Ал1

Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены.

<u>Многочленом</u> P с коэффициентами в поле k от переменных x и y называется выражение $\sum a_{k\ell} x^k y^\ell$, где $a_{k\ell}$ – элементы k. Такие многочлены образуют кольцо, обозначаемое $k[x,y]$. Аналогично определяется кольцо $k[x_1,\dots,x_n]$. Если вместо переменных подставить элементы поля, многочлен примет некоторое <u>значение</u>. Таким образом, каждому многочлену из $k[x_1\dots x_n]$ соответствует некоторая функция из $k\times k\times\dots\times k$ в k.

1. Докажите, что кольцо $k[x_1,\dots,x_n]$ не имеет делителей нуля.

2. Докажите, что не существует такого многочлена $P\in\mathbb{R}[x,y]$, что многочлен $P(ab,a+b)$ равен 0 /то есть имеет нулевые коэффициенты/.

3. Пусть $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ – симметричная функция, то есть верно $f(x,y)=f(y,x)$. Докажите, что существует такая функция $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, что для всех $x,y\in\mathbb{R}$ $f(x,y)=\varphi(xy,x+y)$

4. Пусть k – поле, $P\in k[x_1\dots x_n]$. Докажите, что если k бесконечно, а значение P всегда равно нулю, то коэффициенты P равны 0. Отсюда следует, что равенство многочленов как функций и равенство их как выражений равносильны (для бесконечных k, которые мы обычно рассматриваем)
Указание. Воспользуйтесь индукцией по n.

5. Многочлен $P(x,y)$ называется <u>симметричным</u>, если $P(x,y)=P(y,x)$. Это можно понимать как равенство значений или как равенство коэффициентов: $a_{k\ell}=a_{\ell k}$ – согласно 4, это безразлично. Доказать, что если $P(x,y)$ – симметричный многочлен, то существует такой многочлен Q, что $P(x,y)=Q(xy,x+y)$.

6. Докажите, что если $P\in k[x,y]$ таков, что $P(x,x)=0$ при всех $x\in k$, то $P(x,y)$ делится на $(x-y)$ /то есть существует такой многочлен Q, что $P(x,y)=Q(x,y)\cdot(x-y)$/

7. Докажите, что если $R(x,y)$ кососимметричен / $R(x,y)=-R(y,x)$ для всех $x,y\in k$ /, то $R(x,y)=(x-y)S(x,y)$, где $S(x,y)$ симметричен.

8. Всякая функция есть сумма симметричной и кососимметричной.

9. Рассмотрим в $k[x_1,\dots,x_n,z]$ многочлен $P=(x_1+z)\cdot\ldots\cdot(x_n+z)$ и разложим его по степеням z: $P(x_1\dots x_n,z)=\sum\sigma_i(x_1\dots x_n)z^{n-i}$ Найдите σ_i. Они называются элементарными симметричными многочленами.

10. / В данной задаче предполагаются известными комплексные числа и основная теорема алгебры./ Пусть $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$. Выведите из основной теоремы алгебры, что существуют такие комплексные числа $x_1\dots x_n$, что $\sigma_i(x_1\dots x_n)=a_i$ /Определение σ_i см. в 9/

11. Докажите, используя 10, что если $P\in\mathbb{C}[x_1\dots x_n]$ и $P(\sigma_1\dots\sigma_n)=0$, то $P=0$.

12. Решите задачу 11 для произвольного поля k (вместо $\mathbb{C}$)
Указание. Тождество $\sigma_i(x_1\dots x_n,0)=\sigma_i(x_1,\dots,x_n)$ позволяет применить индукцию по n. (Можно также свести дело к случаю $k=\mathbb{C}$)

13. Докажите следующую теорему:
<u>Теорема о симметричных многочленах.</u>
Всякий симметричный многочлен $P\in k[x_1\dots x_n]$ (то есть такой, что при любых перестановках аргументов его значение не меняется) может быть представлен единственным образом как многочлен от $\sigma_1,\dots,\sigma_n$.

14. Используя 13, докажите, что кольцо $Sim_k[x_1\dots x_n]$ симметричных многочленов изоморфно кольцу $k[x_1,\dots,x_n]$.

15. Докажите, что $k[x_1\dots x_n]/Sim_k[x_1\dots x_n]$ – бесконечномерное векторное пространство над k.

16. Пусть J_n – идеал кольца $k[x_1\dots x_n]$, порожденный $\sigma_1\dots\sigma_n$. Докажите, что $\dim k[x,y]/J_2=2$.

17. Докажите, что
$$\dim(k[x_1\dots x_n]/J_n)=n!$$

18. Докажите, что коэффициенты многочлена, выражающего данный симметричный многочлен P через элементарные симметричные многочлены, являются целыми линейными комбинациями коэффициентов многочлена P.

19. Докажите, что если многочлен $P(x_1\dots x_n,y_1\dots y_m)$ симметричен относительно $x_1\dots x_n$ при фиксированных $y_1\dots y_m$, а также симметричен относительно $y_1\dots y_m$ при фиксированных $x_1,\dots,x_n$, то он полиномиально выражается через элементарные симметричные многочлены от $x_1\dots x_n$ и от $y_1,\dots,y_n$.

I. Группа перестановок

I.I Перестановки.

Перестановкой из n элементов называется взаимно однозначное отображение множества $\{I, \ldots, n\}$ в себя.

Пример: $\pi_1=\begin{pmatrix}12345\\52314\end{pmatrix}$ – перестановка из 5 элементов, переводящая 4 в I.

Произведением композицией двух перестановок одинакового числа элементов называется композиция соответствующих функции.

Пример. Если $\pi_2=\begin{pmatrix}12345\\23451\end{pmatrix}$, то $\pi_1\circ\pi_2=\begin{pmatrix}12345\\23145\end{pmatrix}$

Единичной перестановкой e называется тождественная функция $i\mapsto i$. Для каждой перестановки π_1 существует обратная к ней перестановка (обратное отображение π_2) т.е. такое, что $\pi_1\circ\pi_2=\pi_2\circ\pi_1=e$

Транспозицией называется перестановка π, меняющая местами два числа i и j и оставляющая остальные на месте: $i\mapsto j$, $j\mapsto i$, $k\mapsto k$ при $k\neq i,j$. Если π – транспозиция, то $\pi^2=e$, иначе $\pi=\pi^{-1}$

ТЕОРЕМА. Любая перестановка может быть разложена в произведение транспозиции. (Как говорят, транспозиции являются образующими группы S_n.) Более того, можно ограничиться транспозициями соседних элементов.

Указания к доказательству: Теорема утверждает, что если в ряд лежит n предметов, то меняя соседние местами много раз, можно приити к любому расположению.

I.2 Четность перестановки

ТЕОРЕМА Существует единственная функция "четности" ε, сопоставляющая каждой перестановке число I или число -I, удовлетворяющее двум условиям:

(I) Если $\pi=id$, то $\varepsilon(\pi)=1$. Если π – транспозиция, то $\varepsilon(\pi)=-1$

(2) $\varepsilon(\pi_1\circ\pi_2)=\varepsilon(\pi_1)\cdot\varepsilon(\pi_2)$

Перестановки π с $\varepsilon(\pi)=1$ называются четными, остальные – нечетными. Условие (I) утверждает, что тождественная перестановка – четна, а всякая транспозиция – нечетна; условие (2) – что произведение двух перестановок одинаковой четности четно, а разной – нечетно.

Теорему мы докажем позднее, а пока перечислим ее простые следствия:

I. Произведение нечетного числа транспозиции не равно id

2. Если перестановка π разложена двумя способами в произведение транспозиции, то либо в обоих способах их четное число (если $\varepsilon(\pi)=1$), либо – нечетное (если $\varepsilon(\pi)=-1$).

3. При умножении перестановки на транспозицию слева или справа ее четность меняется.

4. Функция ε, обладающая свойствами (I) и (2), единственна; $\varepsilon(\pi)$ равняется -I в степени, равной числу транспозиции в любом разложении π.

Д-ва теоремы и следствий см. в I.4. Для них понадобится одно вспомогательное понятие.

I.3 Число беспорядков.

Числом беспорядков в последовательности $i_1, \ldots i_n$ назовем число пар (p,q) $(1\leq p,q\leq n)$ со свойством $(p<q)$ и $(i_p>i_q)$.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. При перемене мест двух членов в последовательности четность числа беспорядков меняется (из четного оно делается нечетным и наоборот).

Д-во. Пусть мы переставляем числа a и b. Если a и b образовали беспорядок (более точно, пара (k,ℓ) была беспорядком), то после перестановки он исчезает, если нет, то появится. Поэтому надо проверить лишь, что возникновение и исчезновение других беспорядков приведет к четному изменению их числа. Изменения могут произойти лишь в парах, в которых один член a или b, а другой член x находится между ними. Если $x<a$ и $x<b$, то за счет пар, содержащих x, число беспорядков не изменится: один появится, другой исчезнет. Точно то же самое относится к случаю $x>a$ и $x>b$. Если же x находится между

1..... k.... ℓ..........

...... a.....b.........

..... b.....a........

..... a... x.... b......

..... b.... x.... a......

Ал 3

I.4. Доказательства.

Теперь мы можем определить функцию $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E}(\pi)=\begin{cases} 1, & \text{если число беспорядков в нижней строке записи } \pi \text{ четно} \\ -1, & \text{если оно нечетно} \end{cases}$$

Очевидно, $\mathcal{E}(id)=1$.

Основная лемма утверждает, что при умножении перестановки на транспозицию слева или справа функция $\mathcal{E}$ меняет знак. В самом деле, умножение на транспозицию приводит к перестановке в нижней строке (проверьте!). (Обратите внимание, что умножение слева и справа дают разные результаты!). Если π - транспозиция, то $\mathcal{E}(\pi)=-1$ т.к. $\pi=\pi\circ id$, а $\mathcal{E}(id)=1$.

Итак, мы доказали для построенной функции $\mathcal{E}$ свойство I и следствие 3. Из последнего вытекают следствия I и 2, уже не относящиеся ни к какой конкретной функции $\mathcal{E}$.

Теперь мы знаем, что $\mathcal{E}(\pi)$ есть четность числа транспозиций в любом разложении π. Отсюда следует, что $\mathcal{E}(\pi_1\pi_2)=\mathcal{E}(\pi_1)\cdot\mathcal{E}(\pi_2)$ т.к. разложение для $\pi_1\pi_2$ получается приписыванием друг к другу разложений для π_1 и для π_2.

I.5. Вариант теории.

Основная лемма для случая умножения справа на транспозицию соседних элементов почти очевидна. (Число беспорядков меняется на 1). С другой стороны, нетрудно явно построить разложение произвольной транспозиции в произведение транспозиций соседних (сделайте это); в нем будет нечетное число сомножителей (как и следовало ожидать). Теперь можно рассуждать в таком порядке:

(а) при умножении справа на транспозицию соседних четность меняется;

(б) при умножении справа на любую транспозицию четность меняется (т.к. любая есть произведение нечетного числа соседних);

(в) четность числа беспорядков равна четности числа транспозиций в разложении π;

далее как в I.4.

2. Полилинейные формы

2.I. Пусть $E_1, \dots, E_n$ - линейные пространства над полем K. Функция $E_1 \times \dots \times E_n \to K$ называется полилинейной формой, если при фиксации всех аргументов, кроме одного, получается линейное отображение.

Пример I Функция $B: E_1 \times E_2 \to K$ билинейна, если

$$B(x+y,z)=B(x,z)+B(y,z),\quad B(x,y+z)=B(x,y)+B(x,z)$$
$$B(\lambda x,y)=\lambda B(x,y)=B(x,\lambda y).$$

Пример 2 Функция умножения n элементов поля $K\times K\times\dots\times K\to K$ есть полилинейная форма. Здесь все E одномерны.

Пример 3. Если $\eta_1, \dots \eta_n$ - линейные функционалы на $E_1, \dots E_n$ соответственно, то функция $(x_1,\dots x_n)\longmapsto \eta_1(x_1)\cdot\eta_2(x_2)\dots\eta_n(x_n)$ есть полилинейная форма.

Две полилинейные функции при одних и тех же $E_1,\dots E_n, K$ можно сложить с сохранением полилинейности, поэтому полилинейные функции такого вида образуют линейное пространство.

Пусть в каждом E_s выбран базис $(e^s_1,\dots e^s_{k_s})$; $\dim E_s = k_s$. Набор $(x_1,\dots x_n)\in E_1\times\dots\times E_n$ назовем базисным, если x_i - один из выбранных базисных векторов.

2.2 ТЕОРЕМА Полилинейная функция определяется своими значениями на базисных векторах. Это означает, что:

I). Если две полилинейные функции F_1 и F_2 совпадают на всех базисных ~~векторах~~ наборах, то они совпадают всюду.

2 Значения F на базисных наборах из пространства $E_1\times\dots E_n$ можно задавать произвольно, полилинейная форма с такими значениями всегда найдется.

Ал4

Д-во: I). Переходя к рассмотрению функции $P_1 - P_2$, получим, что достаточно доказать такой факт: "Если полилинейная функция P равна 0 на базисных наборах, то она равна 0 всюду." В самом деле, значение P на любом наборе можно, (используя полилинейность) представить как линейную комбинацию значений на базисных наборах.

Напрмер: $B(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = \lambda_1 \mu_1 B(e_1, f_1) + \lambda_2 \mu_2 B(e_1, f_1) + \lambda_2 \mu_1 B(e_2, f_1) + \lambda_2 \mu_2 B(e_2, f_2)$.

2) Достаточно привести пример построения функции, равной заданному числу α на заданном базисном наборе $(e^1_{i_1}, e^2_{i_2}, \dots)$ и нулю на всех остальных. Сложив эти функции, получим искомую. Пусть $\eta_s : E_s \to K$ – функционал, сопоставляющий каждому $x \in E_i$ его координату по оси $e^s_{i_s}$; тогда функция $(x_1, \dots x_n) \mapsto \alpha \cdot \eta_1(x_1) \cdots \eta_n(x_n)$ искомая.

2.3 Антисимметричность

Пусть f – полилинейная функция $\overbrace{E \times \dots \times E}^{n} \to K$. Назовем антисимметричной, если от перестановки любых двух аргументов функция f меняет знак: $f(x_1 \dots, x_{i-1} x_i x_{i+1}, \dots x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots) = -f(x_1, \dots x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots)$

Обратите внимание, что говорить, например, об антисимметричности билинейной функции $E \times F \to K$ при $E \neq F$ бессмысленно.

ТЕОРЕМА При применении к аргументам антисимметричной функции четной перестановки ее значение не меняется, при применении нечетной – оно меняет знак:

$f(x_{\sigma(1)}, \dots x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots x_n)$

$[(-1)^\sigma = 1$, если σ четная и -1, если σ нечетная$]$.

Д-во: Если σ – транспозиция, то утверждение выполнено по определению ~~симметрии~~ антисимметричности; в общем случае разложим σ в произведение транспозиций; четность числа транспозиций в этом произведении равна четности σ, а каждая транспозиция меняет знак откуда и вытекает требуемое.

ЛЕММА. Антисимметричные формы образуют подпространство в пространстве полилинейных форм $E \times \dots \times E \to K$.

ТЕОРЕМА Полилинейная функция f тогда и только тогда является антисимметричной, когда она равна нулю на всех тех наборах, которые содержат два одинаковых вектора.

Д-во: I). Если f антисимметрична, а среди ее аргументов два одинаковых, то при перемене их местами значение функции, с одной стороны, меняет знак (т.к. f антисимметрична), а с другой, не меняется.

2) Доказательство обратного утверждения проведем только для случая 2-х аргументов. Общий случай аналогичен. Пусть f равна 0 на всех наборах, содержащих два одинаковых вектора. Тождество

$0 = f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) = 2f(x,y) + 2f(y,x)$

показывает, что при перестановке двух аргументов знак меняется.

Пусть Ω^k_n есть множество упорядоченных наборов из k различных элементов множества $\{1, \dots n\}$

Пример: Ω^2_3 состоит из наборов $(1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)$

Задача I. Найти число элементов множества Ω^2_n

Задача 2. Найти число элементов множества Ω^n_n

Задача 3. Найти число элементов множества Ω^k_n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Функция $\varphi : \Omega^k_n \to K$ называется антисимметричной, если при транспозиции она меняет знак:

$\varphi(\dots i \dots j \dots) = -\varphi(\dots j \dots i \dots)$

Выберем в пространстве V базис $e_1, \dots e_n$. Ясно, что если $A: V \times V \times \dots \times V \to K$ антисимметричная форма, то $\varphi_A(i_1, \dots i_k) = A(e_{i_1}, \dots e_{i_k})$ антисимметричная функция.

ТЕОРЕМА Отображение $A \to \varphi_A$ изоморфизм пространства антисимметричных форм на пространство антисимметричных функций.

В частности A – антисимметричная форма, ~~если~~ $\underset{\text{т.т.к.}}{}$ функция φ_A антисимметрична.

Ал5

3. Определители

ТЕОРЕМА Существует полилинейная антисимметричная форма от n аргументов в n-мерном пространстве E. Такая форма единственна с точностью до мультипликативной константы.

Д-во: Пусть $e_1, \dots e_n$ – базис E. Базисным набором мы называем набор $(x_1, \dots x_n) \in E^n$, где каждый x_i – один из векторов базиса: $x_i = e_{\alpha(i)}$.

ЛЕММА Для антисимметричности формы достаточна ее антисимметричность на базисных наборах: если при перестановке любых двух векторов в базисном наборе (что дает новый набор, также базисный) форма меняет знак, то она антисимметрична.

Д-во: Пусть A – такая функция. Рассмотрим функции $(x, y, z, \dots) \mapsto A(x, y, z, \dots)$ и $(x, y, z, \dots) \mapsto -A(y, x, z, \dots)$. Это две полилинейные формы, совпадающие по условию на всех базисных наборах и, следовательно, совпадающие всюду. Значит, при перестановке первых двух аргументов A меняет знак. Аналогично действуем с любой другой парой аргументов.

Итак, доказываем существование антисимметричной формы ω. Определим ее на базисных наборах так:

$$\omega(e_{\alpha(1)} \dots e_{\alpha(n)}) = \begin{cases} 0, & \text{если среди } \alpha(1), \dots \alpha(n) \text{ есть одинаковые} \\ \varepsilon(\alpha), & \text{если } \alpha \text{ – перестановка} \quad \text{см. п.I.4} \end{cases}$$

(Ясно, что любая антисимметричная форма на наборе $e_{\alpha(1)}, \dots e_{\alpha(n)}$ должна быть равна $\varepsilon(\alpha)\cdot\omega(e_1, \dots e_n)$; наше определение соответствует случаю $\omega(e_1, \dots e_n) = 1$. Полилинейная форма с такими значениями на базисных наборах будет (по лемме) антисимметричной. Единственность следует из замечания, сделанного выше в скобках.

ТЕОРЕМА Пусть ω – ненулевая антисимметричная форма от n аргументов в n-мерном пространстве E. Тогда $\omega(x_1, \dots x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots x_n$ линейно зависимы.

Д-во: Если $x_1, \dots x_n$ зависимы и, например, $x_1 = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, то

$$\omega(x_1, x_2 \dots x_n) = \omega(\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, x_2, \dots x_n) =$$
$$= \lambda_2 \omega(x_2, x_2, \dots x_n) + \dots + \lambda_n \omega(x_n, x_2, \dots x_n) = 0$$

Если же $x_1, \dots x_n$ независимы (и, следовательно, образуют базис) и $\omega(x_1, \dots x_n) = 0$, то $\omega = 0$ на всех базисных наборах этого базиса и, следовательно, равна 0.

Пусть $A: E \to E$ – линейный оператор в n-мерном пространстве E, ω – антисимметричная полилинейная форма на E^n. Тогда форма $(x_1, \dots x_n) \mapsto \omega(Ax_1, \dots Ax_n)$ также полилинейна и антисимметрична, и, следовательно, отличается от ω лишь на некоторую мультипликативную константу C, которая называется <u>определителем</u> оператора A и обозначается $\det A$.

$$\boxed{\omega(Ax_1, \dots Ax_n) = \det A \cdot \omega(x_1, \dots x_n)}$$

Заметим, что $\det A$ определен корректно (не зависит от выбора ω), т.к. все возможные ω пропорциональны.

Замечание. Если $E \neq F$, то говорить об определителе оператора из E в F нельзя.

ТЕОРЕМА $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Д-во: Если $e_1, \dots e_n$ – базис, то

$$\omega(ABe_1, \dots ABe_n) = \det AB \cdot \omega(e_1, \dots e_n)$$
$$= \det A \cdot \omega(Be_1, \dots Be_n) = \det A \cdot \det B\, \omega(e_1, \dots e_n)$$

ТЕОРЕМА $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ – обратим

Д-во: Если $e_1, \dots e_n$ – базис, то $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \omega(Ae_1, \dots Ae_n) \neq 0 \Leftrightarrow Ae_1, Ae_2, \dots Ae_n$ – независимы $\Leftrightarrow A$ обратим.

ТЕОРЕМА $\det(A^{-1}) = 1/\det A$

Д-во: $1 = \det E = \det A \cdot \det(A^{-1})$

ТЕОРЕМА Если A, B – операторы в n-мерном пространстве, то $\det(A + tB)$ есть полином от t степени n. Свободный член его равен $\det A$, коэффициент при старшей степени равен $\det B$.

Д-во: Пусть $e_1, \dots e_n$ – базис, $\omega(e_1, \dots e_n) = 1$. Тогда

$\det(A+tB)=\omega((A+tB)e_1,\dots (A+tB)e_n)=\omega(Ae_1+tBe_1,\dots Ae_n+tBe_n)$
$=\omega(Ae_1,\dots Ae_n)+t[\omega(Be_1,Ae_2,\dots Ae_n)+\dots+\omega(Ae_1,\dots Be_n)]+\dots+$
$+t^n\omega(Be_1,\dots Be_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коэффициент при t в $\det(E+tA)$ называется <u>следом</u> оператора A и обозначается $\operatorname{tr} A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Операторы $A: E\to E$ и $B: F\to F$ называются <u>подобными</u>, если существует такой изоморфизм $\varphi: E\to F$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi"] & E \arrow[d, "\varphi"] \\ F \arrow[r, "B"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\varphi\circ A=B\circ\varphi$ или, иначе $A=\varphi^{-1}\circ B\circ\varphi$.

ТЕОРЕМА. Определители подобных опрраторов равны.

<u>Д-во</u>: Зафиксируем изоморфизм φ. Мы будем говорить, что вектор $e\in E$ соответствует вектору $f\in F$, если $\varphi(e)=f$. Будем говорить что полилинейная форма ω_E на E соответствует полилинейной форме ω_F на F, если их значения на соответствующих наборах равны: $\omega_E(x_1,\dots x_n)=\omega_F(\varphi x_1,\dots \varphi x_n)$ или, что тоже самое,

$\omega_F(y_1,\dots y_n)=\omega_E(\varphi^{-1}y_1,\dots \varphi^{-1}y_n)$

Для каждой формы на E существует соответствующая ей на F и наоборот; антисимметричной соответствует антисимметричная, ненулевой — ненулевая. Пусть ω_E и ω_F — соответствующие друг другу антисимметричные ненулевые формы; $e_1,\dots e_n$ и $f_1,\dots f_n$ — соответствующие друг другу базисы в E и F: $\varphi(e_i)=f_i$. Тогда $Ae_1,\dots Ae_n$ соответствуют $Bf_1,\dots Bf_n$ (в силу коммутативности диаграммы). Так как $\omega_E(Ae_1,\dots Ae_n)=\det A\cdot\omega_E(e_1,\dots e_n)$

$\omega_F(Bf_1,\dots Bf_n)=\det B\cdot\omega_F(f_1,\dots f_n)$

и значения ω_E и ω_F на соответствующих наборах равны, то $\det A=\det B$.

Напомним общий вид линейного оператора в пространстве $E\oplus F$. Пусть $A_{EE}: E\to E$, $A_{EF}: E\to F$, $A_{FE}: F\to E$, $A_{FF}: F\to F$ — линейные операторы. Рассмотрим оператор $A: E\oplus F\to E\oplus F$, определяемый так

$$A:\begin{pmatrix} e\\ f\end{pmatrix}\longrightarrow \left\|\begin{matrix} A_{EE} & A_{FE}\\ A_{EF} & A_{FF}\end{matrix}\right\|\begin{pmatrix} e\\ f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{EE}e+A_{FE}f\\ A_{EF}e+A_{FF}f\end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Это соответствие является взаимно однозначным соответствием между множеством всех линейных операторов в $E\oplus F$ и множеством всех 2x2-"матриц" описанного вида.

<u>Д-во</u>: (набросок). Как, зная A, восстановить, например, A_{EF}? Если $i_E: E\to E\oplus F$ — стандартное вложение E в $E\oplus F$, а $\pi_F: E\oplus F\to F$ проекция на F вдоль E, то $A_{EF}=\pi_F\circ A\circ i_E$.

<u>Замечания</u>: I. Равенство $A_{EF}=0$ означает, что E — инвариантное пространство оператора A, т.е. что $A(E)\subset E$

2. Если выбрать в E и F базисы и образовать из них базис в $E\oplus F$, то матрица A в нем будет состоять из четырех блоков, являющихся матрицами $A_{EE}, A_{EF}, A_{FE}, A_{FF}$, так что рисунок можно понимать буквально.

ТЕОРЕМА. Если $A_{EF}=0$, то $\det A=\det A_{EE}\cdot\det A_{FF}$

<u>Д-во</u>: Пусть ω — ненулевая полилинейная антисимметричная форма на $E\oplus F$. Пусть $e_1,\dots e_n$ — базис E, $f_1,\dots f_k$ — базис F. Отождествляя E с $E\oplus 0$ и F с $0\oplus F$, построим базис $e_1,\dots e_n, f_1,\dots f_k$ в $E\oplus F$. Тогда $\omega(Ae_1,\dots Ae_n, Af_1,\dots Af_k)=\omega(A_{EE}e_1+A_{EF}e_1,\dots, A_{EE}e_n+A_{EF}e_n, Af_1,\dots Af_k)=\omega(A_{EE}e_1,\dots A_{EE}e_n, Af_1,\dots Af_k)$, т.к. $A_{EF}=0$.

