно состоит из двух слагаемых, каждое из которых получается сдвигом и растяжением из $1/\cos\varphi$ (а это — выпуклая вниз функция от угла φ, поскольку её производная $\sin\varphi/\cos^2\varphi$ монотонно возрастает).

102.13. Объём — выпуклая (даже линейная) функция вершин тетраэдра, поэтому максимум достигается, когда все вершины тетраэдра лежат в вершинах коробки. Легко видеть, что такие тетраэдры бывают двух типов — объёма $3 \cdot 4 \cdot 5/6 = 10$ и объёма $3 \cdot 4 \cdot 5/3 = 20$.

103.8. Эта производная равна постоянной величине («теорема о лимоне и яйцерезке»).

104.6. (а) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (интегрирование по частям), откуда имеем $I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi/2$, $I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$. (б) Из пункта (а) и неравенства, упомянутого в условии (верного, ведь синус принимает на этом отрезке значения от нуля до единицы), следует, что $\lim \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ (ибо $I_{n-1} < I_n < I_{n+1}$). Подставляя формулы для I_{2k} и I_{2k+1}, получаем формулу Валлиса.

104.8. Пусть $g(t)$ — первообразная функции $f(t)$, тогда $g(\sin x)$ — первообразная функции $f(\sin x)\cos x$. Осталось применить формулу Ньютона – Лейбница.

104.9. В этом случае первообразная может не существовать, поэтому нужно более тонкое рассуждение. Рассмотрим произвольную интегральную сумму для функции $f(t)$. Точки разбиения имеют вид $t_i = \sin(\arcsin t_i) = \sin y_i$ для некоторых $y_i \in [0, \pi/2]$. Пусть значения вычисляются в точках $s_i = \sin z_i$ для некоторых $z_i \in [0, \pi/2]$ (отметим, что если $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$, то $z_i \in [y_i, y_{i+1}]$). Имеем

$$\sum_i f(s_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_i f(\sin z_i)(\sin y_{i+1} - \sin y_i) = \\ = \sum_i f(\sin z_i)(y_{i+1} - y_i)\cos\xi_i,$$

что отличается от интегральной суммы $\sum_i f(\sin z_i)\cos(z_i)(y_{i+1} - y_i)$ на величину, стремящуюся к нулю при измельчении разбиения.

104.10. Можно либо интегрировать по частям, либо использовать равенство $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

104.11. В силу симметричности относительно прямой $x = \pi/4$ выполнено равенство $\int_0^{\pi/2}\cos^2(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^2(\sin x)\,dx$, поэтому интеграл равен $\pi/2$.

105.9. (**а**) Неформально: рассмотрим радиус-векторы вершин правильного симплекса. Как проще всего предъявить пример? Отождествим $\mathbb{R}^n$ с гиперплоскостью $x_1 + \ldots + x_{n+1} = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — векторы стандартного базиса; положим $v = \frac{1}{n+1}(e_1 + \ldots + e_{n+1})$. Тогда векторы $e_1 - v$, $e_2 - v, \ldots, e_{n+1} - v$ подходят (векторы $e_1, \ldots, e_{n+1}$ ведут в вершины симплекса с центром v; надо лишь его передвинуть): при $k \neq l$

$$(e_k - v, e_l - v) = -\frac{2}{n+1} + \frac{n+1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{n+1}.$$

(**б**) Предположим противное; без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Докажем, что все числа α_i одного знака. Если это не так, то соберём по отдельности положительные и отрицательные коэффициенты:

$$\alpha_{i_1} x_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k} x_{i_k} = -\alpha_{j_1} x_{j_1} - \ldots - \alpha_{j_m} x_{j_m},$$

откуда

$$\|\alpha_{i_1} x_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k} x_{i_k}\|^2 = (-\alpha_{j_1} x_{j_1} - \ldots - \alpha_{j_m} x_{j_m}, \alpha_{i_1} x_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k} x_{i_k}) < 0.$$

Противоречие. А если все коэффициенты одного знака, то противоречие получается, если умножить скалярно на x_{n+1}.

106.2. Заметим, что $x^{10}+x^5+1=\frac{x^{15}-1}{x^5-1}$. Поэтому примитивный корень третьей степени из единицы является корнем данного многочлена, т. е. делителем является x^2+x+1. Алгоритм деления в столбик говорит, что частное — многочлен с целыми коэффициентами.

106.4. Параллельным переносом добьёмся, что точка есть начало координат. Рассмотрим сферу $(x-\sqrt{2})^2+y^2+z^2=2$. Докажем, что начало координат — единственная рациональная точка этой сферы. В самом деле, уравнение сферы можно переписать в виде $x^2+y^2+z^2=2x\sqrt{2}$, поэтому при $x\neq 0$ это равенство для рациональных чисел невозможно. Если же $x=0$, то $y=z=0$.

106.5. Сделаем инверсию с центром в общей точке окружностей. Все окружности станут попарно параллельными прямыми. Возьмём прямую, которая пересекает их под углом 30°. Её прообраз при инверсии — искомая дуга.

106.7. От $n-2$ до $n+2$. Заменой $x\leftrightarrow -x$ второе уравнение преобразуется в $b+ax=-\sin x$. Нарисуем на плоскости графики $y=\sin x$ и $y=-\sin x$. Они разрезают плоскость на ограниченные («луночки») и неограниченные части. Любая прямая $y=b+ax$ пересекает некоторое число луночек. Без ограничения общности, она не проходит через точку пересечения графиков (этот случай легко разобрать отдельно). Легко видеть, что для всех луночек, кроме содержащей точку пересечения, прямая пересекает границу в точках одного и того же графика, причём для соседних луночек эти графики разные. Отсюда уже легко получить ответ.

106.8. Шаг 1. (Отсекаем лишнее.) Пусть λ — минимум отношения. Рассмотрим разность $p(x)/q(x)-\lambda=(p(x)-\lambda q(x))/q(x)$. Раз λ — минимум, то многочлен $p(x)-\lambda q(x)$ неотрицателен и имеет корень, а значит, его дискриминант равен нулю. Получилось квадратное уравнение на λ с целыми коэффициентами. Кроме того, если λ — его бóльший корень, то ясно, что это максимум, а не минимум. Поэтому λ либо рационально, либо является квадратичной иррациональностью вида $a-\sqrt{b}$, где $a, b\in\mathbb{Q}$ (при этом оно положительно, т. к. является минимумом положительной функции). (Отсюда ясно, что $\sqrt{2}$ и $3+2\sqrt{2}$ не подходят.)

Шаг 2. (Мы строили, строили...) Можно считать, что наши квадратные трёхчлены имеют рациональные коэффициенты, причём старший коэффициент $q(x)$ равен 1. Выделяя целую часть (рациональное число), получаем, что надо изучить минимум отношения $(ux+v)/q(x)$, где $a, b\in\mathbb{Q}$. Это отношение заменой переменной (что не страшно, т. к. изучается минимум по всем значениям x) сводится к отношению $y/(y^2+my+n)$, минимум которого есть $1/(m-2\sqrt{n})=(-m-2\sqrt{n})/(4n-m^2)$. Подберём теперь параметры для $\lambda=a-\sqrt{b}$. Положим $m=0, n=1/(4b)$, $p(x)/q(x)=a+\frac{y}{y^2+1/(4b)}=$

$= \frac{4aby^2+4by+a}{4by^2+1}$. (В частности, для $3-2\sqrt{2}$ можно взять $p(x) = 96y^2+32y+3$, $q(x) = 32y^2+1$.)