Рассматривая форму ω как форму на E (при фиксированных $Af_1,\dots Af_k$): $\varphi(x_1,\dots x_n)\mapsto\omega(x_1,\dots x_n, Af_1,\dots Af_k)$, мы видим, что это равно $\det A_{EE}\cdot\omega(e_1,\dots e_n, Af_1,\dots Af_k)=\det A_{EE}\cdot\omega(e_1,\dots e_n, A_{FE}f_1+A_{FF}f_1,\dots$

$A_{FE}f_n+A_{FF}f_k)=\det A_{EE}\cdot\omega(e_1,\dots e_n, A_{FF}f_1,\dots Af_k)$

(пользуемся полилинейностью и тем, что ω(лин.завис.вектора)$=0$).

Рассмотрев теперь форму $y_1,\dots y_k\mapsto\omega(e_1,\dots e_n, y_1,\dots y_k)$ как форму на F (при фиксированных $e_1,\dots e_n$) имеем, что это равно

$\det A_{EE}\cdot\det A_{FF}\cdot\omega(e_1,\dots e_n f_1\dots f_k)$.

Но с другой стороны, это равно $\det A\cdot\omega(e_1,\dots e_n, f_1,\dots f_n)$.

4. Матрицы и их определители

Определителем $n\times n$ - матрицы называется определитель любого оператора, имеющего эту матрицу в каком-то базисе.

Это определение корректно в силу следующей леммы.

ЛЕММА Если операторы $A: E\to E$ и $B: F\to F$ имеют одинаковые матрицы в базисах $e_1\dots e_n$ и $f_1,\dots f_n$, то они подобны (и, следовательно, их определители равны).

Д-во: Изоморфизм, переводящий e_i в f_i, устанавливает их подоби

ТЕОРЕМА Определитель $n\times n$ матрицы $\|a_{ij}\|$ равен $\sum\limits_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$

Д-во: Пусть A - оператор в пространстве E, имеющий такую матрицу в базисе $e_1,\dots e_n$. Это означает, что $Ae_i=\sum a_{ji}e_j$. Пусть ω - полилинейная антисимметричная форма на E^n и $\omega(e_1,\dots e_n)=1$

$$\omega(Ae_1,\dots Ae_n)=\omega\Big(\sum_{j_1}a_{j_1 1}e_{j_1},\dots\sum_{j_n}a_{j_n n}e_{j_n}\Big)=\sum_{j_1\dots j_n}a_{j_1 1}\dots a_{j_n n}\cdot\omega(e_{j_1}\dots e_{j_n})$$

Если $(j_1\dots j_n)$ содержит два одинаковых числа, то $\omega(e_{j_1}\dots e_{j_n})=0$ поэтому

$$\omega(Ae_1,\dots Ae_n)=\sum_{\alpha\in S_n}a_{\alpha(1),1}\cdots a_{\alpha(n),n}\cdot\omega(e_{\alpha(1)},\dots e_{\alpha(n)})=\sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\alpha)\cdot a_{\alpha(1),1}\cdots a_{\alpha(n),n}$$

Это вычисление дает другое доказательство того, что определители операторов, имеющих одну и ту же матрицу, равны.

ТЕОРЕМА Определитель матрицы не меняется при транспонировании.

Д-во: В самом деле, если $a^*_{ij}=a_{ji}$, то

$$\det a^*=\sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\alpha)\cdot a^*_{\alpha(1),1}\cdots a^*_{\alpha(n),n}=\sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\alpha)a_{1,\alpha(1)}\cdots a_{n,\alpha(n)}=\sum_{\alpha\in S_n}\varepsilon(\alpha)a_{\alpha^{-1}(1),1}\cdots a_{\alpha^{-1}(n),n}=\sum_{\beta\in S_n}\varepsilon(\beta^{-1})\cdot a_{\beta(1),1}\cdots a_{\beta(n),n}=\det a$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ стандартный базис $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\dots e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Пусть ω - антисимметричная полилинейная форма от n аргументов из $\mathbb{R}^n$, равная I на нем $\omega(e_1,\dots e_n)=1$ "стандартная" форма на $\mathbb{R}^n$. Если мы вычисляем матрицу оператора $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ в этом базисе, то ее столбцами будут $Ae_1,\dots Ae_n$ и определитель этой матрицы будет равен $\omega(Ae_1,\dots Ae_n)$

Итак:

‖ определитель матрицы - стандартная полилинейная антисимметричная форма от ее столбцов,

и, следовательно,

‖ определитель матрицы как функция от ее столбцов полилинеен и антисимметричен

А так как определитель матрицы не меняется при транспонировании,

‖ определитель матрицы как функция ее строк полилинеен и антисимметричен.

Пусть A и B - операторы $E\to E$, $\dim E=n$

ТЕОРЕМА Функция $t\mapsto\det(A+tB)$ - есть многочлен степени n

Д-во: Если $e_1,\dots e_n$ - базис, то

$$\det(A+tB)=[\omega(e_1,\dots e_n)]^{-1}\omega(Ae_1+tBe_1,\dots Ae_n+tBe_n)=\omega(Ae_1,\dots Ae_n)+t(\omega(Be_1,Ae_2,\dots)+\dots)+\dots+t^n\omega(Be_1,\dots Be_n)$$

Многочлен $t\mapsto\det(t\cdot 1-A)$ называется характеристическим многочленом оператора A. Он имеет степень n; старший коэффициент равен I, свободный член равен $(-1)^n\det A$. Коэффициент при t^{n-1} с обратным знаком называется следом оператора A и обозначается $\operatorname{tr}A$

ТЕОРЕМА След оператора равен сумме диагональных элементов матрицы A.

Д-во:

$$\det\begin{Vmatrix}t-a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & t-a_{nn}\end{Vmatrix}=t^n+t^{n-1}(-a_{11}-\dots-a_{nn})+\dots$$

Отсюда следует, что при переходе к другому базису сумма диагональных элементов матрицы не меняется. Из определения следует, что следы подобных операторов равны.

Имеет место равенство $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$ (см. задачу 6)

Ал 8

Определители. (ЗАДАЧИ).

1. Найти размерность пространства полилинейных форм из $E_1 \times \dots \times E_n$ в F и указать базис. /$E_1, \dots E_n$, F — векторные пространства над $\mathbb{R}$/.
2. Доказать, что следующие условия на билинейную форму $B: E \times E \to \mathbb{R}$ равносильны
/а/ $\exists x \neq 0 \ \forall y \ B(x,y) = 0$
/б/ $\exists y \neq 0 \ \forall x \ B(x,y) = 0$
При этом форма B называется <u>вырожденной</u>. Верно ли это утверждение для формы $B: E \times F \to \mathbb{R}$ при $E \neq F$?
3. B_1, B_2 — симметрические билинейные формы на E, причем $\forall x \in E \ B_1(x,x) = B_2(x,x)$. Докажите, что $B_1 = B_2$
4. Всякая билинейная форма есть сумма симметрической и антисимметрической.
5. Доказать, что пространство билинейных функций $B: X \times Y \to Z$ канонически изоморфно $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ /где $\mathcal{L}(E, F)$ — пространство линейных операторов из E в F /
6. Найти размерность пространств симметрических и антисимметрических полилинейных функций из $\underbrace{E \times \dots \times E}_{n}$ в F если размерность E равна k, а размерность F равна ℓ.
7. Пусть α — перестановка множества $A = \{1, \dots n\}$. Доказать, что отношение $x \sim y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \ \alpha^k x = y)$ есть отношение эквивалентности /классы эквивалентности называются <u>орбитами</u> α /.
8. Доказать теорему о функции четности, используя определение $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{n - (\text{число орбит } \alpha)}$
9. Пусть A, B — конечные множества, $A \cap B = \emptyset$. α — перестановка A, β — перестановка B; введем на $(A \cup B)$ перестановку $(\alpha \cup \beta): x \longmapsto \begin{cases} \alpha(x), & x \in A \\ \beta(x), & x \in B \end{cases}$. Найти $\varepsilon(\alpha \cup \beta)$.
10. Доказать, что всякая перестановка множества $A = \{1, \dots n\}$ разлагается в произведение не более чем $(n-1)$ транспозиций. Привести пример перестановки, которая не разлагается в произведение менее чем $(n-1)$ транспозиций.
11. Доказать, что если в матрице A порядка n во всех местах на пересечении k строк и ℓ столбцов стоят нули, причем $k + \ell > n$, то $\det A = 0$.
12. Доказать, что определитель Вандермонда $\left\| \begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & x_1 & x_1^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{matrix} \right\|$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда все x_i различны.
13. Выяснить, как меняется определитель при элементарных преобразованиях.
14. Пусть A — матрица $n \times n$. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det$ /матрицы, получаемой из A вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца/ так называемое <u>алгебраическое дополнение</u> элемента a_{ij} матрицы A //. Доказать, что произведение матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|A_{ij}\|$ есть $(\det A) \cdot E$
15. Доказать, что $\operatorname{tr} A = \frac{d}{dt} \det(E + tA)$
16. Доказать, что $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.
17. Вычислить $\det \|a_{ij}\|$, где
а/. $a_{ij} = \min(i,j)$
б/. $a_{ij} = \max(i,j)$
в/. $a_{ij} = |i-j|$
18. Пусть $a_1 \dots a_n$ и $b_1 \dots b_n$ — произвольные наборы чисел. Вычислить $\det \|c_{ij}\|$
а/. $c_{ij} = a_i b_j$
б/. $c_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \\ b, & i \neq j \end{cases}$
в/. $\det \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ 0 & & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$
г/. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$
д/. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$
19. Вычислить
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \dots & \varepsilon^{n-1} \\ \vdots & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$
где $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$

Ап9

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В этом § основным полем будет поле $\mathbb{R}$

I. Скалярное произведение, норма, метрика

I.I. Опред. Пусть V – в.п. Функция В: $V \times V \to \mathbb{R}$ сопоставляющая паре векторов x, y из V число B(x,y), называется скалярным произведением, если она обладает следующими свойствами:
I) $B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ (билинейность); 2) $B(x,y) = B(y,x)$ (симметричность) ; 3) $B(x,x) \geq 0$ (положительность); 4) $B(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (невырожденность).

Опр В.п. V с фиксированным скалярным произведением называется евклидовым пространством

Обозначение Для сокращения записи пишут (x,y) вместо B(x,y) (если рассматривается только одно скалярное произведение).

I.2 Замечания а) Свойство I) можно переформулировать так: при фиксированном y функция $\varphi_y : x \mapsto (x,y)$ из V в $\mathbb{R}$ линейна, и аналогично, линейна $\varphi_x : y \mapsto (x,y)$.

б) Для положительности скалярного произведения не требуется чтобы функция В была положительна (т.е. $B(x,y) \geq 0$). Этого требовать нельзя, т.к. по св-ву I) числа B(x,y) и B(-x,y) имеют разные знаки.

I.3 Основной пример Пусть $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда функция $B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ является скалярным произведением на V (которое будем называть стандартным).

Пример 2 Пусть $V = C[0,1]$ – пространство непрерывных действительных функций на отрезке $[0,1]$. Тогда $B(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$ есть скалярное произведение на V.

I.4 Опр Векторы x и y называются ортогональными $(x \perp y)$, если $(x,y) = 0$.

Опр Норма вектора x – это число $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Замечание I) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Теорема Пифагора $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ при $x \perp y$.

Доказательство $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$, т.к. $(x,y) = 0$.

Следствие Если $x \perp y$, то $\|x\| \leq \|x+y\|$ (катет меньше гипотенузы).

I.5 Опр Проекцией вектора x на вектор y называется такой вектор $\text{пр}_y x = \lambda y$, что $(x - \text{пр}_y x) \perp y$

Лемма Проекция вектора x на $y \neq 0$ всегда существует, определена однозначно и вычисляется по формуле: $\text{пр}_y x = \frac{(x,y)}{(y,y)} y$

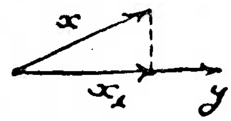
Ал10

Доказательство $0 = (x-\lambda y,y) = (x,y) - \lambda(y,y) \Longleftrightarrow \lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)}$.

I.6 Теорема Коши-Буняковского $|(x,y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

Доказательство $x_I = \text{пр}_y x \Rightarrow 1 \geq \frac{\|x_I\|}{\|x\|} = \frac{|(x,y)|\cdot\|y\|}{(y,y)\cdot\|x\|} = \frac{|(x,y)|}{\|y\|\cdot\|x\|}$

Опр $(\widehat{x,y}) = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$



(т.е. $(x,y) = \|x\|\cdot\|y\|\cos(\widehat{x,y})$

I.7 Теорема $\|x\| + \|y\| \geq \|x+y\|$

Док. $(x+y,\ x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y) \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \geq (\|x+y\|)^2$.

Опр $d(x,y) = \|x-y\|$

Теорема d есть метрика на V.

Док. I) $\|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x=y$

2) $\|x-y\| = \|y-x\|$ – т.к. $\|y-x\| = |-1|\cdot\|x-y\|$

3) $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$ – по теореме 1.7

2. Ортогональные проекции и ортогональное дополнение

2.I Опр Вектор x ортогонален подпространству W евклидова пространства V если $x \perp y$ для всех $y \in W$. Подпространства W_1, W_2 в евклидовом V ортогональны, если $x \perp y$ для всех $x \in W_1$, $y \in W_2$.

2.2 Опр Ортогональное дополнение подпространства W евклидова пространства V есть $W^\perp = \{y \in V \mid y \perp W\}$.

Лемма I) $W^\perp$ – подпространство V; 2) $W \perp (W^\perp)$; 3) $W' \perp W \Longleftrightarrow W' \subseteq W^\perp$.

Следствие $W \cap W^\perp = 0$.

2.3 Определение Базис называется ортогональным, если он состоит из попарно ортогональных векторов.

Теорема Конечномерное евклидово пространство имеет ортогональный базис.

Док. Индукция по $n = \dim V$. Индукционный шаг. Пусть $e_0 \in V$, $e_0 \neq 0$, $W = \langle e_0 \rangle$. Пусть $e_I, \ldots, e_m$ – ортогональный базис в $W^\perp$. Докажем, что $e_0, e_I, \ldots, e_m$ есть базис в V. Пусть $x \in V$, $\text{пр}_{e_0} x = \lambda_0 e_0$ тогда $(x-\lambda_0 e_0) \in W^\perp$, т.е. $(x-\lambda_0 e_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$ и $x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i e_i$.

2.4 Теорема $W \oplus W^\perp = V$, где W – конечномерное подпространство евклидова пространства V.

Следствие I $W^{\perp\perp} = W$.

Доказательство. $W \subseteq W^{\perp\perp}$ очевидно. Так как $W \oplus W^\perp = W^{\perp\perp} \oplus W^\perp$, то $W = W^{\perp\perp}$.

Док. теоремы Ввиду 2.2, достаточно доказать:

2.5 Лемма В условиях теоремы, $\forall x\in V\ \exists y\in W\ \ (x-y)\perp W.$
(такой вектор y называется проекцией x на W и обозначается $\text{пр}_W x$). Единственность y вытекает из свойств прямой суммы. Для доказательства леммы выберем ортогональный базис $e_1,\dots,e_n$ в W. Пусть $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, тогда чтобы $0=(x-y,e_i)=(x,e_i)-\alpha_i(e_i,e_i)$, нужно выбрать $\alpha_i=\dfrac{(x,e_i)}{(e_i,e_i)}$.

Следствие 2 $\text{пр}_W x=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(x,e_i)}{(e_i,e_i)}e_i$, где $e_1,\dots,e_n$ – ортогональный базис W.

Замечание $A: x\mapsto \text{пр}_W x$ – линейное отображение V на W, причем $A^2=A$.

2.6 Замечание (метод Грама – Шмидта). Пусть $e_1,\dots,e_n$ – базис евкл. пространства V. Тогда можно построить ортогональный базис $f_1,\dots,f_n$ для V такой, что для всех $m\leq n$: $\langle f_1,\dots,f_m\rangle=\langle e_1,\dots,e_m\rangle$. Именно, $f_1=e_1$; а если $f_1,\dots,f_m$ – построены, то берем $f_{m+1}=e_{m+1}-\text{пр}_{\langle e_1,\dots,e_m\rangle}e_{m+1}=e_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}\dfrac{(e_{m+1},f_i)}{(f_i,f_i)}f_i$.

2.7 Замечание ~~Ес~~ $e_1,\dots,e_n$ – ортогональный базис, то координаты вектора x в нем имеют вид: $\alpha_i=\dfrac{(x,e_i)}{(e_i,e_i)}$

Опр Ортогональный базис наз. ортонормированным, если $\forall i\ \|e_i\|=1$. Разложение вектора x в ортонормированном базисе: $x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$ при этом $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)^2}$, а скалярное произведение $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)(y,e_i)$.

Приложение 1 Другое доказательство теоремы 2.4 (для случая конечномерного V).

Лемма Если W_1,W_2 – подпространства в.п. V, причем $\dim V=n$, $\dim W_1=n-1$, $\dim W_2=k$, то $\dim(W_1\cap W_2)\geq k-1$.

Док. $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=n-1+k-\dim(W_1+W_2)\geq n-1+k-n=k-1$ (так как $\dim(W_1+W_2)\leq n$).

Следствие $\dim W_1=\dots=\dim W_k=n-1\Rightarrow \dim(W_1\cap\dots\cap W_k)\geq n-k$.

Лемма $\dim W^\perp\geq \dim V-\dim W$.

Док. Пусть $e_1,\dots,e_k$ – базис W. Тогда $W^\perp=W_1\cap\dots\cap W_k$, где $W_i=\langle e_i\rangle^\perp$ – ядро невырожденного линейного функционала φ_{e_i}: $x\mapsto(x,e_i)$, т.е. $\dim W_i=n-1$. Лемма доказана.

Поскольку $W\cap W^\perp=0$, отсюда вытекает, что $W\oplus W^\perp=V$.

Приложение 2 3-е доказательство теоремы 2.

Лемма 1 Ортогональная проекция w вектора v на W есть ближайший к v вектор среди векторов из W.

Ах12

Док. Нам нужно показать, что для всякого $w \in W$ $\|v-w\| \geq \|v-w_0\|$. Т.к. $v = w_0 + w_1$, где $w_1 \in W^{\perp}$, то $\|v-w\|^2 = \|w_1+w_0-w\|^2 =$ $= \|w_1\|^2 + \|w_0-w\|^2 \geq \|w_1\|^2 = \|v-w_0\|^2$, ч.т.д.

Лемма 2 Пусть w_0 – ближайший к $v \in V$ вектор среди векторов из W. Тогда w_0 есть ортогональная проекция v на W.

Док. Нужно доказать, что вектор $v-w_0$ ортогонален W. Т.к. функция на W: $f(w) = \|v-w\|^2$ имеет минимум в точке w_0, то ее производная в этой точке равна 0. Вычислим эту производную:

$f(w_0+h) - f(w_0) = (v-w_0-h, v-w_0-h) - (v-w_0, v-w_0) = -2(v-w_0, h) + \|h\|^2$.

Следовательно, $f'(w_0)h = -2(v-w_0, h)$, и равентство $f'(w_0) = 0$ означает, что $v-w_0$ ортогонален w. Ч.т.д.

Замечание При вычислении производной мы воспользовались тем, что $\|h\|^2$ есть $o(h)$. Это следует из следующего факта: любые 2 нормы на конечномерном пространстве эквивалентны (см. курс анализа).

Итак, для доказательства существования проекции на W нам остается доказать, что функция $f(w) = \|w-v\|^2$ достигает минимума в какой-то точке из W. Рассмотрим шар с центром в v такого большого радиуса r, чтобы он пересекал W; пусть W_r – его пересечение с W. Вне W_r функция f больше r^2; минимум на W_r будет минимумом на всем W. Но W_r – ограниченное и замкнутое, а следовательно, компактное множество. Т.к. f непрерывна, то она достигает своего минимума на W_r. Ч.т.д.

Замечание В этом рассуждении мы вновь пользовались упомянутым фактом, т.к. ограниченность W_r и непрерывность f рассматривалась в метрике, порожденной скалярным произведением, а не в стандартной координатной. Кроме того, утверждая, что W_r замкнуто, мы воспользовались утверждением: любое подпространство конечномерного в.п. есть замкнутое множество.

3. Изометрия

Опр Линейное отображение А: $V \to W$ евклидова пространства V в евклидово пространство W называется изометрией, если оно сохраняет скалярное произведение, т.е. $(Ax, Ay)_W = (x, y)_V$.
Для того, чтобы линейное отображение было изометрией необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло норму, т.е. $\|Ax\|_W = \|x\|_V$. Это вытекает из тождества (теорема косинусов): $(a,b) = (\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2) \cdot 1/2$.

Теорема Любые 2 евклидовых пространства одинаковой конечной размерности n изометричны.

Док. Выберем ортонормированные базисы $v_1, \dots, v_n$ в V и

Ал 13

$w_1, \dots, w_n$ в W. (линейное) Отображение A, переводящее $v_1, \dots, v_n$ в $w_1, \dots, w_n$ соответственно, является искомой изометрией.

4. Теорема Рисса

Теорема Пусть φ - линейный функционал на евклидовом пространстве V; тогда существует такой вектор $v \in V$, что $\forall x$ $\varphi(x) = (v, x)$ (т.е. $\varphi = \varphi_v$ - см. I.2).

Первое доказательство Расмотрим линейное отображение $A: v \mapsto \varphi_v$ пространства V в сопряженное пространство V^*. Покажем, что A - изоморфизм. Если $v \in \operatorname{Ker} A$, то $\varphi_v = 0$, в частности, $\varphi_v(v) = (v, v) = 0$. Отсюда $v = 0$, и, следовательно, A - вложение. Т.к. $\dim V = \dim V^*$ то A - изоморфизм, в частности, образ A совпадает со всем V^*.

Второе док. (явное построение). Выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ в V. Мы хотим, чтобы $\varphi(x) = (v, x)$ для некоторого вектора $v = \sum \alpha_i e_i$. Для совпадения двух функционалов достаточно их совпадения на базисных векторах, поэтому надо, чтобы $\varphi(e_i) = (v, e_i) = \alpha_i$. Итак в качестве v надо взять вектор $v = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i$ и тогда $\varphi(x) = (v, x)$.

Третье док. (геометрическое). Рассмотрим ядро φ; обозначим его W. Это линейное подпространство коразмерности I, т.е. $\dim V/W = 1$. Рассмотрим вектор v, ортогональный W, и функционал φ_v. Ясно, что $\operatorname{Ker} \varphi_v = W$. Доказательство теоремы завершает

Лемма Два линейных функционала с одинаковыми ядрами пропорциональны.

Док. Пусть $\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2 = W$, $u \notin W$. Домножим φ_1, φ_2 на числа, так чтобы полученные функционалы принимали на u одинаковые значения. Тогда их разность обращается в 0 на W и на u, следовательно, она равна 0.

Ал 14

Линейные операторы.

В этом параграфе мы будем рассматривать линейные операторы в конечномерных пространствах над полем K, которое по большей части будет равно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Мы будем называть операторы $A: V \longrightarrow V$ операторами в пространстве V.

I. Собственные вектора, значения, подпространства.

I.I. Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным вектором оператора $A: V \longrightarrow V$, если $Av = \lambda v$ при некотором $\lambda \in K$. Число λ называется собственным значением оператора A, соответствующему собственному вектору v. Очевидно, вектор, пропорциональный собственному, будет собственным с тем же значением.

Пример. Если $v \neq 0$, $v \in \operatorname{Ker} A$, то v собственный с $\lambda = 0$. Очевидна

Лемма. Вектор x является собственным вектором A с собственным значением λ тогда и только тогда, когда $x \neq 0$, $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot 1)$.

Следствие. Число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\lambda \cdot 1 - A$ необратим./ 1 -тождественный оператор/.

В этом случае ядро $\lambda \cdot 1 - A$ называется собственным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ: $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda \cdot 1 - A)$

Число λ - собственное значение титтк $\dim V_\lambda > 0$.

Теорема. Если $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ различные собственные значения, то сумма $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ прямая.

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно. Выберем самый короткий набор $x_1, \ldots x_p$ из собственных векторов с различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots \lambda_p$, для которого $x_1 + \cdots + x_p = 0$ /Если таких нет, то всё доказано./. Применяя A, имеем: $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$; вычтя отсюда равенство $\lambda_1(x_1 + \cdots + x_p) = 0$ имеем $(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_1)x_p = 0$. Все эти вектора ненулевые, их собственные значения $(\lambda_2, \ldots \lambda_p)$ различны. Противоречие.

Переформулировка теоремы: собственные вектора с различными собственными значениями независимы.

I.2. Обсудим вопрос о существовании собственных векторов. Мы уже отмечали, что собственный вектор со значением λ существует тогда и только тогда, когда $\lambda \cdot 1 - A$ необратим, или, что равносильно, $\det(\lambda \cdot 1 - A) = 0$.

Лемма. Функция $P_A: t \longmapsto \det(t \cdot 1 - A)$ есть многочлен степени n. /Он называется характеристическим /см."Определители"//.

Поле K называется алгебраически замкнутым, если всякий многочлен степени большей 0 имеет корень. Над алгебраически замкнутым полем всякий многочлен разлагается на линейные множители $P(t) = (t - \alpha_1)^{k_1} \ldots (t - \alpha_n)^{k_n}$ α_i - его корни, k_i - их кратности. Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто /"основная теорема алгебры"/, поле $\mathbb{R}$ - нет / $\forall x \; x^2 + 1 \neq 0$ /.

Теорема. Если поле K алгебраически замкнуто/например, $K = \mathbb{C}$ /, V - векторное пространство над K, A - оператор в V, то A имеет собственный вектор.

Доказательство. Характеристический многочлен имеет ненулевую степень и, следовательно, имеет корень λ.

Замечание. Условие алгебраической замкнутости K существенно: оператор поворота на 90° в $\mathbb{R}^2$ не имеет собственных векторов./Его характеристический многочлен - $t^2 + 1$ /.

Напомним, что характеристический полином имеет вид $P_A(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0$, где $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \operatorname{tr} A$ /след A /.

След оператора равен сумме диагональных элементов его матрицы в любом базисе. /см. "Определители"/ Определители и следы подобных /см."Определители"/ операторов равны.

I.3. Оператор A называется диагонализируемым, если в некотором базисе он имеет диагональную матрицу /иными словами, если есть базис из собственных векторов/.