106.9. Это директриса параболы, т. е. прямая $y = -1/4$. Данный факт можно усмотреть непосредственно из вычисления, но мы приведём геометрическое доказательство. Пусть M — такая точка, P, Q — соответствующие точки касания, F — фокус параболы, P_1, Q_1 — основания перпендикуляров, опущенных из PQ на директрису. Тогда $FP = PP_1$, $FQ = QQ_1$ (свойство фокуса и директрисы), $\angle FPM = \angle P_1PM$, $\angle FQM = \angle Q_1QM$ («оптическое свойство параболы»), откуда прямоугольные треугольники FPM и P_1PM равны, как и треугольники FQM и Q_1QM. Поэтому $\angle P_1MQ_1 = 2\angle PQM = 180^\circ$, т. е. M принадлежит прямой P_1Q_1.

106.10. Уравнения параболы и её образа в некоторой системе координат суть $y = x^2 + a$, $x = y^2 + b$. Складывая их, получаем уравнение окружности (на которой лежат, очевидно, точки пересечения).

106.12. Бесконечно. Будем строить элементы этого множества по индукции: если n удовлетворяет условию задачи, то число $4n(n+1)$ — тоже: в него все множители входят в степени выше первой по предположению, а если его увеличить на 1, то получится полный квадрат.

106.13. Ответ: $(0, 0, 0)$. Среди чисел x, y, z есть чётное, поэтому сумма квадратов делится на 4. Квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 4, поэтому все числа чётны. Сократив на $4 = 2^2$, получаем аналогичное уравнение, где 2 заменено на 4. Продолжая в том же духе, получим, что x, y, z делятся на любую степень двойки.

106.14. Указание: замена $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$ сводит это неравенство к очевидному

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqslant 6.$$

106.15. Ответ: 2^k. Это число равно, очевидно, $\frac{(2k)!}{k!} = (2k-1)!! \cdot 2^k$.

106.17. Радиус описанной сферы тетраэдра с вершинами в центрах тяжести граней равен $R/3$. С другой стороны, вписанная сфера является, очевидно, наименьшей сферой, которая имеет общие точки со всеми гранями.

106.24. Эту задачу можно решить и геометрически, однако проще рассуждать следующим образом. Предположим, что b — единичный отрезок. Тогда всё легко построить (складывать отрезки мы умеем, умножение и деление осуществляется с помощью теоремы о пропорциональных отрезках, извлечение квадратного корня — с помощью того, что высота прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу). Заметим, что мы построили именно то, что нужно, ибо в единицах измерения b отрезок a имеет длину a/b, отрезок $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ — длину $\sqrt[4]{a^4 + b^4}/b = \sqrt[4]{(a/b)^4 + 1}$ и т. д.

106.27. Да, можно, ведь это многочлен от xy, и потому он раскладывается в произведение многочленов второй степени с действительными коэффициентами. Чуть менее тривиальный вопрос — представим ли этот многочлен в виде $f(x)g(y)$ (ответ: нет).

106.32. Эти уравнения задают гиперболу и эллипс, и мы хотим оценить расстояния между их точками. Рассмотрим у гиперболы касательную в точке $(2, 2)$. Параллельная ей касательная к эллипсу имеет уравнение $x + y = \sqrt{5}$ (это касательная в точке $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$), и расстояние между этими касательными уже больше $1{,}6$.

107.8. Научное решение: оба условия означают, что $A^t = A^{-1}$. Это можно просто объяснить и без произведения матриц (придумал Р. Савченко): разложим базисные векторы стандартного ортонормированного базиса по базису из строк матрицы. Легко заметить, что координаты k-го из них составляют в точности k-ый столбец.

Литература

[1] Гервер М. Л., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по алгебре и анализу, предлагавшиеся учащимся 9 и 10 классов // Обучение в математических школах. М.: 1965.

[2] Константинов Н. Н. Введение в математический анализ (курс задач для IX – X классов) // Углублённое изучение алгебры и анализа / Составители С. И. Шварцбурд, О. А. Боковнев. М.: Просвещение, 1977. С. 6 – 76.

[3] Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю. В. Математический анализ в математических классах пятьдесят седьмой школы. М.: МЦНМО: Черо, 1998.

[4] Задачи по математике / Под редакцией А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000.

[5] Программа «Матшкольник» // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 4. М.: МЦНМО, 1998. С. 193 – 215.