<u>Теорема.</u> Если характеристический многочлен P_A оператора A в пр-ве V над полем K разлагается на линейные множители /в частности, если K алгебраически замкнуто/, и все корни различны, то A диагонализируем.

<u>Доказательство.</u> Напомним, что степень P_A равна размерности V. Если все корни P_A различны, то их столько, какова размерность V, поэтому соответствующие собственные вектора/будучи независимыми, см.I.I/ образуют базис.

Обратное неверно: оператор 1 диагонализируем/все вектора собственные/,но его характеристический многочлен имеет совпадающие корни.

Если A - диагонализируемый оператор в V, $\lambda_1, \dots \lambda_k$ - его собственные значения /$k \le \dim V$ /, то сумма $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, будучи прямой /п.I.I./, совпадает со всем пространством V. /В самом деле, вектора собственного базиса должны лежать в пространствах V_{λ_i} / Таким образом, любой собственный базис диагонализируемого оператора получается выбором базисов в V_{λ_i} и соединением их в базис V.

2. <u>Инвариантные подпространства и треугольный вид.</u>

2.I. Пусть A - оператор в пространстве V. Подпространство $W \subset V$ <u>инвариантно</u>/для A /, если $A(W) \subset W$.

В этом случае можно рассматривать сужение A на W как оператор из W в W.

<u>Примеры.</u> I. Для скалярных операторов / операторов умножения на число/ все подпространства инвариантны.

2. Пространство $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda \cdot 1 - A)$ при любом λ инвариантно для A.

3. В пространстве $\mathbb{R}[t]$ полиномов подпространство полиномов степени не выше n инвариантно для оператора дифференцирования $P \mapsto P'$.

Заметим, что одномерное инвариантное подпространство есть линейная оболочка собственного вектора.

<u>Теорема.</u> В векторном пространстве над $\mathbb{R}$ любой оператор имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство. /над $\mathbb{C}$ всегда есть собственный вектор, т.е. одномерное инвариантное подпространство/

<u>Доказательство.</u> Пусть $A: V \longrightarrow V$, V - векторное пр-во над $\mathbb{R}$. Рассмотрим "комплексификацию" $V^{\mathbb{C}}$ пространства V. Она состоит из формальных сумм $v + iw$ / $v, w \in V$, i - формальный символ/. В $V^{\mathbb{C}}$ можно ввести структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, складывая вектора и умножая их на комплексное число как если бы $i^2 = -1$:
$(v+iw)+(v_1+iw_1)=(v+v_1)+i(w+w_1)$, $(a+bi)\cdot(v+iw)=(av-bw)+i(aw+bv)$

Оператор $A^{\mathbb{C}}$ действует в $V^{\mathbb{C}}$ так: $A^{\mathbb{C}}(v+iw)=A(v)+iA(w)$.

Легко проверить, что $V^{\mathbb{C}}$ - пространство над $\mathbb{C}$, а $A^{\mathbb{C}}$ - $\mathbb{C}$-линейный оператор в нём. Пусть $x+iy \in V^{\mathbb{C}}$ - собственный вектор $A^{\mathbb{C}}$ с собственным значением $a+ib$, т.е. $A^{\mathbb{C}}(x+iy) = Ax+iA(y) = (ax-by)+i(ay+bx)$ или $Ax=ax-by$, $Ay=ay+bx$.

Теперь мы видим, что линейная оболочка x и y - инвариантное подпространство. Оно может быть одномерным /если x и y пропорциональны/ или двумерна./Нульмерным оно быть не может, т.к. $x+iy \ne 0$ то есть $x \ne 0$ или $y \ne 0$ /.

2.2. Если A - оператор в V, W - инвариантное подпространство, то A может быть корректно определён на факторе V/W. Точнее верна

<u>Лемма.</u> В описанной ситуации существует и единственен оператор $\bar{A}$
$\bar{A}: V/W \longrightarrow V/W$, замыкающий диаграмму

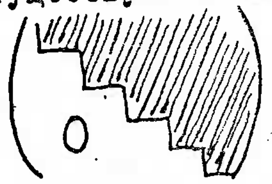
$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"] & V \arrow[d, "\pi"] \\
V/W \arrow[r, "\bar{A}"] & V/W
\end{tikzcd}$$

/ π - оператор проекции V на V/W /

<u>Доказательство.</u> $\pi(x)$ есть $x+W$. Нам надо, чтобы $\bar{A}(\pi(x)) = \pi(A(x))$. Для того, чтобы воспринимать это равенство как корректное определение

$\bar{A}$, нужно знать, что $\pi(x)=\pi(y) \Rightarrow \pi(Ax)=\pi(Ay)$. Но если $\pi(x)=\pi(y)$, то $\pi(x-y)=0$, $x-y\in W$, $A(x-y)\in W$, $Ax-Ay\in W$, $\pi(Ax)=\pi(Ay)$.

<u>Теорема.</u> Если поле K алгебраически замкнуто, то у всякого оператора существует базис, в котором его матрица треугольна, т.е. имеет вид



Иными словами, существует такой базис $e_1,\dots e_n$, что при всех $i\le n$ линейная оболочка $\langle e_1,\dots e_i\rangle$ первых i базисных векторов– инвариантное подпространство. /В частности, e_1 – собственный/.
Ещё переформулировка: существуют инвариантные подпространства $W_1\subset\dots\subset W_n$, для которых $\dim W_i=i$

<u>Доказательство.</u> Пусть V – векторное пространство над алг. замкнутым полем K . В качестве e_1 возьмём какой-нибудь собственный вектор. Его линейная оболочка $W_1=\langle e_1\rangle$ будет инвариантным подпространством. Оператор $\bar{A}: V/W_1\to V/W_1$ имеет собственный вектор $\bar f\in V/W_1$: $\bar A\bar f=\lambda\bar f$. Его прообраз f /т.е. такой вектор, что $\pi(f)=\bar f$ / может не быть собственным для A , но $Af-\lambda f\in W_1$, ибо $\pi(Af-\lambda f)=\bar A(\bar f)-\bar f=0$ Иными словами, $Af=\lambda f+$ /вектор из W_1 /, т.е. $W_2=$ /линейная оболочка W_1 и f / – инвариантное подпространство. Его размерность равна 2./ $\bar f\neq 0 \Rightarrow f\notin W_1$ /. Вообще, если W_i – инвариантное подпространство размерности i , то выбирается собственный вектор для $\bar A: V/W_i\to V/W_i$ и затем его прообраз. Получаем инвариантное подпространство W_{i+1} , содержащее W_i и имеющее на единицу большую размерность. Так мы построим искомые инвариантные подпространства.

Найдя базис, в котором матрица оператора A треугольна, легко вычислить его характеристический многочлен: если на диагонали стоят числа $\lambda_1,\dots\lambda_n$, то $P_A(t)=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$.

<u>Следствие.</u> На диагонали треугольной матрицы стоят собственные числа соответствующего ей оператора.

2.3. В этом пункте мы исследуем как устроены инвариантные подпространства у диагонализируемого оператора. Если $A:V\to V$ диагонализируем, $\lambda_1,\dots\lambda_k$ – все его собственные значения, то /п.I.3./ $V=V_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_k}$. Если $W_1,\dots W_k$ – подпространства $V_{\lambda_1},\dots V_{\lambda_k}$, то они инвариантны и их суммы, очевидно, тоже инвариантны. Оказывается, все инвариантные подпространства могут быть получены таким образом.

<u>Теорема.</u> Если W – инвариантное подпространство в описанной ситуации, $W_i=W\cap V_{\lambda_i}$, то $W=W_1\oplus\dots\oplus W_k$.

<u>Доказательство.</u> Надо доказать, что всякий вектор w из W представим в виде $w_1+\dots+w_k$, где $w_i\in W\cap V_{\lambda_i}$. Так как $V=V_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V_{\lambda_k}$, то w можно представить в виде $w_1+\dots+w_k$, где $w_i\in V_{\lambda_i}$ Осталось доказать, что $w_i\in W$. Переходя к оператору $\bar A: V/W\to V/W$ имеем, что образы $\pi(w_1),\dots\pi(w_k)$ будут собственными для $\bar A$ с теми же значениями, точнее, будут лежать в подпространствах V/V_{λ_i} – они могут быть равны 0; $\pi(w_1)+\dots+\pi(w_k)=0$, поэтому по теореме п.I.I. все $\pi(w_i)=0$

<u>Следствие.</u> Если $A:V\to V$ диагонализируем, W – инвариантное подпространство, то существует такое инвариантное подпространство W' , что $V=W\oplus W'$

<u>Доказательство.</u> Выбирая к $W\cap V_{\lambda_i}$ дополнения до V_{λ_i} и складывая их, получаем W' .

2.4. <u>Коммутирующие операторы.</u>

<u>Лемма.</u> Пусть A и B – коммутирующие операторы в пространстве V /т.е. $AB=BA$ /, V_λ – собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ оператора A . Тогда V_λ инвариантно для B

<u>Доказательство.</u> Если $x\in V_\lambda$, то $ABx=BAx=B\lambda x=\lambda Bx$, поэтому $Bx\in V_\lambda$

<u>ТеоремаI.</u> Семейство S попарно коммутирующих операторов в пространстве над алгебраически замкнутым полем имеет общий собственный вектор.

<u>Доказательство.</u> Если одни операторы семейства S линейно выражаются через другие, то их можно выбросить. Поэтому можно считать, что опе-

раторы в S линейно независимы и, следовательно, S – конечно. Доказательство ведём индукцией по числу операторов в S. Если в нём один оператор, то утверждение очевидно /см.п.I.2./. Пусть их много и A – один из них. Пусть λ – собственное значение A и V_λ – соответствующее собственное подпространство. Рассматривая сужение остальных операторов на V_λ, выбираем общий собственный вектор /предположение индукции/, который и будет искомым.

Замечание. Собственные числа общего собственного вектора могут быть различны.

Теорема2. Семейство S попарно коммутирующих диагонализируемых операторов имеет общий собственный базис.

Доказательство. Снова считаем S конечным и применим индукцию по числу элементов в S. Итак, пусть A – один из них, $V_{\lambda_1}, \cdots V_{\lambda_k}$ – его собственные подпространства. Все они инвариантны для остальных операторов/лемма/. Сузив их, например, на V_{λ_1} получаем семейство из меньшего числа попарно коммутирующих диагонализируемых операторов, имеющее /предположение индукции/ общий собственный базис. /То, что сужение диагонализируемого оператора на инвариантное подпространство есть диагонализируемый оператор, вытекает из описания инвариантных подпространств и 2.3./ Объединяя построенные базисы в $V_{\lambda_1}, \cdots V_{\lambda_k}$, получаем искомый.

3.Многочлен от оператора, спектры, жорданова форма.

В данном пункте рассматривается случай алгебраически замкнутого поля K /если не оговорено противное/.

3.I. Пусть A – оператор в V, P – многочлен. Тогда можно определить $P(A)$: если $P(t)=a_n t^n+\cdots+a_0$, то $P(A)=a_n A^n+\cdots+a_1 A+a_0 1$

Лемма. Отображение $P\to P(A)$ есть гомоморфизм кольца $K[t]$ многочленов в кольцо $\mathrm{End}(V)$ линейных операторов в V.

СледствиеI. Если P, Q – многочлены, то операторы $P(A)$ и $Q(A)$ коммутируют.

Следствие2. Если $P(t)=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$, то $P(A)=(A-\lambda_1\cdot 1)\cdots(A-\lambda_k\cdot 1)$

Спектром оператора A называется множество всех его собственных значений, т.е. всех корней характеристического полинома. Это – конечное подмножество K. /Спектор A будет обозначаться через SpA /.

Теорема. Если P – полином, то $Sp\,P(A)=P(SpA)$ (зд. $P(SpA)=\{\mu \mid (\exists\lambda\in SpA)(\mu=P(\lambda))\}$)

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что для любого многочлена Q $Q(A)$ необратим тттк $SpA\cap(\text{корни}\,Q)\neq\varnothing$. Беря $Q(t)=P(t)-\lambda$, видим, что $\lambda\in Sp\,P(A)\iff SpA\cap\text{корни}(P(t)-\lambda)$. Последнее равносильно $\lambda\in P(SpA)$.

Следствие. Если P – характеристический полином оператора A, то $Sp\,P(A)=0$. На самом деле верен даже более сильный факт.

3.2. Теорема Гамильтона – Кэли.

Если P – характеристический полином A, то $P(A)=0$.

Доказательство. Если $e_1\cdots e_n$ – базис V, в котором матрица A треугольна и на диагонали матрицы A стоят числа $\lambda_1,\cdots\lambda_n$, то характеристический полином есть $(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$ и, таким образом, надо доказать, что $(A-\lambda_1\cdot 1)\cdots(A-\lambda_n\cdot 1)=0$. В самом деле,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &(A-\lambda_n\cdot 1)(V)\subseteq\langle e_1,\cdots e_{n-1}\rangle\\ &(A-\lambda_{n-1}\cdot 1)(\langle e_1\cdots e_{n-1}\rangle)\subseteq\langle e_1,\cdots e_{n-2}\rangle\\ &\qquad\cdots\cdots\\ &(A-\lambda_1\cdot 1)\langle e_1\rangle=0\end{aligned}$$

На самом деле теорема Гамильтона-Кэли верна для всех полей/а не только для алгебраически замкнутых/. В самом деле, коэффициенты характеристического полинома являются многочленами от n^2 матричных элементов и равенство $P(A)=0$ при подробной записи превращается в n^2 тождеств, каждое из которых утверждает, что некоторый конкретный многочлен с целыми коэффициентами /не зависящими от выбора поля K /равен 0.Если они выполнены хоть в каком-то бесконечном поле, например в $\mathbb{C}$, то они выполнены тождественно.

3.3. Пусть $A: V\to V$ - линейный оператор, $\dim V=n$. Рассмотрим ядро описанного в 3.I. гомоморфизма, т.е. множество таких P, что $P(A)=0$ /множество многочленов анулирующих оператор A /. Это идеал в кольце $K[t]$*. Это кольцо является кольцом главных идеалов, поэтому этот идеал порождён некоторым многочленом p_0 - минимальным анулирующим многочленом оператора A. Он имеет минимальную степень среди всех анулирующих. Очевидно, степень минимального многочлена равна минимальному такому n, что $1, A, \dots A^n$ линейно зависимы, т.е. размерности образа отображения $p\to p(A)$. Очевидно, что она не превосходит n^2; из теоремы Гамильтона-Кэли следует что она не больше n.

Лемма. Характеристический многочлен делится на минимальный.

Доказательство. В силу теоремы Гамильтона-Кэли характеристический полином является анулирующим, следовательно, делится на минимальный. /Доказательство, не использующее теоремы Гамильтона-Кэли. Пусть $\lambda_1, \dots \lambda_k$ - корни минимального полинома, $n_1,\dots n_k$ - их кратности, т.е. $P_0(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}\dots(t-\lambda_k)^{n_k}$. По определению $0=p_0(A)=(A-\lambda_1\cdot 1)^{n_1}\dots(A-\lambda_k\cdot 1)^{n_k}$. Все числа $\lambda_1,\dots\lambda_k$ входят в спектр: если бы $(A-\lambda_i\cdot 1)$ был бы обратим, то переставив его влево/в силу коммутативности/ мы получили бы, что множитель $(t-\lambda_i)$ не нужен и, следовательно, многочлен не минимален./

Теорема. Множество корней минимального многочлена оператора A равно SpA.

Доказательство. Из леммы следует, что множество корней минимального многочлена вложено в SpA. Обратно, если λ входит в спектр и x - соответствующий собственный вектор, то $0=P_0(A)x = p_0(\lambda)\cdot x, \Rightarrow p_0(\lambda)=0$

Итак, минимальный многочлен разлагается на те же множители, что и характеристический, но, возможно, в меньших степенях.

Пример. Если $A=1$, то характеристический многочлен равен $(t-1)^n$, а минимальный равен $(t-1)$.

Лемма. Пусть A, B, C, D — квадратные матрицы, причём порядок A = =порядку $C = m$, порядок B =порядку $D = n$. Тогда $(A\oplus B)(C\oplus D)=AC\oplus BD$.

Доказательство. Пространство R^{m+n} раскладывается в прямую сумму $V_1\oplus V_2$ /$\dim V_1=m, \dim V_2=n$/. Соответствующие преобразования действуют следующим образом: $(C\oplus D)|_{V_1}=C, (C+D)|_{V_2}=D$ и т.д. $(A\oplus B)(C\oplus D)|_{V_1}=AC, (A\oplus B)(C\oplus D)|_{V_2}=BD$. Поэтому это преобразование совпадает с $AC\oplus BD$.

Следствие. Если $f\in K[t]$, то $f(A\oplus B)=f(A)\oplus f(B)$.

Предложение. Минимальный$(A\oplus B)$ =НОК/минимальный(A);минимальный(B)/. Это следует из того, что для любого $f\in K[t]$ $f(A\oplus B)=0 \Leftrightarrow f(A)=0$ и $f(B)=0$ и определения НОК.

3.4. Нильпотентные операторы.

Оператор A нильпотентен, если $\exists k\ A^k=0$.

Пример. Треугольная матрица $n\times n$ с нулями на главной диагонали нильпотентна: её k -ая степень k рядов нулей над диагональю и поэтому степени, начиная с n -ой, равны 0.

Лемма. Если A - нильпотентный оператор в n -мерном пространстве V то уже $A^n=0$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность подпространств V $V, \operatorname{im} A, \operatorname{im} A^2, \dots \operatorname{im} A^k, \dots$ Это убывающая последовательность, в которой каждое пр-во есть образ предыдущего. Если два из них равны, то следующие два тоже, поэтому последовательность стабилизируется.

Поэтому для нильпотентного оператора размерности убывают, пока не станут равными нулю. Это не может быть дальше n шагов.

В отличие от предшествующего теперь мы будем считать поле алгебраически замкнутым.

---

* Он ненулевой: это вытекает из теоремы Гамильтона-Кэли, а, ещё проще, из того, что степени $1, A, \dots, A^{n^2}$ лежат в n^2 -мерном пространстве операторов и поэтому линейно зависимы.

Теорема. Следующие свойства оператора A в n-мерном пространстве эквивалентны:

1/. A нильпотентен

2/. $A^n = 0$

3/. $Sp A = \{0\}$

4/. Характеристический многочлен равен t^n.

5/. Минимальный многочлен есть некоторая степень t.

6/. A имеет в некотором базисе треугольную матрицу с нулями на диагонали.

7/. В любом базисе, в котором A имеет треугольную матрицу, эта матрица имеет нули на диагонали.

Доказательство. $(1) \Leftrightarrow (2)$ уже доказано.

$(1) \Rightarrow (3)$ $A^k = 0 \Rightarrow Sp A^k = 0 \Rightarrow (Sp A)^k = 0 \Rightarrow Sp A = 0$.

$(4) \Leftrightarrow (3)$ Спектр есть множество корней характеристического полинома.

$(4) \Rightarrow (5)$ Минимальный многочлен делит характеристический.

$(5) \Rightarrow (1)$ По определению минимального многочлена.

$(1) \Rightarrow (7)$ Если на диагонали треугольной матрицы стоят не нули, то в том же месте у любой степени не нуль.

$(7) \Rightarrow (6)$ В силу теоремы о треугольном виде

$(6) \Rightarrow (1)$ См. пример выше.

Это даёт новое доказательство $(1) \Rightarrow (2)$: $(4) \Rightarrow (2)$ очевидно. Однако оно использует алгебраическую замкнутость K.

Замечание. Условие алгебраической замкнутости поля существенно. Действительно, если мы рассмотрим $\mathbb{R}^3$ и матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ то все её собственные значения равны 0, но она не является нильпотентной.

Теорема. Любой оператор есть сумма нильпотентного и диагонализируемого.

Доказательство. Выберем базис , в котором матрица оператора A имеет треугольный вид: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ и положим $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Тогда $A - D$ нильпотентна, что доказывает теорему.

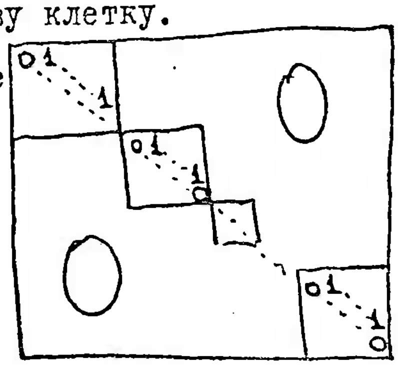
3.5. Жорданова форма нильпотентного оператора.

Нильпотентной жордановой клеткой размера k называется матрица $\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\right\} k$ Она задаёт нильпотентный оператор в k-мерном пространстве. То, что A имеет такую матрицу в базе $e_1 \dots e_k$ означает, что $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = e_1$, $\dots$ $Ae_k = e_{k-1}$.

Теорема. Если A - нильпотентный оператор в пространстве V, то существует такое разложение $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$ на инвариантные для A подпростанства $V_1 \dots V_p$ что сужение A на V_i имеет в некотором базисе матрицу - нильпотентную жорданову клетку.

Переформулировка.

Если A - нильпотентный оператор в пространстве V, то существует такой базис в V, что матрица A в нём имеет вид



Ещё одна: для всякой нильпотентной матрицы A существует такая обратимая B, что BAB^{-1} имеет описанный вид.

Доказательство. Начнём с одного понятия. Пусть X - подпространство Y. Вектора $y_1, \dots y_n$ независимы над X, если их образ при проекции $Y \to Y/X$ линейно независим в Y/X. Максимальная независимая система над X называется базисом Y над X; $y_1, \dots y_n$ образуют базис Y над X тогда и только тогда, когда их образы образуют базис в Y/X или, что равносильно, когда $Y = X \oplus \langle y_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle y_n \rangle$.

Если $X \subset Y$, $y_1, \dots y_n$ - базис Y над X, $x_1 \dots x_m$ - базис X, то $x_1, \dots x_m\, y_1 \dots y_n$ - базис Y. Если $X \subset Y \subset Z$, $y_1, \dots y_n$ - базис Y над X, $z_1 \dots z_m$ - базис Z над Y, то $y_1 \dots y_n\, z_1 \dots z_m$

– базис Z над X.

Теперь докажем теорему. Пусть $A^t=0$. Рассмотрим последовательность подпространств

$$\underset{H_t}{V=\operatorname{Ker}A^t}\xrightarrow{A}\underset{H_{t-1}}{\operatorname{Ker}A^{t-1}}\to\underset{H_{t-2}}{\operatorname{Ker}A^{t-2}}\to\dots\to\underset{H_1}{\operatorname{Ker}A^1}\to\underset{H_0}{\operatorname{Ker}A^0}=\{0\}$$

Заметим, что пространства убывают и каждое является прообразом следующего при A. Мы будем строить базис V над H_{t-1}, затем базис H_{t-1} над H_{t-2} и в конце концов построим базис H_1 над H_0, объединяя их все, получаем базис V.

<u>Лемма.</u> Если $X,Y\subset V$, $X=A^{-1}(Y)$, $v_1,\dots v_n$ – базис в V над X, то $Av_1,\dots Av_n$ независимы над Y.

<u>Доказательство леммы.</u> Если $\lambda_1Av_1+\dots+\lambda_nAv_n+y=0$, то $A(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n)=-y\in Y$, поэтому $\lambda v_1+\dots+\lambda_nv_n\in X$, что противоречит независимости $v_1,\dots v_n$ над X.

Пусть $e_1,\dots e_k$ – базис V над H_{t-1}. Тогда $Ae_1,\dots Ae_k$ лежат в H_{t-1} и независимы над H_{t-2}. Дополним их до базиса $Ae_1,\dots Ae_k\, f_1\dots f_l$ в H_{t-1} над H_{t-2}. Применяя к ним A, получаем систему $A^2e_1,\dots A^2e_k$, $Af_1,\dots Af_l$ векторов H_{t-2}, независимую над H_{t-3}, которую дополняем до базиса векторами $g_1,\dots g_m$. И так далее. Соединяя полученные базисы, получим базис V. Он будет искомым. Векторам $e_1, Ae_1,\dots A^{t-1}e_1$ соответствует клетка размера t, векторам $e_2, Ae_2,\dots A^{t-1}e_2$ – другая, и всего клеток размера t будет k, размера $t-1$ – l, $t-2$ – m и т.д.

$$\begin{array}{ccccccc}
V=H_t & \to & H_{t-1} & \to & H_{t-2} & \to & \dots\\
e_1 & & Ae_1 & & A^2e_1 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
e_k & & Ae_k & & A^2e_k & & \\
 & & f_1 & & Af_1 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & f_l & & Af_l & & \\
 & & & & g_1 & & \\
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & g_m & &
\end{array}$$

Теперь можно понять, что является степенью минимального многочлена

<u>Теорема.</u> Степень минимального многочлена равна размеру наибольшей нильпотентной жордановой клетки.

<u>Доказательство.</u> Так как мы знаем, что минимальный многочлен есть степень t то это очевидно.

В частности, размер наибольшей жордановой клетки не зависит от выбора базиса, в котором матрица имеет рассмотренный вид. Имеет место и следующая более общая теорема.

<u>Теорема.</u> Если в двух базисах матрица одного оператора имеет рассмотренный вид, то число клеток данного размера в обоих случаях одинаково.

<u>Краткое доказательство.</u> Размерность $\dim(H_{t-p}/H_{t-(p+1)})-\dim(H_{t-(p-1)}/H_{t-p})=2\dim H_{t-p}-\dim H_{t-p+1}-\dim H_{t-p-1}$ равна числу клеток размера $t-p$.

Рассуждения этого пункта не требуют алгебраической замкнутости поля, однако в случае алгебраической замкнутости они позволяют дать аналогичное описание структуры всех операторов/см. 3.6./

3.6. <u>Жорданова нормальная форма.</u>

Жордановой клеткой размера k с собственным значением λ называется матрица

$$k\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}\right.$$

Она равна $\lambda\cdot 1$ + нильпотентная жорданова клетка. То, что A имеет в базисе $e_1,\dots e_k$ такую матрицу означает, что $Ae_1=\lambda e_1$, $Ae_2=\lambda e_2+e_1,\dots Ae_k=\lambda e_k+e_{k-1}$. Характеристический полином такого оператора равен $t\mapsto(t-\lambda)^k$. Минимальный полином тоже равен характеристическому/зная, что он – делитель характеристического, это легко увидеть/. Вообще, если $P(t)$ – характеристический или минимальный полином A, то $t\mapsto P(t-\lambda)$ – соответствующий полином для $A+\lambda\cdot 1$.

<u>Теорема.</u> Пусть A – оператор в пространстве V. Тогда существует такое разложение $V_1\oplus\dots\oplus V_p=V$ на инвариантные для A подпространства, что сужение A на каждое из них имеет базис, в котором матрица – жорданова клетка/для каждого p своё λ/.

<u>Переформулировка.</u> Для всякого оператора существует базис, в котором его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix}\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ & \ddots & 1\\ 0 & & \lambda_1\end{matrix} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix}\lambda_p & 1 & 0\\ & \ddots & 1\\ 0 & & \lambda_p\end{matrix}\end{pmatrix}$$

/находится в "нормальной жордановой форме"/

Ещё одна: для всякой матрицы A существует обратимая матрица B, такая что BAB^{-1} имеет описанный вид.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по размерности

1/. A необратим. Если A нильпотентен, то это уже доказано; с другой стороны если V можно разложить в сумму инвариантных подпространств $V_1 \oplus V_2$ /причём оба ненулевые/, то утверждение вытекает из предположения индукции. Докажем, что один из этих случаев имеет место

Лемма. Если $T: W \to W$ - линейный оператор и $\mathrm{im}\, T^2 = \mathrm{im}\, T$, то $W = \mathrm{im}\, T \oplus \ker T$.

Доказательство. По условию $\mathrm{im}\, T$ - инвариантное подпространство, сужение T на $\mathrm{im}\, T$ обратимо, поэтому $\ker T \cap \mathrm{im}\, T = 0$. Если $w \in W$, то в силу обратимости T на $\mathrm{im}\, T$ существует такое $u \in \mathrm{im}\, T$, что $Tw = Tu$. Теперь $w = u + (w-u) \in \mathrm{im}\, T + \ker T$.

Рассмотрим подпространства $\mathrm{im}\, A^0 \supset \mathrm{im}\, A^1 \supset \ldots \supset \mathrm{im}\, A^n \supset \ldots$ Если оператор нильпотентен, то всё хорошо. Если же нет, то начиная с некоторого n все пространства совпадают и ненулевые. В частности, $\mathrm{im}\, A^n = \mathrm{im}\, (A^n)^2$ и, по лемме, $V = \ker A^n \oplus \mathrm{im}\, A^n$. Оба подпространства инвариантны.

2/. A обратим. Заметим, что если утверждение теоремы верно для A, то оно верно и для $A + \lambda \cdot 1$ при любом λ. Поэтому достаточно найти такое λ, чтобы $A - \lambda \cdot 1$ был бы необратим, и дело сведётся к первому случаю.

Числа, стоящие на диагонали, как всегда, суть собственные значения

Теорема. Минимальный многочлен матрицы в жордановой нормальной форме равен $t \mapsto \prod (t - \lambda_i)^{k_i}$, где λ_i пробегает $\mathrm{Sp}\, A$, а $k_i =$ максимальный размер жордановой клетки.

Краткое доказательство. Так как минимальный многочлен делит характеристический, он должен содержать именно такие множители. Таких степеней достаточно, а меньшие не годятся. /Заметим, что при рассмотрении подпространства с данным λ_i множители $(t-\lambda)^k$ при $\lambda \neq \lambda_i$ важны, т.к. им соответствуют обратимые операторы/.

Из этой теоремы ясно, чем минимальный многочлен отличается от характеристического: первый содержит $(t-\lambda)$ в степени, равной размеру наибольшей клетки с λ, а второй - в степени, равной сумме размеров всех клеток с этим λ.

Также имеет место теорема о единственности.

Теорема. Количество клеток данного размера t с данным λ не зависит от способа выбора жорданова базиса для оператора A.

Краткое доказательство. Оно равно числу нильпотентных клеток размера t, имеющихся в разложении $A - \lambda 1$ на $\mathrm{Ker}[(A - \lambda \cdot 1)^n]$.

Замечание. Теорема о представлении оператора в жордановой форме означает, что всякий оператор представим в виде суммы нильпотентного и диагонализируемого, которые коммутируют между собой /ср. с теоремой в пункте 3.4./

Ал 22

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

1. Евклидовы пространства, как нормированные пространства.
2. Существование ортогонального базиса.
3. Ортогональная проекция, ортогональное дополнение.
4. Евклидовы пространства одной размерности изоморфны.
5. Теорема Рисса о виде линейного функционала /в Евклидовом пространстве/.
6. Ортогональная проекция и кратчайшее расстояние от вектора до подпространства.
7. Группы, группа перестановок, транспозиции; всякая перестановка есть произведение транспозиций.
8. Гомоморфизм четности /четность перестановки/.
9. Пространство полилинейных форм, его размерность; антисимметрические формы.
10. Антисимметрические p-формы на R^p
11. Определитель и его свойства.
12. Для линейного отображения $a: V \to V$ следующие свойства эквивалентны: a - изоморфизм, a - вложение, a - наложение, $\det a \neq 0$, a обратим слева, a - обратим справа, $a^*: V^* \to V^*$ обратим.
13. Собственные векторы, собственные значения; диагонализируемость оператора с различными собственными значениями.
14. Приведение оператора к треугольному виду.
15. Коммутирующие операторы /приведение к треугольному виду и для диагонализируемых операторов к диагональному виду/.
16. Инвариантные подпространства диагонального оператора.
17. Жорданова форма нильпотентного оператора.
18. След.
19. Минимальный многочлен.
20. Жорданова форма /существование/.
21. Жорданова форма /единственность/.

Л И Н Е Й Н А Я   А Л Г Е Б Р А   (3 семестр)

Ал 23

§ I. Евклидовы пространства.

Мы будем рассматривать скалярные произведения в комплексных векторных пространствах, которые в случае необходимости будут предполагаться конечномерными.

Определение. Отображение $f: E_1 \longrightarrow E_2$ комплексных векторных пространств называется антилинейным (или полулинейным), если $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda \cdot x) = \bar{\lambda} \cdot f(x)$. (Через $\overline{u+iv}$ обозначается $u-iv$.)

Примеры. Отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, переводящее z в $\bar{z}$, антилинейно. Отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, переводящее $\langle z_1, \dots, z_n\rangle$ в $\langle \lambda_1 \bar{z}_1, \dots, \lambda_n \bar{z}_n\rangle$, антилинейно. Отображение простанства комплексных функций на отрезке $[-1, 1]$ в себя, переводящее f в $(t \mapsto \overline{f(-t)})$, антилинейно.

Замечание. Всякое комплексное пространство V можно рассматривать как вещественное (обозначаемое $V_{\mathbb{R}}$). Антилинейные отображения комплексных пространств являются $\mathbb{R}$-линейными отображениями соответствующих вещественных пространств.

Наряду с билинейными формами на комплексных пространствах мы будем рассматривать полуторалинейные формы.*)

Определение. Пусть V – комплексное пространство. Функция $B: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если она линейна по первому аргументу (при фиксированном втором) и антилинейна по второму.

Пример. Функция $(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \longmapsto \alpha_1 z_1 \overline{w_1} + \dots + \alpha_n z_n \overline{w_n}$ является полуторалинейной формой на $\mathbb{C}^n$.

Замечание. Если B – полуторалинейная форма на V, то $x, y \longmapsto \operatorname{Re} B(x, y)$ – билинейная форма на $V_{\mathbb{R}}$.

Определение. Полуторалинейная форма $x, y \longmapsto \langle x, y\rangle$ на комплексном пространстве V называется скалярным произведением, если

(а) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (симметричность);
(б) $\langle x, x\rangle > 0$ при $x \neq 0$ (положительность).

Комплексное пространство со скалярным произведением называется евклидовым комплексным пространством.

Замечания. I. Требовать билинейности от скалярного произведения нельзя, так как в этом случае $\langle ix, ix\rangle = -\langle x, x\rangle$, что противоречит (б).

2. На самом деле в комплексном случае из (б) следует (а): если полуторалинейная форма $B(x, y)$ обладает свойством (б), то форма $D(x, y) = B(x, y) - \overline{B(y, x)}$ также полуторалинейна, $D(x, x) = 0$, $D(y, x) = -\overline{D(x, y)}$. Тогда $0 = D(x+y, x+y) = D(x, x) + D(y, y) + D(x, y) + D(y, x) = D(x, y) - \overline{D(y, x)}$ поэтому $\operatorname{Im} D(x, y) = 0$. Заменяя в последнем равенстве x на ix, видим, что и $\operatorname{Re} D(x, y) = 0$.

Примеры скалярных произведений. I. Стандартное скалярное произведение на $\mathbb{C}^k$ таково: $\langle(\xi_1, \dots, \xi_k), (\eta_1, \dots, \eta_k)\rangle = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_k \bar{\eta}_k$.

2. В пространстве $C([a, b], \mathbb{C})$ непрерывных комплексных функций на $[a, b]$ можно ввести скалярное произведение, положив

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

3. Пространство примера 2 не полно. Желая пополнить его, мы приходим к пространству $L_2([a, b])$ измеримых комплексных функций на $[a, b]$ с интегрируемым квадратом (скалярное произведение определяется той же формулой). Этот пример можно обобщить, заменив $[a, b]$ на произвольное пространство X с мерой μ; см. "Интеграл". При конечном X с мерой $\mu(A)$ = число элементов A получаем пространство из примера I.

4. Если W – вещественное евклидово пространство, то на его комплексификации $W_{\mathbb{C}} = \{x + iy \mid x, y \in W\}$ можно ввести скалярное произведение, положив $\langle x+iy, u+iv\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle - \langle x, v\rangle \cdot i + \langle y, u\rangle \cdot i$. Получающееся комплексное евклидово пространство называется комплексификацией W.

На всяком комплексном евклидовом пространстве можно стандартным образом ввести норму, положив $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. (То же самое получится, если рассмотреть вещественное пространство $V_{\mathbb{R}}$ со скалярным произве-

---

*) На лекциях такие формы назывались "эрмитовыми", что не вполне ... "полуторалинейная форма" введен Н. Бурбаки.

дением $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle$ и соответствующей нормой.) Эта норма не только обладает обычными свойствами нормы в вещественном пространстве $V_{\mathbb{R}}$, но и удовлетворяет условию $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$.

Как и в вещественном случае, в комплексных евклидовых пространствах имеет место неравенство Коши-Буняковского: $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$. Докажем это. Записав неравенство Коши - Буняковского в вещественном пространстве $V_{\mathbb{R}}$, имеем, что $|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$. Подбирая $\theta\in\mathbb{C}, |\theta|=1$, можно добиться того, чтобы $\langle\theta x, y\rangle = \theta\langle x,y\rangle$ было вещественным; тогда $|\langle x,y\rangle| = |\langle\theta x,y\rangle| = |\mathrm{Re}\langle\theta x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$.

В $\mathbb{C}^n$ это неравенство выглядит так:

$$|z_1\overline{w_1} + \ldots + z_n\overline{w_n}| \le \sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2}\cdot\sqrt{|w_1|^2+\ldots+|w_n|^2}.$$

Как и в вещественном случае, векторы x и y называются ортогональными, если $\langle x,y\rangle = 0$, или, что то же, $\langle y,x\rangle = 0$. Например, в пространстве $C([0,2\pi],\mathbb{C})$ (см. пример 2) векторы $a_k(t) = e^{ikt}$ ортогональны. (Вещественный аналог: векторы $t\mapsto \cos nt$, $t\mapsto \sin nt$ ортогональны в $C([0,2\pi],\mathbb{R})$.)

Если A - подмножество комплексного евклидова пространства, то через $A^{\perp}$ обозначают подпространство, состоящее из тех векторов, которые ортогональны всем векторам из A.

Доказательства следующих утверждений аналогичны доказательствам их вещественных вариантов.

Теорема Пифагора. Если x и y ортогональны, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ ▨

Теорема о базисе. Всякое конечномерное евклидово комплексное пространство имеет ортогональный базис. ▨

Теорема об ортогональном дополнении. Если W - подпространство конечномерного комплексного пространства V, то $V = W\oplus W^{\perp}$. ▨

Теорема Рисса. Всякий линейный функционал φ на конечномерном комплексном евклидовом пространстве имеет вид $\varphi(x) = \langle x, a\rangle$. Вектор a определяется однозначно. ▨

Замечания. I. В формулировке теоремы Рисса нельзя поставить a на первое мес[illegible], так как $x\mapsto\langle a,x\rangle$ - не линейный, а антилинейный функционал.

2. Взаимно-однозначное соответствие между V и V, устанавливаемое теоре[illegible] Рисса, не линейно, а антилинейно. (В вещественном случае оно линейно.)

В дальнейшем мы будем рассматривать, если не оговорено противное, одновременно комплексный и вещественный случаи.

§ 2. Изометрии.

Пусть H_1, H_2 - евклидовы пространства. Обратимый линейный оператор $U: H_1\to H_2$ называется изометрией, если выполнено одно из равносильных свойств:

(а) $\|Ux\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$

(б) $\langle Ux, Uy\rangle_{H_2} = \langle x,y\rangle_{H_1}$

Очевидно, (б) $\Rightarrow$ (а); (б) следует из (а), так как
$2\mathrm{Re}(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ и $\mathrm{Im}(x,y) = -\mathrm{Re}(ix,y)$.
В случае конечномерных пространств одинаковой размерности обратимость U следует из (а); в бесконечномерном случае это не так, даже если $H_1 = H_2$.

Как и в вещественном случае, любые два конечномерные евклидовы пространства одинаковой размерности изометричны.

Изометрии, действующие в одном пространстве ($H_1 = H_2 = H$) называются унитарными операторами в H. В вещественном случае такие операторы называют также ортогональными.

Примеры. I. Оператор умножения на $\lambda\in\mathbb{C}$ унитарен тогда и только тогда, когда $|\lambda| = 1$.

2. Оператор отражения относительно некоторого подпространства V (на V - тождественный, на $V^{\perp}$ равен $-E$) унитарен.

3. (Вещественный случай.) Оператор поворота $\mathbb{R}^2$ на угол φ с матрицей $\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$ унитарен.

4. Оператор $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, матрица которого в стандартном базисе диагональна, унитарен тогда и только тогда, когда все его собствен-

ные значения по модулю равны I.

5. В пространстве $L_2(X,\mu)$ (пример 3 скалярного произведения в § I) оператор умножения на измеримую функцию унитарен тогда и только тогда, когда эта функция почти всюду равна I по модулю.

6. Оператор сдвига в $L_2(\mathbb{R}, dx)$, переводящий f в $x \mapsto f(x+1)$, унитарен.

7. Более обшо, если φ - взаимнооднозначное отображение множества X в себя, сохраняющее меру на X $(\mu(A) \simeq \mu(f(A)))$, то оператор, переводящий f в $x \mapsto f(\varphi(x))$, унитарен в $L_2(X,\mu)$.

Рассмотрим теперь, какие матрицы соответствуют унитарным операторам. Пусть e_i - произвольный базис в евклидовом пространстве

Лемма. Оператор U унитарен $\Leftrightarrow$ $(Ue_i, Ue_j) = \langle e_i, e_j\rangle$ для всех i,j.

В самом деле, $\langle Ux, Uy\rangle$ и $\langle x, y\rangle$ - две полуторалинейные формы, и их совпадение равносильно равенству их значений на базисных векторах. ▨

Из доказанной леммы вытекает, что оператор является унитарным тогда и только тогда, когда он переводит некоторый ортонормированный (состоящий из ортогональных векторов единичной длины) базис в ортонормированный; в этом случае он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный.

Предложение. Пусть e_i - ортонормированный базис. Следующие свойства матрицы A равносильны:

I. Оператор с матрицей A в базисе e_i унитарен.
2. Столбцы матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$.
3. Строки матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$.
4. $A^*A = E$.
5. $A^* = A^{-1}$.
6. $AA^* = E$.

Через A^* обозначается матрица, получающаяся из A сопряжением (в комплексном случае) и транспонированием.

Доказательство. (I) равносильно (2) в силу леммы и равенства
$$(Ue_i, Ue_j) = (\sum u_i^k e_k, \sum u_j^\ell e_\ell) = \sum u_i^k \overline{u_j^\ell}(e_k, e_\ell) = \sum_k u_i^k \overline{u_j^k}.$$
(2)⇔(4), (3)⇔(5), (4)⇔(5)⇔(6) очевидны. ▨

Вещественные матрицы с ортогональными столбцами размера 2×2 имеют вид $\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ -\sin\varphi & -\cos\varphi\end{vmatrix}$;
во втором случае вектор $(\cos\varphi/2, -\sin\varphi/2)$, образующий угол $-\varphi/2$ с осью абсцисс, неподвижен, а перпендикулярный ему вектор умножается на - I. Таким образом, имеет место следующее

Описание изометрий в $\mathbb{R}^2$: всякая изометрия есть либо поворот, либо отражение относительно прямой. ▨

Исследуем теперь вопрос о том, какие объекты могут быть переведены друг в друга изометриями.

Теорема о продолжении изометрий. Пусть E и F - евклидовы пространства одной конечной размерности, $E'\subset E$, и $F'\subset F$ - подпространства. Тогда всякая изометрия из E' на F' продолжается до изометрии E на F.

Следствия. I. Пространства одинаковой размерности изометричны. (Этот уже отмечавшийся факт получается при $E'=0$, $F'=0$.)

2. Любое подпространство евклидова пространства можно перевести в любое другое подпространство той же размерности с помощью изометрии. ▨

Доказательство теоремы. Заметим, что изометрия, переводящая E' в F', должна переводить $E'^\perp$ в $F'^\perp$. Возьмем любую изометрию $E'^\perp$ на $F'^\perp$ (существующую в силу равенства размерностей) и, объединив ее с изометрией E' на F', получим искомую изометрию $E = E'\oplus E'^\perp$ на $F = F'\oplus F'^\perp$. ▨

Теорема Грама. Пусть E, F - пространства одной (конечной) размерности. Изометрия E на F, переводящая набор векторов $e_1,\dots,e_n\in E$ в набор $f_1,\dots,f_n\in F$, существует тогда и только тогда, когда матрицы Грама этих наборов равны: для всех i и j
$\langle e_i, e_j\rangle_E = \langle f_i, f_j\rangle$

Следствия. I. Если $e\in E$, $f\in F$, $\|e\|_E = \|f\|_F$ и $\dim E = \dim F$, то существует изометрия E на F, переводящая e в f.

2. Любые две точки сферы можно перевести друг в друга изометрией. ▨

<u>Доказательство</u> теоремы. Очевидно, что если есть изометрия, то матрицы Грама равны. Доказательство обратного утверждения мы начнем со случая $n = 1$ (следствие I). Рассмотрим одномерные подпространства E' и F', натянутые на e и f. Так как $\|e\| = \|f\|$, отображение E' в F', переводящее e в f, является изометрией. В силу теоремы о продолжении оно продолжается до изометрии E на F.

Чтобы перейти к общему случаю, нужна следующая

<u>Лемма</u>. Пусть E и F – евклидовы пространства одной размерности, $E' \subset E$ и $F' \subset F$ – подпространства, $\varphi : E' \to F'$ – изометрия, $e \in E$ и $f \in F$. В этом случае отображение φ может быть продолжено до изометрии E в F, переводящей e в f, тогда и только тогда, когда для всех $x \in E'$ выполнено $\langle e, x\rangle = \langle f, \varphi(x)\rangle$ и $\|e\| = \|f\|$.

<u>Доказательство</u> леммы. Необходимость ("только тогда") очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\|e\| = \|f\|$ и $\langle e, x\rangle = \langle f, \varphi(x)\rangle$ для всех $x \in E'$. Обозначим через e' и f' ортогональные проекции e и f на E' и F' соответственно. Тогда $f' = \varphi(e')$, ибо $f' - \varphi(e')$ ортогонально всем векторам F' (в самом деле, $\langle f', \varphi(x)\rangle - \langle \varphi(e'), \varphi(x)\rangle = 0$). В частности, $\|e'\| = \|f'\|$ и, по теореме Пифагора, ортогональные компоненты $e^\perp = e - e'$, $f^\perp = f - f'$ также имеют равные длины. Поэтому существует изометрия $E'^\perp$ на $F'^\perp$, переводящая $e^\perp$ в $f^\perp$. Объединяя ее с φ, получим изометрию E на F, переводящую e' в f' и $e^\perp$ в $f^\perp$, а значит, e в f. Лемма доказана. ▨

<u>Окончание</u> доказательства теоремы. Будем рассуждать по индукции. Пусть наборы $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$ и $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ имеют равные матрицы Грама. Обозначим через E' линейную оболочку $e_1 \ldots e_n$, через F' – оболочку $f_1, \ldots, f_n$. По предположению индукции существует изометрия $\varphi : E' \to F'$ (и даже E в F), переводящая $e_1, \ldots, e_n$ в $f_1, \ldots f_n$. Мы хотим продолжить ее до изометрии E на F, переводящей e_{n+1} в f_{n+1}. Так как $\langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = \langle f_{n+1}, f_{n+1}\rangle$, то, согласно лемме, достаточно проверить равенство $\langle e_{n+1}, x\rangle = \langle f_{n+1}, \varphi(x)\rangle$. По условию, оно выполнено, если x – одно из e_i; для остальных x это следует из линейности обеих частей равенства. Теорема доказана. ▨

§ 3. Спектральная теория.

Все рассматриваемые в этом параграфе пространства конечномерны.

Напомним, что <u>сопряженным</u> к пространству E называется пространство E' всех линейных функционалов на E. Если $\{e_i\}$ – базис в E, то формы e^j, сопоставляющие каждому $x \in E$ его j-ую координату в базисе $\{e_i\}$, образуют базис в E' (<u>двойственный</u> базис). Если $A : E \to F$ – линейный оператор, то определен <u>сопряженный</u> к A оператор $A' : F' \to E'$, переводящий φ в $x \mapsto \varphi(Ax)$. Матрица A' в двойственных базисах получается из матрицы A транспонированием.

Пусть теперь V – евклидово пространство. Тогда, согласно теореме Рисса, существует антилинейное соответствие $\Phi : V \to V'$, сопоставляющее вектору a функционал $x \mapsto \langle x, a\rangle$. Если $A : V \to V$ – линейный оператор, $A' : V' \to V'$ – сопряженный к нему, то с помощью этого соответствия A' может быть перенесен в V;

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rrr, bend right, "A^*"'] & V' \arrow[r, "A'"] & V' \arrow[r, "\Phi^{-1}"] & V \end{tikzcd}$$

результат этого перенесения называется <u>(евклидово) сопряженным</u>* к A оператором и обозначается A^*.

Заметим, что A^* линеен: хотя Φ и антилинейно, его антилинейность компенсируется антилинейностью Φ^{-1}. Определение A^* можно сформулировать иначе, потребовав коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A^*"] \arrow[d, "\Phi"] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ V' \arrow[r, "A'"] & V' \end{tikzcd}$$

или, что то же самое, выполнения равенства

$$(y, A^*x) = (Ay, x).$$

Это равенство можно принять за определение A^*, однако тогда нужно доказывать его существование и единственность.

Если e_i – <u>ортонормированный</u> базис, то из равенства $\langle Ae_i, e_j\rangle = \langle e_i, A^*e_j\rangle = \overline{\langle A^*e_j, e_i\rangle}$ вытекает, что матрица A^* в этом базисе получается из матрицы A транспонированием и

* [illegible]

сопряжением.

Из равенства $\langle x,(AB)^*y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle x, B^*A^*y\rangle$ следует, что $(AB)^* = B^*A^*$; из равенства $\langle x, A^{**}y\rangle = \langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ следует, что $A^{**} = A$; из равенства $\langle x,(\lambda A)^*y\rangle = \langle \lambda Ax, y\rangle = \lambda\langle Ax,y\rangle = \langle x, \bar\lambda A^*y\rangle$ следует, что $(\lambda A)^* = \bar\lambda A^*$. Заметим также, что $\|A\| = \|A^*\|$, так как

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} |\langle Ax, y\rangle| = \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} |\langle x, A^*y\rangle| = \|A^*\|.$$

Кроме того, $\|AA^*\| = \|A\|^2$, так как $\|AA^*\| \le \|A\|\cdot\|A^*\| = \|A\|^2$, и, с другой стороны, $\|AA^*\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} |\langle AA^*x, y\rangle| = \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} |\langle A^*x, A^*y\rangle| \ge \sup_{\|x\|\le 1} |\langle A^*x, A^*x\rangle| = \|A^*\|^2$

Следующее предложение дает эквивалентное определение унитарного оператора.

Предложение I. Оператор U унитарен тогда и только тогда, когда он обратим и $U^* = U^{-1}$.

Доказательство. Заметим, что $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle$ и что правая часть тождественно равна $\langle x, y\rangle$ тогда и только тогда, когда $U^*U = 1$. ∎

Определение. Оператор U называется:

(а) эрмитовым (в вещественном случае также и симметричным), если $U^* = U$;

(б) антиэрмитовым или косоэрмитовым (в вещественном случае также антисимметричным или кососимметричным), если $U^* = -U$;

Матрица эрмитова (антиэрмитова) оператора в ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A^* = A$ (соответственно $A^* = -A$); через A^*, напомним, обозначается сопряженная и транспонированная матрица A.

Примеры и замечания. I. Оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$ антисимметричен.

2. Оператор в $\mathbb{C}^n$ с матрицей $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$ эрмитов, если все λ_i вещественны, и антиэрмитов, если все λ_i чисто мнимые.

3. В пространстве тригонометрических многочленов $\sum_{k=1}^{N} a_k e^{ikt}$ со скалярным произведением $\int_0^{2\pi} f\bar g$ оператор d/dt косоэрмитов.

4. Оператор A эрмитов тогда и только тогда, когда оператор iA антиэрмитов. (В вещественном случае связи между симметричными и антисимметричными операторами нет.)

Каждому оператору A в евклидовом пространстве соответствует полуторалинейная форма $B_A(x,y) = \langle Ax, y\rangle$; отображение $A \mapsto B_A$ есть изоморфизм пространства линейных операторов и пространства полуторалинейных форм (если $B_A = 0$, то $\forall x (Ax = 0)$ и $A = 0$, далее по теореме Рисса или в силу соображений размерности). Эрмитовым операторам соответствуют полуторалинейные формы со свойством $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$, антиэрмитовым - со свойством $B(x,y) = -\overline{B(y,x)}$. Подставляя $y = x$, мы видим, что если A - эрмитов (косоэрмитов), то $\langle Ax, x\rangle$ всегда вещественное (чисто мнимое). В частности, если A - антисимметричес-кий оператор в вещественном пространстве, то $\langle Ax, x\rangle \equiv 0$. Верны и обратные утверждения.