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

предлагавшиеся ученикам математического класса
57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д»)

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 10.05.2004 г.
Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 14.
Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано во ФГУП «Полиграфические ресурсы».

СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМЫЕ ИЗДАНИЯ

Все перечисленные ниже книги являются свободно распространяемыми и доступны в виде файлов (исходные тексты в системе LaTeX и оригинал-макеты в форматах PostScript и PDF) по адресу `ftp://ftp.mccme.ru/users/shen`.

Программирование: теоремы и задачи (А. Шень)

В этой книге объясняются приёмы, помогающие написать правильно и быстро работающую программу вместе с доказательством её правильности.

Названия глав:

1. Переменные, выражения присваивания;
2. Порождение комбинаторных объектов;
3. Обход дерева. Перебор с возвратами;
4. Сортировка;
5. Конечные автоматы и обработка текстов;
6. Типы данных;
7. Рекурсия;
8. Как обойтись без рекурсии;
9. Разные алгоритмы на графах;
10. Сопоставление с образцом;
11. Анализ игр;
12. Оптимальное кодирование;
13. Представление множеств. Хеширование;
14. Представление множеств. Деревья. Сбалансированные деревья;
15. Контекстно-свободные грамматики;
16. Синтаксический разбор слева направо.

Книга рассчитана на школьников и студентов, интересующихся программированием (= построением алгоритмов); она написана на основе материалов занятий в школе № 57 г. Москвы и семинаров для студентов МГУ и Независимого московского университета. Уровень трудности глав разный: начинается книга с совсем простых задач, а последние разделы содержат достаточно сложные методы разбора контекстно-свободных грамматик (LL(1), LR(1)) с доказательствами.

Во втором русском издании (первое вышло в 1995 г., английский перевод в 1997 г.) добавлены разделы о суффиксных деревьях, оптимальных кодах и анализе игр.

Математическая индукция (А. Шень)

В брошюре разбирается несколько десятков задач, в решении которых используется математическая индукция. (Написана по материалам лекции для школьников 8–9 классов.)

Задачи по математике (под редакцией А. Шеня)

Сборник задач, предлагавшихся в одном из математических классов школы № 57 г. Москвы (выпуск 2000 года, класс «В»).

Лекции по математической логике и теории алгоритмов (Н. К. Верещагин, А. Шень)

Часть 1. Начала теории множеств.

Часть 2. Языки и исчисления.

Часть 3. Вычислимые функции.

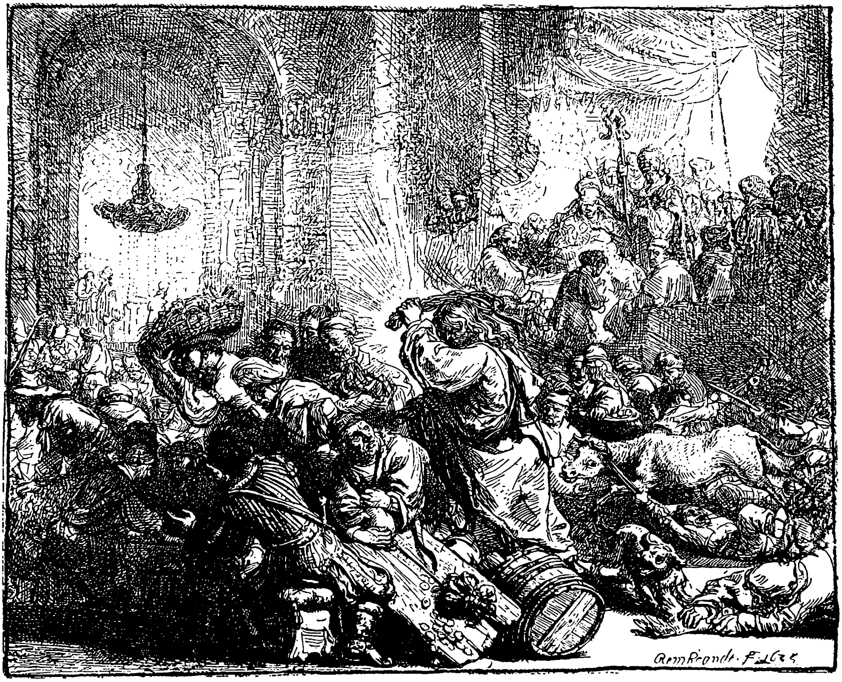
Классические и квантовые вычисления (М. Вялый, А. Китаев, А. Шень)