Предложение 2. А. Если в комплексном евклидовом пространстве для всех x число $\langle Ax, x\rangle$ - вещественное (чисто мнимое), то оператор A эрмитов (косоэрмитов).

Б. Если в вещественном евклидовом пространстве для всех x верно равенство $\langle Ax, x\rangle = 0$, то оператор - антисимметрический.

Доказательство. А. См. замечание 2 после определения скалярного произведения для случая вещественных $\langle Ax, x\rangle$; в случае чисто мнимых $\langle Ax, x\rangle$ перейдем к A/i. Б. Если в вещественном пространстве билинейная форма B удовлетворяет условию $B(x,x)=0$, то она антисимметрична (см. "Определители"). ∎

Всякий оператор единственным образом представляется в виде суммы $A + iB$, где A и B - эрмитовы. В самом деле, если $X = A + iB$ то $X^* = A - iB$, поэтому $A = (X + X^*)/2$, $B = (X - X^*)/2i$. Легко видеть, что определенные так A и B эрмитовы.

Из свойства $(AB)^* = B^*A^*$ вытекает, что операторы AA^* и A^*A эрмитовы для любого A.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее

<u>Предложение 3</u>. Если A - эрмитов, антиэрмитов или унитарный оператор, V - инвариантное для A подпространство, то $V^{\perp}$ также инвариантно для A.

<u>Доказательство</u>. Пусть $v^{\perp} \in V^{\perp}$. Тогда для любого $v \in V$ имеем $\langle Av^{\perp}, v\rangle = \langle v^{\perp}, A^{*}v\rangle = 0$, так как $A^{*}v \in V$ (в эрмитовом и антиэрмитовом случаях это очевидно, в унитарном нужно заметить, что из инвариантности V для обратимого оператора A вытекает его инвариантность и для A^{-1}). ▨

Из этого предложения легко следует

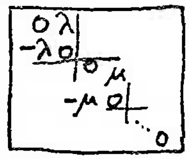
<u>Спектральная теорема (комплексный случай)</u>. Пусть A - эрмитов (антиэрмитов, унитарный) оператор в комплексном евклидовом пространстве V. Тогда существует ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора A. Собственные значения A вещественны, если A эрмитов, чисто мнимы, если A антиэрмитов, и равны по модулю I, если A унитарен.

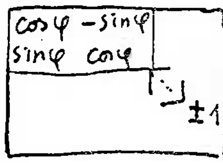
<u>Доказательство</u>. Оператор A, как и всякий оператор в комплексном пространстве, имеет собственный вектор w; натянутое на него пространство W инвариантно. Рассуждая по индукции, можно считать, что в $W^{\perp}$ (которое инвариантно в силу предложения 3) уже выбран ортонормированный базис; остается присоединить к нему вектор $w/\|w\|$. Если x - собственный вектор A, то в любом из трех случаев (эрмитовом, антиэрмитовом и унитарном) он будет собственным и для A^{*} с собственным значением $\bar\lambda$, $-\bar\lambda$, $1/\bar\lambda$ (соответственно), откуда $\lambda\langle x,x\rangle = \langle Ax,x\rangle = \langle x, A^{*}x\rangle = \bar\lambda\langle x,x\rangle$ или $-\bar\lambda\langle x,x\rangle$ или $1/\bar\lambda\langle x,x\rangle$, из чего и следует искомое утверждение о собственных значениях. ▨

В вещественном случае ситуация несколько сложнее, так как оператор может не иметь собственного вектора; однако, в этом случае он имеет двумерное инвариантное подпространство. Этим мы и воспользуемся.

<u>Спектральная теорема (вещественный случай)</u>. Пусть A - симметрический, антисимметрический или ортогональный оператор в вещественном пространстве V. Тогда существует ортонормированный базис в V, в котором матрица оператора A:

(а) диагональная, если A симметрический;

(б) блочно-диагональная и имеет вид 
если A антисимметрический;

(в) блочно-диагональная и имеет вид 
если A ортогональный.

Помимо блоков на диагонали разрешаются нули (в случае (б)) и ± 1 (в случае (в)).

<u>Доказательство</u>. Рассуждая аналогично комплексному случаю, получаем, что V есть прямая сумма попарно ортогональных одномерных и двумерных инвариантных подпространств. В одномерном пространстве антисимметрические операторы равны 0, а ортогональные равны ± 1. В двумерном пространстве антисимметрические операторы имеют вид $\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix}$, а ортогональные $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix}$.
Операторы второго типа имеют ортонормированный собственный базис (см. <u>Описание</u> в § 2), и двумерное подпространство превращается в сумму двух одномерных. Этим завершается рассмотрение случаев (б) и (в). В случае (а) нужно показать, что любой симметрический оператор имеет собственный вектор. Можно считать пространство двумерным (иначе перейдем к инвариантному подпространству). Пусть матрица нашего оператора в каком-то ортонормированном базисе есть $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ тогда характеристический многочлен равен $(\lambda-a)(\lambda-c)-b^2$ он меньше или равен 0 при $\lambda = a$ или $\lambda = c$, а его старший коэффициент равен I, поэтому он имеет корень. Что и требовалось доказать. ▨

<u>Замечание</u>. Из спектральной теоремы следует, что собственные вектора с различными собственными значениями эрмитова, антиэрмитова и унитарного оператора ортогональны (в комплексном случае это следует из описания собственных векторов диагонализируемого оператора, в вещественном случае рассуждения аналогичны). Это ясно и без

ссылки на спектральную теорему: если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, то

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle Ax,y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \left.\begin{cases} \langle x, Ay\rangle = (x,\mu y) = \bar\mu\langle x,y\rangle \\ -\langle x, Ay\rangle = -\langle x,\mu y\rangle = -\bar\mu\langle x,y\rangle \\ \langle x, A^{-1}y\rangle = \langle x, y/\mu\rangle = 1/\bar\mu\,\langle x,y\rangle \end{cases}\right\} = \mu\langle x,y\rangle$$

(последнее равенство в силу того, что собственные значения являются вещественными, чисто мнимыми или равны по модулю I соответственно). Поэтому при $\lambda \neq \mu$ имеем $\langle x,y\rangle = 0$.

Для эрмитовых операторов вещественный случай спектральной теоремы сводится к комплексному путем комплексификации. Пусть $V^{\mathbb{C}}$ – комплексификация V, $A^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ – комплексификация A. Если A симметричен, то $A^{\mathbb{C}}$, как легко видеть, эрмитов и имеет собственный базис $\xi_k + i\eta_k$. Так как собственные значения $A^{\mathbb{C}}$ вещественны, то ξ_k и η_k – собственные вектора A. Они порождают все V, и хотя их вдвое больше, чем нужно, из них можно выбрать собственный базис. Остается сделать его ортонормированным. Собственные вектора с различными собственными значениями и так ортогональны, а в подпространстве, соответствующем одному собственному значению, можно выбрать ортонормированный базис.

Переформулировкой спектральной теоремы является

Теорема о приведении пары форм. Пусть A и B – полуторалинейные формы, причем A симметрична ($A(x,y) = \overline{A(y,x)}$), а B – скалярное произведение. Тогда существует базис $\{e_i\}$, в котором матрица формы A (то есть $a_{ij} = A(e_i,e_j)$)диагональна, а матрица B – единичная.

В самом деле, надо рассмотреть B в качестве скалярного произведения и применить спектральную теорему к эрмитову оператору $\tilde{A}$, для которого $B(\tilde{A}x, y) \equiv A(x,y)$. ▨

Так как во всяком пространстве можно ввести скалярное произведение (любой базис можно объявить ортонормированным), то мы получаем такое

Следствие. Для всякой полуторалинейной формы A, удовлетворяющей свойству $A(x,y) = \overline{A(y,x)}$, существует базис, в котором ее матрица диагональна. ▨

Эти теорема и следствие (в отличие от следующей) равно применимы к комплексному и вещественному случаям.

Теорема об антисимметричных билинейных формах. Пусть A – антисимметричная билинейная форма в вещественном пространстве, то есть $A(x,y) = -A(y,x)$. Тогда существует такой базис $e_1 \dots e_n, f_1 \dots f_n, u_1 \dots u_k$ что $A(x,y) = 0$ для любых базисных векторов x и y, за исключением $A(e_i, f_i)$, равных I, и $A(f_i, e_i)$, равных – I при любом i.

Доказательство. Введя скалярное произведение, мы сопоставляем A антисимметрический оператор; применяем к нему спектральную теорему и затем, если нужно, умножаем векторы этого базиса на подходящие числа. ▨

Эта теорема верна и для билинейных форм в комплексных пространствах, но доказывается иначе.

Центральным пунктом доказательства спектральной теоремы для эрмитовых операторов было существование собственного вектора. В комплексном случае он есть у любого оператора, в вещественном потребовалось дополнительное рассуждение. Вместо этого можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма об экстремуме на сфере. Пусть A – эрмитов оператор. Рассмотрим вещественную функцию $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ на сфере $\|x\| = 1$. Пусть x – точка максимума этой функции (она существует, так как сфера компактна, а функция непрерывна). Тогда x – собственный вектор оператора A.

Доказательство. Докажем, что Ax ортогонально любому единичному вектору y, ортогональному x. В самом деле, производная функции $t \mapsto f(x\cos t + y\sin t) = \langle Ax, x\rangle\cos^2 t + \langle Ax,y\rangle\cdot\sin t\cdot\cos t + \langle Ay,x\rangle\cdot\sin t\cdot\cos t + \langle Ay,y\rangle\sin^2 t$ в точке ее максимума ($t = 0$) равна 0, то есть $\langle Ay,x\rangle + \langle Ax,y\rangle = 2\langle Ax,y\rangle = 0$. ▨

Связь оператора A с функцией $\langle Ax, x\rangle$ часто полезна. Например, верно такое

Предложение 4. Норма эрмитова оператора A равна наибольшему из модулей его собственных значений и равна $\sup\{|\langle Ax,x\rangle| \mid \|x\| = 1\}$.

Оно легко следует из спектральной теоремы. ▨

Напомним, что коммутирующее семейство диагонализируемых операторов можно привести одновременно к диагональному виду. Мы хотим обобщить спектральную теорему в сходном направлении.

Ясно, что операторы, диагональные в некотором базисе, коммутируют друг с другом. Оказывается, что если семейство операторов замкнуто относительно сопряжения, то верно и обратное.

Спектральная теорема для семейств (комплексный случай). Пусть S - семейство попарно коммутирующих операторов, замкнутое относительно сопряжения $(A\in S \Rightarrow A^*\in S)$. Тогда существует ортонормированный базис, в котором все операторы семейства имеют диагональные матрицы.

Доказательство. Как известно, семейство коммутирующих операторов в комплексном пространстве имеет общий собственный вектор. Для завершения рассуждения, аналогичного доказательству спектральной теоремы для одного оператора, осталось показать, что если W инвариантно относительно всех операторов семейства, то и $W^\perp$ - тоже. В самом деле, если $x\in W^\perp$, $y\in W$, $A\in S$, то $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = 0$ так как $A^*y\in W$, $x\in W^\perp$. ▨

Эта теорема позволяет полностью описать операторы, имеющие ортонормированный собственный базис. Назовем оператор нормальным, если $AA^* = A^*A$. (Эрмитовы, антиэрмитовы и унитарные операторы нормальны.) Применяя теорему к семейству $\{A, A^*\}$, получаем

Следствие. Для всякого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором он имеет диагональную матрицу. ▨

Очевидно, что оператор, имеющий диагональную матрицу в ортонормированном базисе, нормален. Поэтому собственный ортонормированный базис имеют нормальные операторы и только они.

Добавление к § 3. О бесконечномерном случае.

В бесконечномерном случае следует рассматривать полные евклидовы пространства (гильбертовы пространства) и непрерывные операторы, функционалы и так далее. В спектральной теореме нельзя утверждать существование собственного базиса: эрмитов оператор умножения на x в $L_2([0,1], dx)$ не имеет ни одного собственного вектора. Правильная формулировка такова:

Бесконечномерная спектральная теорема (комплексный случай). Пусть E - гильбертово пространство, A - непрерывный эрмитов (антиэрмитов, унитарный) оператор. Тогда существует такое пространство X с мерой μ, такая изометрия E на $L_2(X,\mu)$ и такая измеримая ограниченная функция φ на X, что диаграмма коммутативна. При этом φ почти всюду вещественна (эрмитов A), чисто мнима (антиэрмитов A), равна по модулю 1 (унитарный A). ▨

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\text{изо}"', "\text{метрия}"] \arrow[d, "A"'] & L_2(X,\mu) \arrow[d, "\text{умн. на }\varphi"] \\ E \arrow[r, "\text{изо}", "\text{метрия}"'] & L_2(X,\mu) \end{tikzcd}$$

Пример. В $L_2(S^1, dx)$ оператор поворота на α, переводящий f в $t\mapsto f(t+\alpha)$, унитарен. Он эквивалентен оператору умножения на функцию $n\mapsto e^{in\alpha}$ в пространстве $L_2(\mathbb{Z}, \mu(A) = \text{число элементов } A)$. Изоморфизм сопоставляет каждой функции $f\in L_2(S^1, dx)$ последовательность a_n ее коэффициентов Фурье: $a_n = \langle f, t\mapsto e^{int}\rangle$.

§ 4. Положительность.

В этом разделе мы рассматриваем конечномерное комплексное евклидово пространство V. Все операторы - линейные операторы в V.

Теорема I. Следующие свойства оператора A равносильны:

(а) Полуторалинейная форма, соответствующая A, положительна: $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.
(б) A - эрмитов оператор с неотрицательными собственными значениями.
(в) $A = H^2$, где H - эрмитов оператор.
(г) $A = BB^*$, где B - некоторый оператор.

Доказательство теоремы I. Очевидно, что (б)$\Rightarrow$(в) (спектральная теорема), (в)$\Rightarrow$(г) и (г)$\Rightarrow$(а) ($\langle Ax,x\rangle=\langle BB^*x,x\rangle=\langle B^*x,B^*x\rangle\geq 0$). Импликация (а)$\Rightarrow$(б) следует из того, что вещественность, а тем более положительность формы $\langle Ax,x\rangle$ влечет эрмитовость A (§ 3, предложение 2). Если $Ax=\lambda x$, то $\langle Ax,x\rangle=\lambda\langle x,x\rangle$, поэтому все собственные значения A неотрицательны. ▨

Определение. Оператор, обладающий указанными в теореме I свойствами, называется положительным. Положительность оператора A записывается так: $A\succ 0$. Если разность двух эрмитовых операторов A и B положительна, то пишут $A\succ B$. (Заметим, что $A\succ A$.)

Предложение I. Множество всех положительных операторов образует в вещественном пространстве всех эрмитовых операторов выпуклый конус, содержащий окрестность единичного оператора. (Конусом называется множество, содержащее вместе с вектором x и любой вектор λx при $\lambda>0$; конус является выпуклым, если вместе с векторами x и y содержит и любой вектор вида $\lambda x+\mu y$, $\lambda,\mu>0$.)

Доказательство. То, что это множество - выпуклый конус, очевидно. Докажем, что близкие к I эрмитовы операторы положительны.

Лемма. $A\prec\|A\|\cdot 1$

Доказательство. Действительно, $\langle Ax,x\rangle\leq\|A\|\cdot\|x\|^2$, поэтому $((\|A\|\cdot 1-A)x,x)\geq 0$. ▨

Из леммы следует, что если $\|1-A\|\leq 1$, то $1-A\prec\|1-A\|\cdot 1\prec 1$, то есть $A\succ 0$. ▨

Соотношения между множествами положительных, эрмитовых, антиэрмитовых, унитарных и всех операторов аналогичны соотношениям между множествами положительных, вещественных, чисто мнимых, равных по модулю I и всех комплексных чисел. Помимо уже упоминавшихся, эту аналогию подтверждают следующие утверждения:

Теорема о корне. Если A - положительный оператор, то существует и единственен положительный оператор B, для которого $B^2=A$.

Доказательство. Оператор B можно получить, взяв базис, в котором A диагонален и извлекая корни из стоящих на диагонали чисел. Докажем его единственность. В самом деле, если B - положительный оператор, то B диагонализируем и пространство разлагается в прямую сумму собственных подпространств V_λ, соответствующих разным собственным значениям оператора B. Векторы пространства V_λ являются собственными и для оператора A с собственным значением λ^2. Поскольку V_λ в прямой сумме дают все V, то любой вектор, имеющий собственное значение λ^2 для A, лежит в V_λ (это следует из описания собственных векторов диагонализируемого оператора), поэтому V_λ определены однозначно, так же как и сами λ, которые являются (положительными) квадратными корнями из собственных значений оператора A. Отсюда следует единственность B. ▨

Предложение 2. Если $0\prec A\prec B$, то $\|A\|\leq\|B\|$.

Доказательство. Это следует из того, что для положительного A имеет место равенство $\|A\|=\sup\{\langle Ax,x\rangle\mid\|x\|=1\}$ (сравни предложение 4, §3).

Теорема о полярном разложении. Всякий обратимый оператор A представляется в виде произведения положительного P и унитарного U: $A=P\cdot U$ (Можно представить его и в виде произведения унитарного U' и положительного P': $A=U'P'$, но, вообще говоря, $P\neq P'$ и $U\neq U'$.)

Доказательство. Если $A=PU$, то $A^*=U^*P^*=U^{-1}P$. Поэтому $AA^*=P^2$. Мы видим теперь, что в качестве P надо взять положительный корень из положительного оператора AA^*. В силу обратимости A обратим и A^* ($A^*(A^{-1})^*=1^*=1$), поэтому AA^*, а значит, и P обратимы. Осталось проверить унитарность оператора $U=P^{-1}A$. В самом деле, $UU^*=P^{-1}AA^*(P^{-1})^*=P^{-1}\cdot P^2\cdot(P^*)^{-1}=1$ ($(P^{-1})^*=(P^*)^{-1}$ так как $(P^{-1})^*P^*=(PP^{-1})^*=1^*=1$). ▨

Замечание. Утверждение теоремы верно и для необратимых A: пусть $A_n=P_nU_n$ - последовательность обратимых операторов, сходящаяся к A; из ограниченной ($\|U_n\|=1$) последовательности U_n выберем сходящуюся к некоторому (унитарному) U подпоследовательность. Тогда $A=(AU^{-1})U$; AU^{-1} положителен, так как множество положительных операторов замкнуто (проверьте!).

Рассмотрим теперь множество K эрмитовых операторов, удовлетворяющих условию $0<A<1$. Ясно, что K выпукло. Из предложения 2 вытекает, что оно ограничено. Легко видеть, что K замкнуто (если $A_n \to A$ и $\langle A_n x, x\rangle \geq 0$, то и $\langle Ax, x\rangle \geq 0$), следовательно, K компактно. Найдем крайние точки множества K.

Напомним, что точка x выпуклого множества K называется крайней, если она не есть середина никакого отрезка, целиком лежащего в K. В силу выпуклости K отрезок целиком лежит в тогда и только тогда, когда его концы лежат в K, поэтому определение можно переформулировать так: x - крайняя, если из $x=(y+z)/2$ и $y, z\in K$ следует $x=y=z$.

Лемма о крайних точках. Если x - крайняя точка K, то x не может быть представлена в виде выпуклой комбинации $x=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n$, $\lambda_i>0$, $\sum\lambda_i=1$, $n\geq 2$ других точек K.

Доказательство. Пусть это не так. Рассмотрим такую комбинацию с наименьшим n. Разбивая, если нужно, одно слагаемое на два, можем считать, что для некоторого s имеют место равенства $\lambda_1+\ldots+\lambda_s=1/2$ и $\lambda_{s+1}+\ldots+\lambda_n=1/2$. Если $y=2\lambda_1 x_1+\ldots+2\lambda_s x_s$, $z=2\lambda_{s+1}x_{s+1}+\ldots+2\lambda_n x_n$, то $y, z\in K$ в силу выпуклости (выпуклое множество вместе с любыми точками содержит их выпуклые комбинации), $x=(y+z)/2$, поэтому $x=y=z$; но по крайней мере одна из точек y и z представима в виде более короткой выпуклой комбинации. Противоречие. ▨

Крайние точки определяют выпуклое множество, так как верна (трудная)

Теорема Крейна-Мильмана. Компактное выпуклое множество есть замыкание выпуклой оболочки своих крайних точек. ▨

Для описания крайних точек K напомним, что оператор P, удовлетворяющий условию $P^2=P$, называется проектором. Если P - проектор, то всё пространство V раскладывается в прямую сумму $V=\ker P\oplus \operatorname{im} P$, причём оператор P проектирует V на $\operatorname{im} P$ параллельно $\ker P$ /т.е. переводит $\xi\oplus\eta$ в η /. Проектор в евклидовом пространстве называется ортогональным, если $\ker P\perp \operatorname{im} P$. Ортогональность проектора P равносильна его эрмитовости. Покажем, например, что из ортогональности im и $\ker P$ следует $P^*=P$. Пусть $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, где $x_1, y_1\in\ker P$; $x_2, y_2\in \operatorname{im} P$. Тогда $Px=x_2$, $Py=y_2$ и $\langle Px, y\rangle=\langle x_2, y\rangle=\langle x_2, y_2\rangle=\langle x, y_2\rangle=\langle x, Py\rangle$.

Теорема о крайних точках множества K. Крайние точки множества K суть ортогональные проекторы.

Док-во. Покажем, что каждая точка K есть выпуклая комбинация проекторов, т.е. есть $\sum\lambda_i P_i$, P_i - проекторы, $\lambda_i\geq 0$, $\sum\lambda_i=1$. Отсюда будет следовать, что множество крайних точек содержится в множестве проекторов. Пусть $0<A<1$. Рассмотрим ортонормированный базис, в котором матрица A диагональна: $\begin{vmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{vmatrix}$. Ясно, что $0\leq\lambda_i\leq 1$. Пространство всех операторов, имеющих в том же базисе диагональные вещественные матрицы, изоморфно $\mathbb{R}^n$. Пересечение этого подпространства с K отождествляется с единичным кубом в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что каждая точка куба есть выпуклая комбинация его вершин. Но вершинам отвечают матрицы, у которых на диагонали стоят 0 и 1, т.е. ортогональные проекторы.

Покажем, что каждый проектор P - крайняя точка. Пусть $P=1/2(A+B)$, где $0<A$, $B<1$. Пусть $x\in\ker P$. Так как A и B положительны и $\langle Ax, x\rangle+\langle Bx, x\rangle=2\langle Px, x\rangle=0$, то $\langle Ax, x\rangle=0$ и $\langle Bx, x\rangle=0$. Отсюда следует, что $Ax=Bx=0$. Действительно, если $A=H^2$ ($H=H^*$), то $0=\langle H^2x, x\rangle=\langle Hx, Hx\rangle$ влечёт $Hx=0$, откуда $Ax=H^2x=0$. Итак, A и B обращаются в ноль на $\ker P$.

Чтобы показать, что A и B тождественны на $\operatorname{im} P$, заменим проектор P на проектор $1-P$ и заметим, что $(1-P)=1/2((1-A)+(1-B))$. Остаётся применить к $1-A$ и $1-B$ рассуждения предыдущего абзаца. ▨

Определение. Линейный функционал на пространстве непрерывных операторов называется положительным, если он неотрицателен на каждом положительном операторе.
Примеры: I. Для всякого $x \in V$ функционал $A \mapsto \langle Ax, x\rangle$ положителен.
2. Функционал $A \longmapsto Tr\,A$ положителен. Действительно, собственные значения (а, значит, и их сумма) положительного оператора неотрицательны.
Предложение 5. Норма положительного функционала f равна $f(\mathbb{1})$.
Док-во. Применив f к неравенству $-\|A\|\cdot\mathbb{1} < A < \|A\|\cdot\mathbb{1}$, имеем, что $|f(A)| \leq \|A\|\cdot f(\mathbb{1})$, откуда и следует требуемое. ▨

Положительный функционал $A \longmapsto Tr\,A$ определяет скалярное проиведение $\langle A, B\rangle = Tr\,AB^*$, превращающее пространство операторов $\mathcal{L}(V)$ в евклидово. По теореме Рисса каждый функционал на $\mathcal{L}(V)$ имеет вид $A \longmapsto Tr(AB)$, где B – фиксированный оператор.
Теорема 4 (о самодвойственности конуса положительных операторов). Функционал $A \mapsto Tr(AB)$ на $\mathcal{L}(V)$ положителен тттк оператор B – положителен.

Название теоремы объясняется следующим. Положительные операторы образуют конус C в пространстве $\mathcal{L}(V)$. В сопряженном пространстве возникает двойственный конус C' – множество функционалов, принимающих неотрицательные значения на исходном конусе положительных операторов. Конус C' – это множество положительных функционалов. Так как пространство $\mathcal{L}(V)$ евклидово, то оно отождествляется со своим сопряженным. При этом конус C' можно рассматривать как конус в $\mathcal{L}(V)$. Теорема I утверждает, что при этом C' совпадает с исходным конусом C. Говорят, что конус C двойственен сам себе.
Доказательство теоремы. А) Пусть A, $B > 0$, тогда $A = H^2$, $B = K^2$, H, K – эрмитовы. Тогда $Tr\,AB = Tr\,H^2K^2$, что равно (след произведения не зависит от порядка сомножителей) $Tr\,HKKH = Tr\,HK(HK)^*$ что равно следу положительного оператора и поэтому неотрицательно.
Б) Пусть $Tr(AB) \geq 0$ для всех положительных A. Возьмем в качестве A оператор ортогонального проектирования $P_a : x \longmapsto \langle x, a\rangle \cdot a$ на вектор a единичной длины. Тогда $P_a \circ B(x) = (Bx, a)\cdot a$ и его след равен (Ba, a) (вычислим его в ортонормированном базисе, содержащем a). Поэтому $(Ba, a) \geq 0$. Положительность B доказана. ▨

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. III СЕМЕСТР.

Задачи I.

I. Дано скалярное произведение в V. Построить скалярное произведение в а/. V^* ; б/. $V\oplus V$; в/. $L(V,V)$.
2. Найти крайние точки единичного шара в евклидовом пространстве.
4. а/. Если $A^2=1$, то оператор A подобен изометрии.
   б/. Если $A^n=1$, то оператор A подобен изометрии.
5. Пусть T^n – подгруппа диагональных матриц в $U(n)$ а/. Докажите, что всякая коммутативная подгруппа $U(n)$, содержащая T^n, совпадает с T^n.
б/. Найдите все такие матрицы $A\in U(n)$, что $AT^nA^{-1}\subset T^n$.
6. Установите взаимнооднозначное соответствие между $GL(n,\mathbb{C})/$подгруппа верхнетреуг. матриц и $U(n)/T^n$.
7. Докажите, что любая невырожденная матрица есть произведение унитарной и треугольной; однозначно ли такое разложение?
8. Линейная оболочка $U(n)$ в $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ совпадает с $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$. Докажите!
9. Докажите, что оператор P в евклидовом пространстве является ортогональным проектором тогда и только тогда, когда $P^2=P=P^*$
I0. Укажите геометрический смысл оператора, удовлетворяющего условию $S^*=S^{-1}=S$.
II. Доказать, что $(\operatorname{im}A)^\perp=(\operatorname{Ker}A^*)$, $(\operatorname{Ker}A)^\perp=\operatorname{im}(A^*)$.
I2.* Докажите, что группа $SO(3)$ проста.
I3. Всякая изометрия в $\mathbb{R}^n$ есть композиция нескольких отображений относительно гиперплоскостей. Докажите!
I4. Докажите, что если $\|U\|=\|U^{-1}\|$, то U унитарен.
I5. Докажите, что A эрмитов оператор в $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда $(Ax,x)\in\mathbb{R}$ при всех $x\in\mathbb{C}^n$.
I6. Пусть A и B – эрмитовы операторы. Проверьте, что тогда $\|A+iB\|^2=\|A\|^2+\|B\|^2$.
I7. Определим график оператора $A:V\to V$ как $\Gamma_A=\{(x,Ax)\in V\oplus V\}$. Пусть V – евклидово пространство. Введём в $V\oplus V$ стандартное скалярное произведение и рассмотрим оператор $\mathcal{E}$ в $V\oplus V$, $\mathcal{E}:(x,y)\mapsto(x,-y)$. Докажите, что $(\Gamma_{A^*})^\perp=\mathcal{E}(\Gamma_A)$.
I8. Докажите, что множества $U(n)$ и $O(n)$ связны.
I9. Назовём две билинейные формы на $\mathbb{R}^2$ эквивалентными, если найдётся такая $A\in SO(2)$, что $B_1(x,y)=B_2(Ax,Ay)$. Перечислите классы эквивалентных форм.

20. Пусть $A:V\to V$ эрмитов оператор. Докажите, что существует такое вещественное подпространство $W\subset V_{\mathbb{R}}$, что $V=W\oplus iW$, причём W инвариантно относительно A и $A|_W$ – симметрический оператор.
2I. Пусть A – эрмитов оператор. Докажите, что для всякого вектора x существует предел $\lim_{n\to\infty}\|A^nx\|^{\frac{1}{n}}/\|x\|$. Чему он равен?
22.* Не используя спектральной теоремы доказать, что $\sup\frac{(Ax,x)}{\|x\|^2}=\|A\|$ для эрмитова оператора A.
23. Пусть ω – невырожденная кососимметрическая билинейная форма в вещественном евклидовом пространстве V. Тогда существует разложение $V=V_1\oplus V_2$, при котором $\omega(x,y)=(x_1,y_2)-(x_2,y_1)$, где $x=x_1\oplus x_2$ и $y=y_1\oplus y_2$.
24. $GL(n,\mathbb{C})$ гомеоморфна $U(n)\times\mathbb{R}^n$.
25. Пусть $A=U\cdot H$ / H–унитарен, U – эрмитов/. Докажите, что U коммутирует с H тогда и только тогда, когда A нормален.
26. Пусть A – вырожденный оператор, $H=(A^*\cdot A)^{1/2}$. Докажите, что существует такой оператор S, что $A=SH$. Как устроен S?
27. Найдите число элементов в множестве двойных классов смежности

а). $U(n)\backslash \operatorname{Matr}(n,\mathbb{C})/U(n)$.

б). $U(n)\backslash GL(n,\mathbb{C})/U(n)$.

Ал35

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА III семестр.

Задачи 2.

I. Если $\|A\|=\|A^{-1}\|=1$, то A – изометрия.
2. Нарисуйте множество $S_A=\{(Ax,x)\in\mathbb{C} \mid \|x\|=1\}$, $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ /в ортонормированном базисе/.
3. Докажите, что билинейная форма $K:(A,B)\mapsto tr(AB)$ на пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ не является вырожденной.
4. Докажите, что функционал $\varphi_B:\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)\to\mathbb{C}$, $\varphi_B:A\mapsto tr(AB)$ "симметричен"/ т.е. $\varphi_B(A^*)=\overline{\varphi_B(A)}$ / тттк A – эрмитов.
5. Докажите, что $tr(AA^*)\geq\|A\|^2$.
6* Дан оператор A в евклидовом пространстве V. При каких условиях на A пространство V можно вложить в большее евклидово пространство W и построить унитарный оператор $U: W\to W$ так, чтобы композиция $V\xrightarrow{i}W\xrightarrow{U}W\xrightarrow{\pi}V$ совпадала с A / здесь i – вложение, а π – ортогональная проекция W на V /.
7. Укажите геометрический смысл операторов U, удовлетворяющих условиям $U=U^{-1}=U^*$.
8. Если полуторалинейная форма B на евклидовом пространстве V инвариантна относительно всех изометрий /т.е. $B(Ux,Uy)=B(x,y)$ для любой изометрии U и векторов x и y /, то B пропорциональна скалярному произведению.
9. Пусть J – оператор в вещественном евклидовом пространстве V, удовлетворяющий условию $J^2=-1$. Превратим V в комплексное векторное пространство, полагая $(u+iv)z\leftrightharpoons uz+Jvz$ /$u,v\in\mathbb{R}$, $z\in V$ /. При каких условиях на J заданное в V скалярное произведение станет вещественной частью комплексного скалярного произведения ?
I0. Найти ортогональное дополнение в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ к пространству симметрических матриц /относительно формы $A,B\mapsto tr(AB)$/.
II. Любое ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^3$ есть поворот вокруг некоторой оси.
I2. Найти расстояние между прямыми $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ и $\vec{c}+\mu\vec{d}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$, $c=(c_1,c_2,c_3)$, $d=(d_1,d_2,d_3)$.
13. Записать уравнение поверхности в $\mathbb{R}^3$, получающейся при вращении вокруг оси прямой, не проходящей через ось вращения.

В задачах I4–I6 V – комплексное евклидово пространство и $\mathcal{M}$ – инволютивная подалгебра с единицей в пространстве $\mathcal{L}(V,V)$ /инволютивность означает, что $A\in\mathcal{M}\Rightarrow A^*\in\mathcal{M}$ /.

I4. Докажите, что пространство V разлагается в ортогональную прямую сумму $V_1\oplus\dots\oplus V_m$, где каждое V_i инвариантно относительно $\mathcal{M}$ и не содержит /собственного/ подпространства, инвариантного относительно $\mathcal{M}$.
I5а. Алгебра $\mathcal{M}'$ /всех операторов, коммутирующих с каждым оператором из $\mathcal{M}$ / тоже инволютивна.
I5б. Разложить пространство V в ортогональную прямую сумму $V=V_1\oplus\dots\oplus V_k$, а алгебру $\mathcal{M}$ в прямую сумму $\mathcal{M}_1\oplus\dots\oplus\mathcal{M}_k$ так, чтобы элементы $\mathcal{M}_i$ переводили элементы V_j в элементы V_j при $j=i$ и в 0 при $j\neq i$ и при этом любой оператор $V_j\mapsto V_j$, коммутирующий с $\mathcal{M}_j$ был бы скалярен. /Примените спектральную теорему к $\mathcal{M}\cap\mathcal{M}'$ /.
I6* Пусть $\mathcal{M}\cap\mathcal{M}'$ состоит из скалярных операторов, тогда существует ортогональный базис V, в котором $\mathcal{M}$ совпадает с алгеброй всех операторов вида
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \boxed{A}\ddots \end{pmatrix}$$
/Указание: см. "Теор. мин. по алгебре" п. 7,8./
I7. Пусть $A:V\to W$ и $A':W'\to V'$ – сопряжённый оператор. Тогда A – наложение тттк A' – вложение.
I8. /Теорема Хелли/. Дано семейство выпуклых в $\mathbb{R}^n$ множеств. Докажите, что если пересечение любых $n+1$ множеств непусто, то и пересечение всех множеств непусто.

Задачи средние

Если не оговорено противное, то все пространства предполагаются конечномерными, а основное поле считается $\mathbb{R}$, если в пространстве задана евклидова структура, и $\mathbb{C}$ в противном случае.

I. Построить два диагонализируемых некоммутирующих оператора.

2. Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.

3. Найти все инвариантные подпространства жордановой клетки.

4. Найти коммутант / мн-во коммутирующих с ней операторов/ диагональной матрицы.

5. Д-ть, что линейное пространство не является объединением конечного числа подпространств меньшей размерности.

6. В конечномерном пространстве равенство АВ–ВА = Е невозможно.

7. Характеристические многочлены АВ и ВА совпадают. /Указание: рассмотреть сначала случай обратимого А./

8. Если АВ – Е обратим, то и ВА – Е обратим.

9. Д-ть, что для почти всех А множество решений уравнения $X^2 = A$ конечно и равно 2^k, где к – размерность пространства.

I0. Привести пример операторов А и В в бесконечномерном пространстве таких, что АВ = Е, но ВА ≠ Е.

II. Привести пример таких операторов А и В в бесконечномерном пространстве, что АВ – ВА = Е. /Ср. с задачей 6./

I2. Если $\mathrm{Tr}\,A^k = 0$ для всех /или для почти всех к/к, то А – нильпотент.

I3. В пространство ~~многочленов~~ многочленов ненулевой дифференциальный оператор $Д = a_0 + a_1\frac{d}{dx} + \ldots + a_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ / $\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования/ является наложением.

I4. Пусть k – поле, $V = k[x]/p\cdot k[x]$, $p \in k[x]$. Найти характеристический многочлен оператора "умножение на х" : $V \to V$.

I5. Если В – билинейная форма, для которой В/х,у/=0 титтк В/у,х/=0, то В – симметричная или кососимметричная форма.

I6. В евклидовом пространстве единичная сфера (х,х) = I есть множество крайних точек единичного шара (х,х) ≤ I /точка $x \in X$ не крайняя в X, если она есть середина некоторого отрезка, лежащего в X/.

I7. Пусть оператор $V \oplus V \to V \oplus V$ имеет "матрицу" $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, $(A, B, C \in L(V, V))$. Доказать, что он обратим титтк А и С обратимы.

I8. Если А – оператор в конечномерном нормированном пространстве, $\lim \|A^n\|^{1/n} = 0$, то А – нильпотент.

19. Пусть $A: V \to V$ диагонализируем. Тогда собственные значения А различны титтк А имеет циклический вектор, т.е. такой вектор х, что $x, Ax, \ldots, A^{n-1}x$ порождают все пространство /$n = \dim V$/.

20. Указать необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица $\begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & 0 \end{pmatrix}$ была диагонализируемой.

21. Найти жорданову нормальную форму оператора с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}^k$

22. Если $A^k = E$ при нек-м К, то А – диагонализируем.

23. Если А коммутирует с нильпотентной матрицей В, то собств. значения А и А + В совпадают.

24. Операторы $A, B: V \to W$ эквивалентны, если существуют изоморфизмы φ и ψ, делающие диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi"] & W \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[r, "A"] & W \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Сколько классов неэквивалентных операторов существует для данной пары пространств V и W ?

25. Всякий гомоморфизм кольца квадратных матриц – внутренний /т.е. имеет вид $A \mapsto C\,A\,C^{-I}$ для некоторого С /

26. Если $A: V \to V$ таков, что А сохраняет расстояние и А/0/=0, то А – линейный оператор.

Задачи трудные   Ал37

I. Пусть A – линейный оператор в пространстве V. Если для всякого x вектора x, Ax,...,$A^{k-1}x$ зависимы, то степень минимального многочлена не больше k.

2. Зададим в пространстве $\mathbb{R}[t]$ скалярное произведение

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Найти расстояние от Θ до A, где A – множество многочленов степени k со старшим коэффициентом I.

3. Если k векторов в евклидовом пространстве образуют попарно тупые углы, то любые k–I из них линейно независимы.

4. Пусть A и B – линейные операторы, причем A = AB–BA. Тогда A – нильпотентен.

/Решить уравнение AB–BA=A для 2x2-матриц A и B. Сколько существует прр /AB/ не подобных решений?/

5. Д-ть, что если A,B,C –лин.операторы и C = AB–BA, причем A коммутирует с C, то C–нильпотент.

6. Если $Д_I+H_I=Д_2+H_2$, $Д_I$ и $Д_2$ – диагонализируемы, а H_I и H_2 – нильпотентны, причем $Д_i$ коммутируют с H_i, то $Д_I=Д_2$ и $H_I=H_2$.

7. Гомоморфизм группы $GL(n,C)$ в мультипликативную группу поля C и переводящий $\begin{pmatrix}\lambda & & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}$ в λ совпадает с определителем.

8. Построить вложение аддитивной группы $\mathbb{R}^{n^2}$ в мультипликативную группу $GL(2n,\mathbb{R})$.

9. В кольце опреаторов в пространстве У нет двусторонних идеалов.

I0. Описать все левые и правые идеалы кольца операторов пространства У.

II. Для всякого оператора A существует такой оператор B, что ABA=A.

I2. Если оператор A представлен в виде Д + H, где Д-диагонализируем, а H – нильпотентен/такое представление существует, см."Операторы"/ и единственно /см. задачу № 6/, то Д и H можно выразить как многочлены от A.

I3. Пусть X – нормированное пространство. Норма в X тогда и только тогда задается некоторым скалярным произведением, когда выполнено соотношение

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

I4. Если оператор B коммутирует с любым оператором, коммутирующим с A, то B есть многочлен от A.

I5. Доказать, что множество 2 x 2- матриц с вещественными элементами и с определителем, равным I, гомеоморфно/в метрике, индуцированной из $\mathbb{R}^4$/ пространству $\mathbb{R}^2\times S^1$.

I6. В пространстве $V\oplus V$ операторы $\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ подобны.

I7. Множество матриц, разлагающихся в произведение верхнетреугольной и нижнетреугольной плотно во множестве всех матриц.

I8. Множество матриц, подобных $\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$, плотно во множестве всех нильпотентных матриц.

I9. Пусть $A: V\to V$ и $\|A\|\le I$. Доказать, что последовательность операторов $\dfrac{E+A+A^2+\ldots+A^{n-1}}{n}$ имеет предел B такой, что $B=B^2$. Найти $\operatorname{Im} B$.

20. Д-ть, что ~~для~~ определитель общего вида, рассматриваемый как многочлен от своих элементов,принятых за неизвестные, не разлагается на 2 множителя, каждый из которых есть ~~[illegible]~~ многочлен ненулевой степени /т.е определитель является неприводимым многочленом от своих элементов, причем над любым полем/.

Примечание. Оговорки,сделанные к задачам средним, остаются в силе и для этих задач.

Ал 38

Т Е О Р Е Т И Ч Е С К И Й   М И Н И М У М   П О   А Л Г Е Б Р Е

В этом тексте сформулированы некоторые алгебраические утверждения, которые являются ключевыми в некоторых разделах алгебры. Каждое из них снабжено ссылками на книгу, в которой его можно прочесть. Помимо этого имеются указания (часто несколько). Эти указания, во-первых. служат подсказкой, а во-вторых, указывают путь доказательства. (Часто есть несколько вариантов доказательств.) Если путь доказательства заимствован из малодоступной литературы, указание более подробно. Подчеркнутые в тексте слова – новые понятия, относящиеся к кругу идей данного утверждения.

I. Алгебраичность. Комплексное число, являющееся корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами, называется алгебраическим. Доказать, что множество алгебраических чисел – счетное подполе в $\mathbb{C}$.

Указания. А) Число $\alpha\in\mathbb{C}$ алгебраично над полем $k\subset\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда пространство, порожденное над k степенями α, конечномерно над k. Таким образом, если α и β – алгебраические числа, то есть алгебраические над $\mathbb{Q}$ числа, то поле k, порожденное над $\mathbb{Q}$ элементом α, конечномерно над $\mathbb{Q}$, а пространство, порожденное над k степенями β, конечномерно над k, и, следовательно, над $\mathbb{Q}$. Но это пространство содержит $\alpha+\beta$ и $\alpha\cdot\beta$. (Ван дер Варден, § 39 – § 4I ; Ленг, гл. 7, § I, Кострикин, гл. 9, § I)

Б) Если α есть корень многочлена $P(t)=\prod(t-\alpha_i)$, β – корень многочлена $Q(t)=\prod(t-\beta_j)$, то $\alpha\beta$ есть корень многочлена $\prod_{i,j}(t-\alpha_i\beta_j)$, коэффициенты которого целые, так как выражаются через коэффициенты P и Q в силу теоремы о симметрических многочленах. (Курош, § 58)

2. Факториальные кольца. Лемма Гаусса. А) Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами разлагается на множители с рациональными коэффициентами, то он разлагается и на множители с целыми коэффициентами. Б) Доказать однозначность разложения на множители в кольце многочленов от одного переменного с целыми коэффициентами. В) Пусть A – кольцо без делителей нуля с однозначным разложением на множители; тогда то же верно и для кольца $A[x]$ многочленов с коэффициентами в A.

Следствие. В кольце $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ разложение на множители однозначно.

Указание. Лемма. Если $P,Q\in A[x]$, то НОД (коэффициентов PQ) равен НОД (коэффициентов P) · НОД(коэффициентов Q). Пользуясь Леммой, выведите однозначность разложения в $A[x]$ из однозначности разложения в $k[x]$ (k – поле частных кольца A). (Кострикин, стр. 230-23I и стр. 442, Ван дер Варден, § 30)

3. Степень трансцендентности. Доказать, что при $m \neq n$ не существует изоморфизма колец $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]$ и $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, оставляющего $\mathbb{C}$ на месте.

Указания. А) Поля частных этих колец имеют различные степени трансцендентности над $\mathbb{C}$. (Ван дер Варден, §§ 74-75, Ленг, гл.10,§1)
Б) Рассмотрим некоторое конечное множество многочленов $P_1 \dots P_k \in \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$. Для каждого натурального числа r рассмотрим пространство, порожденное элементами вида $P_1^{r_1} \cdot \dots \cdot P_k^{r_k}$ с $r_1,\dots,r_k \le r$.

Размерность этого пространства растет при увеличении r не быстрее, чем $const \cdot r^n$ (независимо от выбора $P_1,\dots P_k$ – от него может зависеть только константа), причем эта оценка является неулучшаемой – показатель не может быть уменьшен. Следовательно, число n – инвариант.

4. Структурная теорема для конечных абелевых групп.
Доказать, что конечная абелева группа – прямая сумма циклических. Сколько существует неизоморфных абелевых групп из 100 элементов?

Указания. (начало у А–Б общее) Конечная абелева группа есть факторгруппа $\mathbb{Z}^n$ по некоторой подгруппе (как говорят, конечнопорождена). Поэтому достаточно доказать, что всякая подгруппа $\mathbb{Z}^n$ при подходящем выборе базиса $e_1 \dots e_n$ в $\mathbb{Z}^n$ порождается элементами $k_1 e_1, \dots, k_n e_n$, где k_i –натуральные числа.

А) Нужный базис ищется так. Рассмотрим всевозможные базисы $f_1 \dots f_n$ в $\mathbb{Z}^n$ и всевозможные линейные комбинации $m_1 f_1 + \dots + m_n f_n$ с целыми коэффициентами, лежащие в подгруппе. Среди них выберем комбинацию с наименьшим возможным $m_1 \geq 1$. Поделив все m_k на m_1 с остатком, можно убедиться, что все m_k кратны m_1, то есть $m_k = l_k m_1$ и $m_1(f_1 + l_2 f_2 \dots + l_n f_n) \in$ подгруппе. В качестве e_1 нужно взять $f_1 + l_2 f_2 + \dots + l_k f_k$. Нетрудно доказать, что подгруппа разлагается в прямую сумму своего пересечения с линейной (целочисленной) оболочкой векторов $f_2, \dots, f_k$ и подгруппы кратных $m_1 e_1$. Осталось применить рассуждение по индукции.

Б) Рассмотрим множество, порождающее подгруппу и разложим его элементы по базису в $\mathbb{Z}^n$. Получим прямоугольную целочисленную "матрицу" (с n строками и , возможно, с бесконечным числом столбцов). Рассмотрим элементарные преобразования таких матриц, то есть перестановки, умножения строк или столбцов на – 1 , а также прибавления к одной строке целого кратного другой. Им отвечают замены базиса в $\mathbb{Z}^n$ и порождающего множества в подгруппе. Среди получающихся таким образом матриц выберем содержащую наименьший положительный элемент. Переставим его в левый верхний угол. Все элементы 1-ой строки и первого столбца делятся на него, иначе элементарными преобразованиями можно получить остаток, который будет меньше его. Таким образом можно везде в I-ой строке и I-м столбце получить нули. Рассуждая аналогичным образом, можно привести матрицу к "диагональному" виду: $\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

Следствие. В Z^n не существует целочисленно независимой системы более чем из n элементов.

В) Пусть G – конечная абелева группа. Расмотрим для каждого простого p множество G_p таких элементов x группы G, что $p^k x=0$ для некоторого k (зависящего от x). Множества G_p при всех простых p являются подгруппами, дающими в прямой сумме G. (В самом деле, если порядок элемента x равен $k=p_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{r_n}$, то положим $q_i=k/p_i^{r_i}$; $q_i x \in G_{p_i}$, $\exists t_1 \ldots t_n \in \mathbb{Z}\ (x = t_1 q_1 x + \ldots + t_n q_n x)$.) Поэтому без ограничения общности можно считать, что $G = G_p$ и, следовательно, порядок любого элемента есть степень p. Пусть a – элемент наибольшего порядка в G, $\mathbb{Z}a$ – подгруппа, им порожденная. Каждый класс в $G/\mathbb{Z}a$ имеет представителя того же порядка, что он сам (докажите). Далее рассуждаем по индукции: если $G/\mathbb{Z}a$ есть ~~прямая~~ сумма циклических подгрупп, порожденных $\bar a_1, \ldots, \bar a_n$, то G есть прямая сумма $\mathbb{Z}a$ и циклических подгрупп, порожденных представителями в G элементов $\bar a_1, \ldots, \bar a_n$ того же порядка, что и они сами. (Кострикин, гл. 7, § 5; упр. 2 на стр. 346; Ленг, гл. I, § I0.)

Г) Этот вариант начинается нак же, как предыдущий и представляет собой его модификацию, близкую к доказательству теоремы о жордановой нормальной форме нильпотентного оператора. Итак, пусть порядок любого элемента есть степень p. Рассмотрим отображение $A: G \to G$, переводящее x в px. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$G = \underset{H^n}{\ker A^n} \xrightarrow{A} \underset{H^{n-1}}{\ker A^{n-1}} \xrightarrow{A} \ldots \xrightarrow{A} \underset{H^1}{\ker A} \xrightarrow{A} \underset{H^0}{0}$$

Она порождает последовательность

$$H^n/H^{n-1} \xrightarrow{\bar A} H^{n-1}/H^{n-2} \to \ldots \to H_1/H^0$$

все гомоморфизмы которой – вложения. В факторгруппах выполнено соотношение $px=0$, и, следовательно, их можно рассматривать как векторные пространства над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Выберем в H^n/H^{n-1} базис $\bar x_1, \ldots, \bar x_k$. Пусть $\bar x_{k+1} \ldots \bar x_l$ дополняют его образ до базиса в H^{n-1}/H^{n-2}. Дополним образы построенных векторов до базиса в H^{n-2}/H^{n-3} и так далее. Представители ~~выбранных~~ $\hat x_1, \ldots, \hat x_k, \ldots \hat x_l \ldots$ элементов $\bar x_1, \ldots, \bar x_k, \ldots, \bar x_l, \ldots$ (являющиеся элементами G) порождают циклические подгруппы, дающие G в прямой сумме.

Доказем это. А) Через них выражается любой элемент H_1, любой элемент H_2 (по модулю H_1) и так далее. Б) Они порождают группы, образующие прямую сумму: если $n_1\hat{x}_1+\dots$ заменим в этом равенстве член $n_1\hat{x}_1$ на члены, содержащие не только $\hat{x}_1$, но также и $p\hat{x}_1, p^2\hat{x}_1, \dots$, зато с коэффициентами, меньшими p; произведя аналогичную операцию со всеми большими p коэффициентами, получим равенство, все коэффициенты которого меньше p. Рассмотрев это равенство в H^n/H^{n-1}, затем в H^{n-1}/H^{n-2} и так далее, получим, что все коэффициенты равны 0.

В доказательствах В и Г порядки получающихся циклических групп – степени простых чисел; впрочем, этого можно добиться без труда, потому что для взаимно простых m и n имеет место изоморфизм: $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

Сходство с доказательством теоремы о жордановой нормальной форме не случайно; именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Конечнопорожденный модуль M над (коммутативным) кольцом главных идеалов изоморфен прямой сумме модулей вида R/pR (p – некоторый элемент кольца R): $M \simeq R/p_1R \oplus \dots \oplus R/p_nR$ Элементы p_i можно выбрать степенями простых.

Доказательство этой теоремы может быть получено модификацией рассуждений В)–Г); если R – евклидово кольцо, то проходит (почти дословно) рассуждение Б). (Ленг, гл. I5, § 2, Ван дер Варден, § 85. В старом издании 2-го тома Ван дер Вардена (I937) имеется обобщение рассуждения типа Б для колец главных идеалов.)