Труды по нематематике с приложением семиотических посланий Колмогорова к автору и его друзьям (В. А. Успенский)

См. также раздел «Свободно распространяемые издания» в http://www.mccme.ru и (свободно распространяемую) книгу

Набор и вёрстка в системе LaTeX (С. М. Львовский)

Файлы этой книги и русские дополнения к системе LaTeX можно найти по адресу ftp://ftp.mccme.ru/pub/tex.



Рембрандтъ. Христосъ изгоняетъ торжниковъ. Гравюра.

ISBN 5-94057-153-0

9 785940 571537 >

Замеченные опечатки

страница	строка	написано	следует читать
4	10 сверху	два часа	три часа
5	14 сверху	празднолюдии	празднолюбии
9	6 снизу	чтоб	чтобы
47	выкл. формула	$1/\sqrt{1}+1/\sqrt{2}+\cdots+1/\sqrt{k}$	$1/\sqrt{1}+1/\sqrt{2}+\ldots+1/\sqrt{k}$
50	16 снизу	чёр-	чер-
68	9 снизу	расqтояний	расстояний
72	8 сверху	$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$	$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n.$
72	9 сверху	$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots\pm C_n^n$	$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots\pm C_n^n$
73	20 снизу	$C_{2001}^0+C_{2001}^2+\cdots+C_{2001}^{2000}$	$C_{2001}^0+C_{2001}^2+\ldots+C_{2001}^{2000}$
73	19 снизу	$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$	$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$
73	7 снизу	$x_1+x_2+\ldots x_{10}=24$	$x_1+x_2+\ldots+x_{10}=24$
73	1 снизу	$1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$	$1\cdot 2+2\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^n$
75	12 сверху	$x^p+y^p+z^p \pmod p;$	$x^p+y^p+z^p \pmod p.$
75	17 снизу	Закончить	Закончите
82	13 снизу	не бреет себя	не бреется сам
83	20 снизу	если...	если ...
84	2 выкл. формула снизу	$C_{n-3}^k+aC_{n-3}^{k-1}+C_{n-3}^{k-2}+C_{n-3}^{k-3}$	$C_{n-3}^k+aC_{n-3}^{k-1}+bC_{n-3}^{k-2}+C_{n-3}^{k-3}$
84	3 снизу	$(1+x+x^2+\cdots+x^9)^5$	$(1+x+x^2+\ldots+x^9)^5$
84	1 выкл. формула снизу	$\left(\sum_{k=0}^{10}(-1)^k x^k\right)$	$\left(\sum_{k=0}^{10}(-1)^k x^k\right).$
89	14 снизу	если...	если ...
100	7 снизу	$\varepsilon>0\ldots$	$\varepsilon>0\ \ldots$
116	3 сверху	будет печатать исходный код	будет печатать исходный код в обратном порядке
116	11 снизу	(m,n)	$(m,n);$
116	10 снизу	числах	числах;
120	13 сверху	эти три интеграла	интегралы по этим трём отрезкам
129	16 снизу	$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots.$	$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$
130	9 снизу	число $1,2,3,\ldots$ можно	число можно
133	5 сверху	$\cos 2x,\ldots,\cos 10x$	$\cos 2x,\ \ldots,\ \cos 10x$
133	6 сверху	$\sin 2x,\ldots,\sin 10x$	$\sin 2x,\ \ldots,\ \sin 10x$
133	13 сверху	$\langle 0,1,\ldots,0\rangle,\ldots,$	$\langle 0,1,\ldots,0\rangle,\ \ldots,$
133	14 сверху	$\langle 0,0,1,\ldots,1\rangle,\ldots,$	$\langle 0,0,1,\ldots,1\rangle,\ \ldots,$
133	16 сверху	$\langle 1,4,\ldots,n^2\rangle,\ldots$	$\langle 1,4,\ldots,n^2\rangle,\ \ldots,$
135	6 сверху	$v_1,v_2,v_3\ldots$	$v_1,v_2,v_3,\ldots$
139	12 сверху	Квадратичное	квадратичное
141	11 снизу	$f'g$	gf'
141	8 снизу	$\int x\cos x\,dx$	$\int x\cos x\,dx.$
145	1 выкл. формула сверху	$\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{x+2}\ldots+\frac{a_{100}}{x+100}$	$\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{x+2}+\ldots+\frac{a_{100}}{x+100}$
145	7 снизу	четырехугольник	четырёхугольник
145	5 снизу	четырехугольник	четырёхугольник
146	2 сверху	четырехугольник	четырёхугольник
146	19 сверху	четырехугольнике	четырёхугольнике
146	18 снизу	четырехугольника	четырёхугольника
148	1 снизу	=последовательностей	= последовательностей
149	3 снизу	множества полукольца	множества из полукольца
150	17 снизу	Тот же вопрос	Та же задача
151	19 сверху	и...	и ...
151	16 снизу	числа	множество чисел
152	19 сверху	множества	подмножества плоскости
157	10 снизу	иначе).	иначе.)
162	2 снизу	$\operatorname{tg}\phi\in\mathbb{Q}$	рациональным тангенсом угла наклона
163	8 снизу	$x<0$.	$x<0.$
166	2 снизу	такая колония	такая последовательность колоний
166	2 снизу	в ней	в n-ой колонии этой последовательности
166	1 снизу	есть $O(n^2)$	не меньше Cn^2
169	2 снизу	Аналогично,	Аналогично
170	1 сверху	$A^3=x$,	$A^3=x,$
170	5 снизу	условию 3	условию (3)
172	2 сверху	от нуля).	от нуля.)
176	11–12 снизу	*сеткой* кривой дракона	*сеткой кривой дракона*