Пусть теперь A – оператор в конечномерном пространстве V над $\mathbb{C}$. Тогда пространство V превращается в $\mathbb{C}[t]$-модуль, если положить $P(t)x = P(A)x$. Из приведенной теоремы легко вывести

СЛЕДСТВИЕ. Оператор A приводится к жордановой нормальной форме. (Ван дер Варден, § 88, Ленг, гл. I5, § 3)

5. Теорема Гильберта о базисе. I. Кольцо $R=\mathbb{Z}[x]$ нётерово: каждый идеал I порождается конечным набором элементов (то есть имеет вид $Ra_1+\dots+Ra_n$, сумма не предполагается прямой). 2. Если коммутативное кольцо R нетерово, то и кольцо $R[x]$ нетерово. Следствие. Кольцо полиномов $k[x_1\dots x_n]$ нетерово.

Указание к 2. Если I – идеал в $R[x]$, следует рассмотреть возрастающую цепь идеалов I_n кольца R, состоящих из коэффициентов при x^n в элементах I и воспользоваться их конечной порожденностью, а также конечной порожденностью их объединения. (Ван дер Варден, § II5, Ленг, гл.6, § 2)

6. Теорема Гильберта о нулях.

Всякий максимальный идеал I в кольце $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$ есть множество всех многочленов, обращающихся в 0 в некоторой точке $\mathbb{C}^n$.

Так как всякий идеал содержится в некотором максимальном (в произвольном кольце доказательство этого требует трансфинитной индукции, в $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$ это следует из нетеровости, см. п. 5), то верно следующее

Следствие. Если многочлены $P_1, \dots, P_k$ не имеют общего корня в $\mathbb{C}^n$, то идеал, ими порожденный, содержит I.

Указания. Прежде всего заметим, что $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]/I$ – поле, содержащее $\mathbb{C}$. В этом поле многочлены идеала I имеют общий корень $(x_1+I, \dots, x_n+I)$. Нам надо доказать, что они имеют общий корень и в $\mathbb{C}$. А) Докажем, что поле $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ совпадает с $\mathbb{C}$. Если элемент x этого поля алгебраичен над $\mathbb{C}$, то он принадлежит $\mathbb{C}$. Если бы некоторой элемент x был бы неалгебраическим над $\mathbb{C}$, то элементы поля $1/(x-\lambda)$, $(\lambda \in \mathbb{C})$ были бы линейно независимой над $\mathbb{C}$ несчетной системой. Это противоречит тому, что $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]/I$ имеет не более чем счетную размерность как векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Б) Как уже отмечалось, многочлены идеала I имеют общий корень в поле $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]/I$; для того, чтобы доказать существование общего корня в $\mathbb{C}$, мы уменьшим это поле и затем вложим уменьшенное поле в $\mathbb{C}$. Рассмотрим систему $P_1, \dots, P_k$ образующих идеала I; пусть k – подполе $\mathbb{C}$, порожденное полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и всеми коэффициентами многочленов $P_1 \dots P_k$. В расширении $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]/I$ поля $\mathbb{C}$ рассмотрим подполе K порожденное k и $x_1, \dots, x_n$. В этом подполе K многочлены $P_1 \dots P_n$ имеют общий корень. Степень трансцендентности K над k конечна, а $\mathbb{C}$ над k – бесконечна, поэтому K вкладывается в $\mathbb{C}$ над k.

В) Мы уже отмечали (см. начало А), что существует расширение P поля $\mathbb{C}$, в котором многочлены идеала I имеют общий корень. Докажем, что если они не имеют его в $\mathbb{C}$, то существует расширение $\mathbb{C}$ сколь угодно большой мощности (следовательно, сколь угодно большой степени трансцендентности), в котором они не имеют общего корня. (Это будет противоречить возможности вложить P в него.) Для этого рассмотрим элементарную теорию поля $\mathbb{C}$ (в языке со всеми комплексными числами как константами), добавим к языку множество T новых констант (произвольной мощности), а к теории все формулы вида $t_1 \neq t_2$ (t_1 и t_2 – различные константы из T). Полученная теория будет непротиворечивой по теореме компактности, так как любое ее конечное подмножество непротиворечиво вследствие бесконечности $\mathbb{C}$. Модель этой теории и будет искомым расширением $\mathbb{C}$.

Д) Достаточно доказать следующий факт: если k - поле, а K - его расширение, являющееся конечнопорожденной алгеброй над k , то K алгебраично над k . Он вытекает из следующей леммы Нётера (Макс Нётер, не смешивать с Э.Нётер, в честь которой названы нетеровы кольца.)

Лемма. Если K - конечнопорожденная алгебра над бесконечным полем k , то существуют такие $y_1, \dots, y_r$, что они алгебраически независимы над k , а $k[y_1,\dots, y_r] \subset K$ - целое расширение колец.

Предположим лемму доказанной. Если K - поле, то $y_1^{-1} \in K$ и является целым над $k[y_1,\dots,y_r]$:

$$(y_1^{-1})^n + \dots (y_1^{-1})^{n-1} + \dots = 0$$

Умножая на y_1^n , получаем, что I + (многочлен от $y_1 \dots y_r$ степени $\geqslant$ I) = 0. Полученное противоречие показывает, что $r = 0$ и K алгебраично над k .

Доказательство леммы Нетера. Индукция по числу n образующих K как алгебры над k . Пусть $x_1, \dots, x_n$ - образующие. Если они алгебраически независимы, то все доказано. Пусть они зависимы и $F(x_1 \dots x_n) = 0$ - многочлен, устанавливающий их зависимость. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ - элементы k (мы выберем их значения позднее); рассмотрим элементы $x_1' = x_1 - \lambda_1 x_n, \dots, x_{n-1}' = x_{n-1} - \lambda_{n-1} x_n$ алгебры K . Они удовлетворяют соотношению

$$F(x_1' + \lambda_1 x_n, \dots, x_{n-1}' + \lambda_{n-1} x_n, x_n) = 0$$

старший член которого относительно x_n имеет коэффициент, равный значению однородной части старшей степени многочлена F на наборе $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)$. Если выбрать такие $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, чтобы этот коэффициент был бы отличен от 0 (а это возможно в силу бесконечности k), то x_n будет целым над подалгеброй $K' = k[x_1', \dots, x_{n-1}']$, к которой можно применить предположение индукции.

7. Алгебра матриц вполне приводима. Пусть V и W - конечномерные векторные пространства над $\mathbb{C}$ и $\varphi : V \to W$ - гомоморфизм алгебр (то есть отображение, являющееся гомоморфизмом колец и одновременно гомоморфизмом векторных пространств). Тогда в V и W можно выбрать базисы, в которых

$$\varphi : A \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} A & 0 & \\ 0 & \boxed{A} & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Указание. Выберем в V базис $e_1, \dots, e_n$. Пусть e_{ij} - оператор, матрица которого имеет I на i, j -ом месте (в остальных местах нули). Так как $e_{ii}^2 = e_{ii}$, операторы $\varphi(e_{ii})$ - проекторы на некоторые подпространства W_i . Имеет место разложение $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n \oplus \bigcap_i \ker \varphi(e_{ii})$; на $\bigcap_i \ker \varphi(e_{ii})$ все операторы из образа φ равны 0. (Воспользуйтесь равенствами $e_{ii}\cdot e_{jj}=0$, $e_{ij}\cdot e_{jj}=e_{ij}\ldots$) Оператор $\varphi(e_{ij})$ переводит W_j в W_i. Искомый базис в W может быть построен так: надо выбрать (как-нибудь) базис в W_1, с помощью $\varphi(e_{i1})$ перенести его во все W_i, а в $\bigcap_i \ker\varphi(e_{ii})$ выбрать базис произвольно.

Следствие I. Всякий ненулевой гомоморфизм $End\, V$ в себя – внутренний, то есть имеет вид: $A\mapsto BAB^{-1}$, где B – некоторый фиксированный оператор.

Если задан гомоморфизм $\varphi: End\, V\to End\, W$, то пространство W можно рассматривать как модуль над алгеброй $End\, V$. Кроме того, заметим, что V есть неприводимый модуль над $End\, V$

Следствие 2. Всякий модуль над кольцом $End\, V$ есть прямая сумма неприводимых подмодулей, изоморфных V.

8. Теорема Бернсайда. Пусть S – подалгебра*) алгебры операторов конечномерного векторного пространства V над полем $\mathbb{C}$. Доказать, что если в V нет нетривиального подпространства, инвариантного относительно всех операторов из S (в этом случае говорят, что V неприводимо относительно S), то S совпадает с алгеброй в с е х операторов в V.

Указания. А) Заметим, что:(I) V неприводимо относительно S тогда и только тогда, когда V^* неприводимо относительно алгебры S^* операторов, сопряженных к элементам S. (Если подпространство инвариантно относительно S, то функционалы, обращающиеся на нем в 0, образуют подпространство, инвариантное относительно S^*); (2) V неприводимо относительно S тогда и только тогда, когда любой ненулевой вектор из V можно перевести в любой другой оператором из S.

Достаточно показать, что все операторы ранга I принадлежат S. Всякий такой оператор L имеет вид $x\mapsto v\cdot f(x)$, где $v\in V$, $f\in V^*$. Если L – фиксированный оператор ранга I, то из (I) и (2) следует, что всякий оператор ранга I представим в виде ALB, где $A,B\in S$. Осталось указать в S оператор ранга I. Пусть Q – оператор из S с образом W, отличным от 0 и от всего V (Почему такие существуют?) Операторы из S, переводящие W в W, образуют подалгебру $S_W\subset End\, W$, относительно которой W неприводимо (Воспользуйтесь свойством (2)). Поэтому по предположению индукции можно считать, что $S_W=End\, W$. Искомый оператор ранга I в S может быть построен как композиция Q с подходящим оператором из $End\, W$. ■

---

*) Подалгеброй называется подпространство, замкнутое относительно умножения; можно для простоты считать, что S содержит I.

Б) Наиболее естественно теорема Бернсайда получается как следствие следующих двух теорем:

Лемма Шура. Если V неприводимо относительно S, то любой оператор, коммутирующий со всеми операторами из S, скалярен. (Указание: образ и собственные подпространства такого оператора инвариантны относительно S.)

Если S - алгебра операторов в пространстве V, обозначим через $S^!$ множество операторов, коммутирующих с каждым оператором из S.

Теорема Джекобсона о плотности. Пусть пространство V есть сумма подпространств, неприводимых относительно S; $v_1, \dots, v_n \in V$ и $A \in (S^!)^!$. Тогда найдется такой $B \in S$, что $Bv_i = Av_i$ для всех i.

В) Этот вариант основан на том, что алгебра S содержит проектор P на некоторое подпространство W, отличное от 0 и от V. Операторы вида PAP образуют подалгебру S_W относительно которой W инвариантно и неприводимо (воспользуйтесь свойством (2) из А) Рассуждая по индукции, мы можем считать, что $S_W = \mathrm{End}\, W$. Аналогичное рассуждение применимо к проектору $1-P$; соответствующее подпространство W' в прямой сумме с W дает V. Итак, все блочно-диагональные матрицы вида $\begin{array}{c|cc} & W & W' \\ \hline W & * & 0 \\ W' & 0 & * \end{array}$ лежат в S. Остается показать, что S содержит все операторы ранга I, переводящие W в W', а W' в 0. Их лег[к]о получить в виде AQA', где $A \in S_W$, $A' \in S_W'$, а Q - любой оператор из S, не переводящий W в себя.

Итак, осталось выбрать в S проектор. Для этого мы используем простейшие свойства вполне приводимых модулей (то есть модулей, являющихся прямой суммой неприводимых). По условию пространство V - неприводимый S - модуль. Рассмотрим $\mathrm{End}\, V$ как S - модуль относительно умножения слева на элементы S. Он изоморфен (как S - модуль) модулю $V \oplus \dots \oplus V$ ($\dim V$ раз) и, следовательно, вполне приводим. Подпространство $S \subset \mathrm{End}\, V$ является S - подмодулем в V следовательно, тоже вполне приводимо. Пусть $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_k$ - его разложение на неприводимые подмодули. (Заметьте, что S_i - левые идеалы). Вырожденный случай, при котором $k = 1$, разбирается легко. Пусть $k > 1$. Каждый элемент S однозначно представляется в виде суммы элементов S_i, в частности, $1 = p_1 + \dots + p_k$. Умножая это равенство на p_i слева, легко видеть, что $p_i^2 = p_i$ при всех i, то есть p_i - проекторы. ∎

Следствие. Конечномерная комплексная алгебра, не содержащая нетривиальных двусторонних идеалов (такие алгебры называют простыми) изоморфна алгебре матриц.

Указание. Постройте гомоморфизм этой алгебры в алгебру эндоморфизмов какого-нибудь пространства и выберите в этом

Приложение. Еще одно доказательство теоремы Гильберта о нулях.

Это доказательство использует лишь элементарные свойства многочленов. Достаточно доказать, что система полиномиальных уравнений имеет корень в алгебраически замкнутом поле, если она имеет корень в его расширении. Оказывается, что свойство системы иметь решение в алгебраичесси замкнутом поле может быть выражено только на языке ее коэффициентов и потому не зависит от того, в каком поле ищется корень. Это вытекает из более общего факта:

Рассмотрим совокупность $(*)$ нескольких систем уравнений и неравенств вида
$$\begin{cases} P_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots \\ Q_1(x_1,\dots,x_n)\neq 0 \\ \dots \end{cases}$$

Тогда можно построить такую новую совокупность $(**)$ систем полиномиальных уравнений и неравенств на коэффициенты исходной совокупности $(*)$, что $(*)$ имеет решение в алгебраически замкнутом поле тогда и только тогда, когда ее коэффициенты являются решениями $(**)$. При этом многочлены входящие в $(**)$ имеют целые коэффициенты. /Более точную формулировку см. ниже/

Доказательство. Индукцией по числу n переменных $x_1,\dots,x_n$ все сводится к случаю одной переменной x. Ясно также, что достаточно рассмотреть совокупность, состоящую из одной системы вида
$$P_1(x)=ax^k+\dots=0,\ P_2(x)=bx^l+\dots=0,\dots,\ P_s(x)=0;\ Q(x)\neq 0,$$
где $k\le l\le\dots$.

Проведем индукцию по $N=\deg P_1+\dots+\deg P_s$. Рассмотрим отдельно случай $a=0$ и случай $a\neq 0$, точнее, рассмотрим систему $(*)$ как совокупность двух систем $\{*;\ a=0\}$ и $\{*;\ a\neq 0\}$. Если $a=0$, то из $P_1(x)$ можно выкинуть ax^k /то есть уменьшить N/ и применить предположение индукции. Если $a\neq 0$ и $s\geqslant 2$, то число N можно уменьшить, заменив уравнения $P_1(x)=0$, $P_2(x)=0$ на $P_1(x)=0$, $aP_2(x)-b\cdot x^{l-k}\cdot P_1(x)=0$.
Случай $a\neq 0$ и $s=1$. Заметим, что в алгебраически замкнутом поле система $\begin{cases}P(x)=0\\ Q(x)\neq 0\end{cases}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $Q^{\deg P}$ не делится на P. Докажите индукцией по $\dim R$, что свойство "R делится на P" равносильно полиномиальным условиям на коэффициенты многочленов $R(x)$ и $P(x)$. □

Замечание. На самом деле высказанное выше утверждение сформулировано не вполне корректно. Точная формулировка его такова: /случай одной переменной/
Пусть дана совокупность $(*)$ систем уравнений и нер-в вида $P(a_1,\dots,a_n,x)=0$, где $P\in\mathbb{Z}[a_1,\dots,a_n,x]$.
Тогда можно указать такую совокупность $(**)$ систем уравнений вида $Q(a_1,\dots,a_n)=0$ или $\neq 0$, где $Q\in\mathbb{Z}[a_1,\dots,a_n]$, что для любого алгебраически замкнутого поля k и для любых $a_1,\dots,a_n\in k$ условия

а/ $(a_1,\dots,a_n)$ удовлетворяют $(**)$

б/ существует такое $x\in k$, что $(a_1,\dots,a_n,x)$ удовлетворяют $(*)$

рвносильны.

Ан 47

Тензорное произведение

Мотивировки.

При изучении геометрических свойств множества (например, топологического пространства, многообразия и т.п.) X средствами алгебры и анализа удобно забыть о самом множестве, а помнить лишь об алгебре F (X) функций на нем (непрерывных, гладких и т.п.).

Вопрос: пусть X и Y – множества. Как в терминах пространств F (X) и F (Y) описать пространство F (X×Y) ?

Пространство F (X×Y) естественно "строить" так: если f – функция на X, а g – функция на Y, то можно определить функцию $f\otimes g$ на X×Y, полагая $f\otimes g\colon (x,y) \longmapsto f(x)\cdot g(y)$ ($f\otimes g$ не есть обычное произведение, так как функции f и g зависят от разных аргументов!). Однако функции вида $f\otimes g$ не исчерпывают всех функций на X×Y, так как, вообще говоря, сумму функций такого вида нельзя представить в виде $f\otimes g$. Поэтому необходимо рассмотреть всевозможные суммы

$$f_1(x)\times g_1(y) + f_2(x)\times g_2(y) + \ldots + f_k(x)\times g_k(y).$$

Множество таких сумм, очевидно, замкнуто относительно сложения и умножения. Получившуюся алгебру обозначают $F(X)\otimes F(Y)$ и называют тензорным произведением алгебр F (X) и F (Y).

Совпадает ли эта алгебра с алгеброй всех функций на X×Y? Вообще говоря, нет, однако легко видеть, что если хотя бы одно из множеств X и Y конечно (заметьте, что конечность X равносильна конечномерности F (X)), то $F(X\times Y) = F(X)\otimes F(Y)$. В общем случае $F(X)\otimes F(Y)$, хотя и не совпадает с F (X×Y), но обычно образует в нем плотное (в какой-нибудь естественной топологии) подмножество.

Пример. Пусть X,Y – метрические пространства, а F (X) и F (Y) – кольца непрерывных функций на них. Тогда элементы $F(X)\otimes F(Y)$ разделяют точки X×Y. В частности, если X и Y компактны, то по теореме Стоуна – Вейерштрасса $F(X)\otimes F(Y)$ плотно в F (X×Y) в топологии равномерной сходимости.

Следствие. Пусть μ и ν – борелевские меры на X и Y соответственно. Тогда для непрерывных функций на X Y равны повторные интегралы

$$\int\left[\int f(x,y)\,d\nu(y)\right]d\mu(x) = \int\left[\int f(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y).$$

В самом деле, для функций из $F(X)\otimes F(Y)$ это очевидно. Общий случай вытекает из плотности этих функций и непрерывности интеграла.

Вернемся к случаю конечных множеств X,Y. Имеется каноническое соответствие между линейными функционалами на F (X×Y) и билинейными формами на F (X) × F (Y). В самом деле, всякая линейная форма на F (X×Y) имеет вид $\Phi \mapsto \sum K(x,y)\,\Phi(x,y)$. Такому функционалу отвечает билинейная форма $\langle f, g\rangle \to \sum K(x,y)\, f(x)\, g(y)$. Обратно, легко видеть, что всякую билинейную форму на F(X)×F(Y) можно записать таким образом. На языке тензорных произведений этот факт допускает следующую интерпретацию. Заметим, что отображение $\langle f, g\rangle \to f\otimes g$ билинейно. Утверждается, что всякая билинейная форма на F(X)×F(Y) есть композиция "универсального" билинейного отображения $\otimes$ и некоторого линейного отображения.

Ал 48

Определение тензорного произведения.

Пусть V, W – произвольные векторные пространства. Мы построим сейчас векторное пространство $V\otimes W$ и билинейное отображение $V\times W \xrightarrow{\otimes} V\otimes W$, обладающее следующим свойством "универсальности": для любого билинейного отображения $V\times W$ в произвольное пространство E существует единственное линейное отображение $V\otimes W \to E$, делающее диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} V\otimes W \arrow[rr, dashed] & & E \\ & V\times W \arrow[ul, "\otimes"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(Из этого свойства вытекает, что пространство билинейных отображений из $V\times W$ в E изоморфно пространству линейных отображений $V\otimes W$ в E. В частности, пространство билинейных форм на $V\times W$ изоморфно пространству, сопряженному к $V\otimes W$.) Пространство $V\otimes W$ называется тензорным произведением пространств V и W.

Замечание. Пара (пространство, отображение), обладающие указанным свойством, единственны (с точностью до замены $V\otimes W$ на изоморфное пространство и соответствующего изменения отображения $\otimes$): если имеются две пары $V\times W \to S_1$ и $V\times W \to S_2$ с этим свойством, то в силу определения существуют

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[rr, "u"] & & S_2 \\ & V\times W \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S_2 \arrow[rr, "v"] & & S_1 \\ & V\times W \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

отображения $u : S_1 \to S_2$ и $v : S_2 \to S_1$, делающие диаграммы коммутативными. Остается показать, что u и v взаимно обратны. В самом деле, их композиция делает диаграмму коммутативной. Другое отображение, делающее эту же диаграмму коммутативной – тождественное. Остается воспользоваться свойством единственности, входящим в определение тензорного произведения.

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[rr, "v\circ u"] & & S_1 \\ & V\times W \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Построение тензорного произведения.

1. Введем вспомогательное (бесконечномерное) пространство $V*W$, базисом которого являются всевозможные пары (v, w), где $v\in V$, $w\in W$. Вместо (v, w) удобно писать $v*w$; таким образом, элементы $V*W$ суть формальные линейные комбинации вида $\lambda_1(v_1*w_1) +\ldots+ \lambda_k(v_k*w_k)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. (Внимание: $2(v*w)$ не равно $(2v)*w$!)

Лемма 1. Пространство всех функций на V W со значениями в линейном пространстве E изоморфно пространству всех линейных отображений $V*W$ в E.

Действительно, линейная функция определяется своими значениями на базисе, которые могут быть выбраны произвольно.

2. Определим в $V*W$ подпространство N, порожденное всевозможными элементами вида

(а) $(v_1 + v_2) * w - v_1 * w - v_2 * w$

(б) $v * (w_1 + w_2) - v * w_1 - v * w_2$

(в) $\lambda(v * w) - (\lambda v) * w$

(г) $\lambda(v * w) - v * (\lambda w)$.

Лемма 2. При изоморфизме леммы 1 билинейные функции на $V*W$ переходят в линейные функции, аннулирующие N.

3. Наконец, положим $V\otimes W = V*W/N$; обозначим через $v\otimes w$ образ элемента $v*w \in V*W$ в $V\otimes W$. Таким образом, всякий элемент $V\otimes W$ имеет вид суммы $\lambda_1 v_1\otimes w_1 +\ldots+ \lambda_k v_k\otimes w_k$, где $v_i \in V$, $w_i\in W$, однако запись элемента в таком виде не однозначна; более того, эта сумма может оказаться равной нулю. Неформально можно считать, что пространство $V\otimes W$ состоит из всевозможных сумм указанного вида с очевидными правилами

Ал 49

сложения и умножения на число, причем две суммы считаются равными, если одну из них можно преобразовать в другую, используя билинейность тензорного произведения. (Например, можно заменить $v \otimes w$ на $(v + z) \otimes w - z \otimes w$.)

Проверим, что построенные пространство и отображение обладают требуемыми свойствами. Композиция $V \times W \to V*W \to V*W/N = V \otimes W$ есть билинейное отображение, поскольку мы включили элементы вида (а) – (г) в подпространство N. Свойство универсальности следует из того, что для всякой функции из $V \times W$ в какое-то линейное пространство E существует единственный линейный оператор $V*W \to E$, замыкающий диаграмму, и из того, что этот оператор пропускается через фактор-пространство $V*W/N$ (аннулирует N) тогда и только тогда, когда исходное отображение было билинейно.

$$\begin{tikzcd} & V*W \arrow[r] \arrow[d, dashed] & V*W/N \arrow[dl, dashed] \\ V \times W \arrow[ur] \arrow[r] & E & \end{tikzcd}$$

Основные теоремы.

Теорема 1. Если v_i – базис V, а w_j – базис W, то набор $v_i \otimes w_j$ образует базис в $V \otimes W$.

Теорема 2. Если V и W конечномерны, то тензорное произведение сопряженных пространств V^* и W^* изоморфно пространству билинейных форм на $V \times W$; при этом изоморфизме элемент $\varphi \otimes \psi \in (V^*) \otimes (W^*)$ переходит в билинейную форму $\langle v, w \rangle \to \varphi(v) \psi(w)$.

Теорема 3. (Дистрибутивность). $V \otimes (W_1 \oplus W_2)$ канонически изоморфно $V \otimes W_1 \oplus V \times W_2$.

Следствие 1. $\dim (V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$.

Это вытекает из теоремы 1. Впрочем, это можно получить и непосредственно из определения, так как пространство линейных функционалов на $V \otimes W$, имеющее ту же размерность, что и $V \otimes W$, изоморфно пространству билинейных форм на $V \times W$, имеющему размерность $\dim V \cdot \dim W$.

Следствие 2. Если V и W конечномерны, то пространства $V^* \otimes W^*$ и $(V \otimes W)^*$ изоморфны. Изоморфизм i определяется равенством $\langle i(v^* \otimes w^*), v \otimes w \rangle = \langle v^*, v \rangle \langle w^*, w \rangle$ (угловые скобки означают спаривание элементов пространства и сопряженного к нему).

В самом деле, искомый изоморфизм есть композиция изоморфизмов $(V^*) \otimes (W^*) \to$ (билинейные формы на $V \times W$) $\to (V \otimes W)^*$, первый из которых строится по теореме 2, а второй – по определению тензорного произведения.