страница	строка	написано	следует читать
181	подпись к рис. 10	вид кривой	вид кривой.
182	6 сверху	RL	LL
182	7 сверху	кривые	кривых
182	7 сверху	выпущенные	выпущенных
182	9 сверху	кривые	кривых
185	20 снизу	сделал	сделал (сделала)
185	1 снизу	31 цифры достаточно	32 цифр быть не может
186	9 сверху	$2n+1$-ый	$(2n+1)$-ый
187	19 сверху	заметить)!	заметить!).
187	13 снизу	аналогичной формулы	аналогичной формуле
			с числом целых точек
188	4 сверху	$(n-1)!$	$(n-1)!$.
189	16 снизу	что новая	что если новая
189	9 снизу	Нет,	Нет:
191	20 снизу	(или треугольник —	или треугольник.
			Легко видеть, что
192	8 сверху	«уголка» $У_n$	«уголка» $У_n$
192	9 снизу	44.8, как равенство	44.8 как равенство
192	7 снизу	чёрнопольных	чернопольных
192	5 снизу	чёрно-	черно-
193	17 снизу	клетку k	клетку κ
194	4 сверху	будет лежать	будут лежать
		в своём ящике	в своих ящиках
196	11 сверху	уравнениям:	уравнениям
196	6 снизу	не ясно	неясно
203	18 сверху	$2^k p + 2^k - 1, \ldots.$	$2^k p + 2^k - 1, \ldots$
205	18 сверху	Нет,	Нет:
207	2 сверху	строке. А иначе	строке, а иначе
211	4 сверху	встречаются	встретятся
214	9 снизу	встретила трудности	оказалась «сложной»
214	1 снизу	ненулевых	положительных
216	12 сверху	В момент упора	Когда
216	12 сверху	вершин и	вершин,