Замечание. Заменяя в теореме 2 пространства на сопряженные, получаем, что $V \otimes W$ изоморфно пространству билинейных форм на $V^* \times W^*$. Поэтому иногда определяют тензорное произведение как пространство билинейных форм на произведении сопряженных пространств. Это определение пригодно только для конечномерных пространств.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\lambda_1 x_1 \otimes y_1 + \ldots + \lambda_k x_k \otimes y_k$ – произвольный элемент тензорного произведения пространств V и W. Выражая все x_i и y_i через базисные вектора и пользуясь билинейностью тензорного произведения, выражаем его в виде линейной комбинации векторов $v_i \otimes w_j$. Таким образом, через эти вектора все выражается и остается доказать их независимость. Покажем, что если сумма $\sum c_{ij} v_i \otimes w_j$ (c_{ij} – числа) равна 0, то все c_{ij} равны 0. Для этого рассмотрим на $V \times W$

Ал 50

билинейную форму $B_{k\ell}$: $B_{k\ell}(v, w)$ = (k-ая координата v)·(l-я координата w). Эта форма в силу определения тензорного произведения порождает линейный функционал на $V \otimes W$ (обозначим его также $B_{k\ell}$). Имеем $B_{k\ell}(\sum c_{ij}\ v_i\ w_j) = \sum c_{ij}$(k-ая координата v_i)(l-ая координата w_j) $= c_{k\ell}$. Отсюда вытекает, что если сумма равна 0, то все её коэффициенты равны 0. Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Построим билинейное отображение $V^* \otimes W^*$ в пространство $L(V, W, \mathbb{R})$ билинейных форм на $V \times W$, сопоставив с парой $\langle \varphi, \psi \rangle$ линейных форм билинейную форму $B_{\varphi\psi}(v, w) = \langle \varphi, v\rangle \langle \psi, w\rangle$. Согласно определению тензорного произведения, мы получаем из этого билинейного отображения линейное отображение $V^* \otimes W^*$ в $L(V, W, \mathbb{R})$. Чтобы установить, что мы получили изоморфизм, выпишем его вид в координатах. Выберем в сопряженных пространствах сопряженные базисы; легко проверить, что базису в тензорном произведении сопряженных пространств, состоящему из тензорных произведений элементов сопряженных базисов, соответствует базис в пространстве билинейных форм, состоящий из форм, матрицы которых имеют единицу в одном месте и нули во всех остальных. Теорема 2 доказана.

Тензорное произведение операторов.

Пусть $A : V_1 \to V_2$ и $B : W_1 \to W_2$ – линейные операторы. Мы хотим определить линейный оператор $A \otimes B : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ так, чтобы он отображал $v \otimes w$ в $Av \otimes Bw$. Если такой оператор существует, то этим условием он определяется однозначно. Однако его существование нуждается в доказательстве: оно равносильно тому, что из равенства $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i = 0$ следует равенство $\sum \lambda_i Ax_i \otimes By_i = 0$, что не так уж и очевидно. Для доказательства воспользуемся свойством универсальности: отображение $\langle v_1, w_1 \rangle \to Av_1 \otimes Bw_1$ является билинейным отображением $V_1 \times W_1$ в $V_2 \otimes W_2$ и поэтому "пропускается" через $V_1 \otimes W_1$.

Используя понятие тензорного произведения операторов, легко доказать теорему 3. Именно, пусть i_1 и i_2 – естественные вложения W_1 и W_2 в $W_1 \oplus W_2$, а π_1 и π_2 – естественные проекции $W_1 \oplus W_2$ на W_1 и W_2. Умножая их на тождественное отображение пространства V на себя, получаем отображения

$$V \otimes W_{1,2} \underset{1 \otimes \pi_{1,2}}{\overset{1 \otimes i_{1,2}}{\rightleftarrows}} V \otimes (W_1 \oplus W_2)$$

Рассмотрим теперь отображения

$$V \otimes W_1 \oplus V \otimes W_2 \underset{1 \otimes \pi_1 \oplus 1 \otimes \pi_2}{\overset{1 \otimes i_1 + 1 \otimes i_2}{\rightleftarrows}} V \otimes (W_1 \oplus W_2)$$

Легко проверить (на элементах вида $v \otimes w$), что эти отображения взаимно обратны, и, следовательно, являются изоморфизмами.

Ап 51

Тензорное произведение (задачи).

I. Докажите, что $L(V_1, L(V_2, W)) \cong B(V_1 \times V_2, W) \cong L(V_1 \otimes V_2, W)$.

2. Пусть $A \in L(V,V), B \in L(W,W)$. Найти $\det A \otimes B$.

3. В каком случае всякий элемент $V \otimes W$ имеет вид $v \otimes w$ $(v \in V, w \in W)$?

4. Если $A: V_1 \to V_2$ – вложение (наложение), то $A \otimes 1$ также является вложением (наложением). ($A \otimes 1: V_1 \otimes W \to V_2 \otimes W$).

5. Говорят, что последовательность $V_1 \xrightarrow{A_1} V_2 \xrightarrow{A_2} \dots \to V_n$ точна, если $\operatorname{im} A_i = \ker A_{i+1}$ при всех i (в частности, $A_{i+1} \circ A_i = 0$).

а) Что означает точность последовательности $0 \to V \to W$?

б) Что означает точность последовательности $V \to W \to 0$?

в) Пусть последовательность $0 \to V_1 \to \dots \to V_n \to 0$ точна. Тогда:

(I) $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$ (формула Эйлера).

(2) при естественно определяемых гомоморфизмах точны последовательности $0 \leftarrow V_1' \leftarrow V_2' \leftarrow \dots \leftarrow V_n' \leftarrow 0$,

$0 \to L(W, V_1) \to \dots \to L(W, V_n) \to 0$, $0 \leftarrow L(V_1, W) \leftarrow \dots \leftarrow L(W_n, V) \leftarrow 0$,

$0 \to V_1 \otimes W \to \dots \to V_n \otimes W \to 0$.

6. Рассмотрим цепь изоморфизмов $L(V,V)' \cong (V \otimes V')' \cong B(V \times V', \mathbb{R}) \cong L(V, V'') \cong L(V,V)$. и единичный оператор в $L(V,V)$. Что соответствует ему в других пространствах?

7. Пусть e_i – базис в V, e^i – сопряженный базис в V'. Рассмотрим в $V \otimes V'$ элемент $\sum e_i \otimes e^i$. Докажите, что этот элемент не зависит от выбора базиса. (Указание. $V \otimes V' = L(V,V)$.)

8. Тензорное произведение можно определить для абелевых групп, считая в аксиоме $v \otimes \lambda w = \lambda v \otimes w$, что $\lambda \in \mathbb{Z}$. Однако получается капризное понятие: проверьте, что $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$, если m и n взаимно просты.

9. Пусть A и B – алгебры с единицей над $\mathbb{R}$. Введите в пространстве $A \otimes B$ структуру алгебры с единицей. Постройте вложение $A \to A \otimes B$.

I0. Постройте изоморфизм $L(V \otimes W, V \otimes W) \cong L(V,V) \otimes L(W,W)$. Проверьте, что это изоморфизм алгебр. (Указание. Используйте, что $(L(V,V) \otimes 1)^! = 1 \otimes L(W,W)$)

II. Докажите I0, используя изоморфность $L(V,V)$ и $V \otimes V'$.

I2. Пространство $V' \otimes V$ изоморфно своему сопряженному: $(V' \otimes V)' \cong V'' \otimes V' \cong V \otimes V' \cong V' \otimes V$ Как описать этот изоморфизм, если отождествить $V' \otimes V$ с $L(V,V)$?

I3. Опишите алгебры: (а) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (б) $\mathrm{Mat}_k(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Mat}_l(\mathbb{R})$.

I4. Пусть V и W – вещественные евклидовы пространства. Введите на $V \otimes W$ евклидову структуру так, чтобы для любых изометрий U_1, U_2 в V и W оператор $U_1 \otimes U_2$ был бы изометрией $V \otimes W$.

I5. (Продолжение.) Пусть V – евклидово пространство, тогда V' тоже имеет естественную евклидову структуру. В силу I4 пространство $V \otimes V'$ становится евклидовым. Но $V' \otimes V$ изоморфно $L(V,V)$. Чему равно скалярное произведение двух операторов?

ТЕНЗОРЫ /Задачи/.

I. Докажите, что если V - пространство над $\mathbb{R}$, то $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}} V \simeq V$

2. Пусть $A\in\mathcal{L}(V,V)$, $B\in\mathcal{L}(W,W)$. Докажите, что многочлены $\det(x\cdot 1 - A)$ и $\det(x\cdot 1 - B)$ взаимно просты тттк оператор $A\otimes 1_W - 1_V\otimes B : V\otimes W \longrightarrow V\otimes W$ невырожден. /Указание: тензорное произведение треугольных матриц - треугольная матрица/.

3. Докажите, что "свёртка" $\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_n$, $x_1\otimes\ldots\otimes x_n \mapsto \varphi_1(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(x_n)$ определяет билинейную форму $B: T^n(V^*)\times T^n(V)\longrightarrow\mathbb{R}$. Докажите, что эта форма задаёт изоморфизм $T^n(V)^*\simeq T^n(V^*)$.

4. Пусть σ - перестановка чисел $\{1,2,\ldots,n\}$. Рассмотрим соответствующее отображение $T_\sigma : x_1\otimes\ldots\otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma(n)}$ пространства $T^n(V)$ в себя. Аналогично определим отображение $T^*_\sigma : T^n(V^*)\longrightarrow T^n(V^*)$. Пусть $x\in T^n(V)$ и $y\in T^n(V^*)$. Верно ли, что $B(y, T_\sigma x) = B(T^*_\sigma y, x)$?/ B - форма из задачи 3/.

5. Пусть $\omega = x_1\wedge\ldots\wedge x_k\in\Lambda^k(V)$. Опишите все те операторы $A\in GL(V)$, которые сохраняют ω, т.е. те операторы, для которых $(\Lambda^k A)(\omega)=\omega$ /Здесь $\Lambda^k A : \Lambda^k V\longrightarrow\Lambda^k V$ - оператор, переводящий $x_1\wedge\ldots\wedge x_k$ в $Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_k$ /.

6. Пусть векторы $x_1,\ldots,x_p\in V$ независимы и векторы $y_1,\ldots, y_p$ - любые из V.

а/. Если $x_1\wedge y_1+\ldots+x_p\wedge y_p=0$ в $\Lambda^2(V)$, то найдётся такая симметрическая матрица a_{ij}, что $y_i=\sum a_{ij}x_j$

б/. Если $\sum x_i y_i = 0$ в $S^2(V)$, то найдётся такая кососимметрическая матрица a_{ij}, что $y_i=\sum a_{ij}x_j$.

7. Пусть $Sym(V)$ и $Alt(V)$ подпространства симметрических и кососимметрических тензоров $\boxed{\text{в } T(V)}$. Доказать, что

а/. $Sym(V)\cap Alt(V)=0$;

б/. $Sym^2(V)\oplus Alt^2(V)=T^2(V)$;

в/. $Sym^3(V)\oplus Alt^3(V)\neq T^3(V)$.

8. Пусть $\dim V=n$. Найти $\dim S^k(V)$.

9. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ - скалярное произведение на V. Алгеброй Клиффорда называется факторалгебра $K(V)=T(V)/x\otimes y+y\otimes x+\langle x,y\rangle\cdot 1$, $x,y\in V$

а/. Какова размерность $K(V)$?

б/. Докажите, что в $K(\mathbb{R}^2)$ /в $\mathbb{R}^2$ - стандартное скалярное произведение/ любой ненулевой элемент обратим.

10. Докажите, что $S^n(V)$ порождается элементами вида ξ^n, $\xi\in V$. Докажите это двумя способами:

а/. Используя изоморфизм $S^n(V)^*\simeq S^n(V^*)$, покажите, что любой функционал на $S^n(V)$, равный 0 на всех ξ^n, нулевой.

б/. Представьте $\xi_1\cdot\ldots\cdot\xi_n$ в виде комбинации η^n, используя выражение

$$(\lambda_1\cdot\xi_1+\ldots+\lambda_n\cdot\xi_n)^n.$$

Ал 53

11.Докажите, что для $A \in \mathcal{L}(V,V)$ верно

а/. $\det(1+A) = \sum_{k\geq 0} tr(\Lambda^k A)$ /Определение $\Lambda^k A$ см. в задаче 6, определение $S^k A$ даётся аналогично./

б/.Если рассмотреть формальные ряды $s(t) = \sum t^i \cdot tr(S^i A)$ и $\lambda(t) = \sum t^i \cdot tr(\Lambda^i A)$, то $s(t)\cdot\lambda(-t) = 1$.

12.Пусть $\omega \in \Lambda(V)$; обозначим через $Ann\,\omega$ множество $\{x \in V \mid x \wedge \omega = 0\}$. Это – некоторое подпространство V. Пусть ω_1 и ω_2 разложимые элементы $\Lambda(V)$. /ω разложим, если $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$, где $x_i \in V$ / докажите, что:

а/. $Ann\,\omega_1 \supset Ann\,\omega_2 \iff \exists\omega : \omega_1 = \omega \wedge \omega_2$

б/. $Ann\,\omega_1 \cap Ann\,\omega_2 = 0 \iff \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$

в/. $Ann\,\omega_1 \cap Ann\,\omega_2 = 0 \Rightarrow Ann(\omega_1 \wedge \omega_2) = Ann\,\omega_1 \oplus Ann\,\omega_2$.

13.Докажите, что ненулевой p -вектор ω разложим тттк $\dim Ann\,\omega = p$.

14.Пусть $Gr_k(V)$ – множество k -мерных подпространств в V. Построим вложение α $Gr_k(V)$ в множество $P(\Lambda^k V)$ одномерных подпространств в $\Lambda^k V$, считая, что пространство $\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ натянутое на $x_1, \ldots, x_k$, переходит в прямую, порождённую $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$;

а/. докажите, что определение не зависит от выбора $x_1, \ldots, x_k$ и что α – вл[illegible]ение $Gr_k(V) \hookrightarrow P(\Lambda^k V)$.

б/.Пусть $V = \mathbb{R}^n$ и вектор x_i имеет координаты $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}$. Тогда координаты направляющего вектора прямой $\alpha(\langle x_1, \ldots, x_k\rangle)$ равны /в стандартном базисе $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$/ минорам k -ого порядка матрицы $\begin{Vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{k1} & \ldots & x_{kn} \end{Vmatrix}$ /их как раз C_n^k штук!/

15. /продолжение/ Пусть $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ коэффициент ω при базисном векторе $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ /при $i_1 < \ldots < i_k$ /; по определению будем считать, что $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ меняет знак при перестановке любых двух индексов и что $\omega_{i_1 \ldots i_k} = 0$, если среди индексов есть совпадающие/. Докажите, что если ω разложим /т.е. $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$ /, то числа $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ удовлетворяют системе уравнений

(*) $$\omega_{i_1 \ldots i_k} \cdot \omega_{j_1 \ldots j_k} = \sum_{r=1}^{k} \omega_{i_1 \ldots i_{k-1} j_r} \cdot \omega_{j_1 \ldots j_{r-1} i_k j_{r+1} \ldots j_k}$$

16. /продолжение/Докажите, что, наоборот, если координаты $\omega \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$ удовлетворяют системе уравнений (*), то ω разложим.

<u>Указание.</u> ω – разложим $\iff \dim Ann\,\omega = k$. Линейная система $\omega \wedge x = 0$ /относительно неизвестных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ / имеет k -мерное пространство решений тттк ранг матрицы этой системы не больше $n-k$. Таким образом $\omega \in im\,\alpha \iff$ все миноры /матрицы системы/ порядка $n-k+1$ равны 0. Эти условия совпадают с (*).

I7. Установите изоморфизм $S(V\oplus W)\simeq S(V)\otimes S(W)$, и аналогичные для $T(V)$ и $\Lambda(V)$.

I8. Отождествите $\Lambda^k(V^*)$ с $[\Lambda^k(V)]^*$. Чему равно значение на $x_1\wedge\ldots\wedge x_k$ функционала из $[\Lambda^k(V)]^*$, соответствующего элементу $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\in\Lambda^k(V^*)$?

I9. Пусть V - евклидово пространство. Введите скалярное произведение в $\Lambda^k(V)$.

а/. Чему равно скалярное произведение $x_1\wedge\ldots\wedge x_k$ и $y_1\wedge\ldots\wedge y_k$?

б/. Докажите, что геометрический смысл этого произведения таков: скалярное произведение $x_1\wedge\ldots\wedge x_k$ и $y_1\wedge\ldots\wedge y_k$ есть объём параллелепипеда, натянутого на $x_1,\ldots,x_k$, умноженный на объём проекции на подпространство $\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$ параллелепипеда, натянутого на $y_1,\ldots,y_k$.

20. Пусть $e_1,\ldots,e_{2n}$ - базис пространства V. Рассмотрим оператор $\Omega:\Lambda^kV\longrightarrow\Lambda^{k+2}V$, $\tau\longmapsto\tau\wedge(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4+\ldots+e_{2n-1}\wedge e_{2n})$. Докажите, что он инъективен, если $\dim(\Lambda^kV)\leq\dim(\Lambda^{k+2}V)$ и сюръективен, если $\dim(\Lambda^kV)\geqslant\dim(\Lambda^{k+2}V)$.

Указание. Обобщите утверждение на оператор Ω^m.

2I. Рассмотрим на $\mathcal{L}(V,V)$ квадратичную форму $\alpha(A)=\operatorname{tr}(\Lambda^2A)$. Постройте соответствующую билинейную форму $\alpha(A_1,A_2)$. Аналогичным образом постройте полилинейную форму $\alpha(A_1,\ldots,A_n)$, для которой $\alpha(A,A,\ldots,A)=\operatorname{tr}(\Lambda^nA)$.

КВАТЕРНИОНЫ И ВРАЩЕНИЯ.

Несмотря на то, что мы живём в трёхмерном пространстве, наше пространственное воображение весьма ограничено. Например, если мы поворачиваем тело сначала вокруг одной оси, а затем-вокруг другой, то не так уж ясно, что того же можно добиться, поворачивая тело вокруг какой-то третьей оси. Кватернионы были придуманы Гамильтоном с целью заменить геометрическое воображение довольно механическими вычислениями.

Как известно, комплексные числа можно определить как вещественные 2х2 матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Кольцо кватернионов $\mathbb{H}$ определяется аналогично, как кольцо комплексных матриц вида $x=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Комплексное сопряжение второй строки делается с целью получить формулу $\det x = \det\begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = |a|^2+|b|^2$.
Выделяя в a и b вещественные и мнимые части, видим, что $\mathbb{H}$ состоит из матриц вида $x=\begin{vmatrix} x_0+ix_1 & -x_3+ix_2 \\ x_3+ix_2 & x_0-ix_1 \end{vmatrix}$, $x_0,\dots,x_3 \in \mathbb{R}$
Таким образом $\mathbb{H}$ – четырёхмерное вещественное пространство с базисом $1=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $i=\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}$, $j=\begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}$, $k=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$,
так что $x=x_0+x_1\cdot i+x_2\cdot j+x_3\cdot k$. Матрицы i, j, k называются матрицами Паули; они удовлетворяют соотношениям $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$ и всем циклическим перестановкам второго соотношения. Из этих соотношений вытекает, что подпространство $\mathbb{H}$ замкнуто относительно умножения матриц, и образует тем самым кольцо /алгебру над $\mathbb{R}$ /. Видно, что матрицы i, j, k косоэрмитовы: $i^*=-i$, $j^*=-j$, $k^*=-k$, поэтому $\mathbb{H}$ устойчиво также относительно операции сопряжения матриц.

Имеют место соотношения $\det x = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $tr\, x = 2x_0$, $x^*=x_0-x_1 i-x_2 j-x_3 k$. По традиции величину $\det$ обозначают $|x|^2$ и называют квадратом нормы кватерниона, а кватернион x^* называют сопряжённым к x. Легко проверить, что I/ $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, 2/ $|x|\geqslant 0$ и $|x|=0 \Longrightarrow x=0$
3/ $(x\cdot y)^*=y^*\cdot x^*$ /порядок меняется!/. Норма кватерниона, очевидно, совпадает с нормой в $\mathbb{R}^4$ вектора его координат в базисе 1, i, j, k.

Элементарные алгебраические свойства.

а/ Комплексификацию $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ можно отждествить с пространством матриц вида $x=x_0+x_1 i+x_2 j+x_3 k$, где x_i принимают комплексные значения. Легко проверить, что матрицы такого вида заполняют пространство всех комплексных 2х2 матриц, т.е. $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}=M_2(\mathbb{C})$.
б/ Центр алгебры кватернионов состоит из скалярных кватернионов: если $x=x_0+x_1 i+x_2 j+x_3 k$ коммутирует, например, с i, то $x_2=x_3=0$ и т.п.

в/ Если $x \in \mathbb{H}$, то матрица $xx^* \in \mathbb{H}$ самосопряжена $/(xx^*)^* = x^{**}x^* = xx^*$ /. Каждый самосопряжённый кватернион скалярен, так что xx^* - скаляр. Простое вычисление показывает, что $xx^* = x^*x = |x|^2 = \det x$.

г/ Если $x \neq 0$, то $|x| \neq 0$ и кватернион $x^{-1} = 1/|x|^2 \cdot x^*$ является обратным к x. Таким образом, $\mathbb{H}$ - тело.

д/ Можно показать, что если A - конечномерная алгебра над $\mathbb{R}$, каждый ненулевой элемент которой обратим, то A есть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

е/ Алгебру кватернионов можно определить по-другому - как алгебру Клиффорда над евклидовым пространством $\mathbb{R}^2$, т.е. как фактор тензорной алгебры $T(\mathbb{R}^2)$ по соотношению $\xi \otimes \xi + \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^2$.

ж/ Норма $|\cdot|$ порождается скалярным произведением $(x, y) = \frac{1}{2}(xy^* + yx^*)$. При отождествлении $\mathbb{H}$ с $\mathbb{R}^4$ это скалярное произведение переходит в стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$.

з/ Очевидно, поле $\mathbb{C}$ вкладывается в $\mathbb{H}$ $/ x+yi \mapsto x+yi+0\cdot j+0\cdot k$ /. Будет ли $\mathbb{H}$ алгеброй над $\mathbb{C}$?

<u>Скалярная и векторная части.</u>

Число x_0 называется скалярной, а вектор в $\mathbb{R}^3$ с координатами x_1, x_2, x_3 векторной частью кватерниона $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Скалярную часть кватерниона x будем обозначать $x_{ск\lambda}$ или $\mathrm{Re}\,x$. Рассмотренное скалярное произведение теперь можно записать в виде $(x, y) = \mathrm{Re}(xy^*)$. Отождествим $\mathbb{R}^3$ с евклидовым пространством $\mathbb{H}_{вект}$ кватернионов с нулевой скалярной частью. Принадлежность элемента пространству $\mathbb{H}_{вект}$ равносильна любому из условий: а/ $x_0 = 0$, б/ $\mathrm{tr}\, x = 0$, в/ $x^* = -x$.

Если $x, y \in \mathbb{H}_{вект}$, то $(x, y) = \mathrm{Re}(xy^*) = -\mathrm{Re}(xy)$ /т.к. $y^* = -y$ /, поэтому $x\cdot y = -(x, y) + [x, y]$, где $[x, y]$ - кватернион из $\mathbb{H}_{вект}$, называемый <u>векторным произведением</u> кватернионов x и y из $\mathbb{H}_{вект}$. Кроме того, $(x, y) = \frac{1}{2}(xy^* + yx^*) = -\frac{1}{2}(xy + yx)$. Поэтому $[x, y] = xy + (x, y) = x\cdot y - \frac{1}{2}(xy + yx) = \frac{1}{2}(xy - yx)$. Поэтому $[x, x] = 0$, $[y, x] = -[x, y]$. Докажем, что $[x, y]$ ортогонален x и y. В самом деле, $([x, y], x) = -\frac{1}{2}([xy]x + x[xy]) =$

$= -\frac{1}{4}[(xy - yx)x + x(xy - yx)] = -\frac{1}{4}[x^2 y - yx^2]$. Но $x^2 y = yx^2$, что очевидно, так как x^2 есть скаляр $/ x^2 = -xx^*$ /. Докажем теперь, что если $[x, y] = 0$, то x и y пропорциональны. В самом деле, если $xy = yx$, то $(x, y) = -\frac{1}{2}(xy + yx) = -\frac{1}{2}xy$ т.е. xy - скаляр и $x = (x, y)\cdot y^{-1}$, поэтому x пропорционально

y^{-1} , а значит, и y /так как $y^{-1} = y^{*}/|y|^2 = -y/|y|^2$ /. Итак, если x и y линейно независимы, то x , y , $[x, y]$ - базис в $\mathbb{H}_{вект}$. Все такие базисы ориентированы одинаково, так как любую пару x , y независимых векторов можно непрерывно деформировать в любую другую такую пару /сохраняя по пути независимость/ - достаточно также перевести x в x' , избегая по дороге прямых, порождённых y и y' . В частности, x , y , $[x,y]$ ориентированы так же, как i , j , $k = [i,j]$. Таким образом, операция x , $y \longmapsto [x,y]$ обладает свойствами векторного произведения, упоминаемыми в курсе аналитической геометрии. /Именно так впервые и было введено векторное произведение/. Изучим теперь связь кватернионов и вращений.

<u>Определение.</u> Обозначим через U множество кватернионов с нормой I. Очевидна /см. формулу для обратного кватерниона/

<u>Лемма.</u> $u \in U \iff u^* = u^{-1}$ /т.е. матрица u - унитарна/.

Связь группы U с вращениями пространства $\mathbb{H}_{вект}$ устанавливает <u>ТеоремаI.</u> Пусть $u \in U$

I/ Отображение $T_u : x \longmapsto u x u^{-1}$ переводит пространство $\mathbb{H}_{вект}$ на себя .

2/ Отображение T_u есть поворот в пространстве $\mathbb{H}_{вект}$ вокруг оси, порождённой векторной частью кватерниона u на угол θ , определяемый из соотношения $\cos(\theta/2)$ = скалярная часть кватерниона u ~~-т~~ $0 \le \theta \le 2\pi$.

<u>Замечания:</u> I. Отображение $x \longmapsto u x u^{-1}$ не изменится, если умножить u на скаляр.

2. В частности, $T_{-u} = T_u$; это не противоречит второму утверждению теоремы, так как поворот на угол θ вокруг порождённой вектором a оси и на угол $2\pi - \theta$ вокруг порждённой вектором $-a$ оси совпадают.

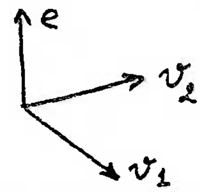
<u>Доказательство.</u> I. Множество $\mathbb{H}_{вект}$ задаётся условием $\operatorname{tr} x = 0$, а $\operatorname{tr}(u x u^{-1}) = \operatorname{tr} x = 0$.

2. Отображение T_u , очевидно, линейно и сохраняет норму $/|u x u^{-1}| = |u|\,|x|\,|u^{-1}| = |x|$ /, то есть является изометрией. Пусть $u = u_0 + u_{вект}$. Так как u_0 коммутирует с u , то и $u_{вект}$ коммутирует с u , поэтому $T_u(u_{вект}) = u_{вект}$. Таким образом, $u_{вект}$, и, следовательно, ортогональное дополнение $V = (u_{вект})^{\perp}$, инвариантны для T_u и T_u^{-1} . Преобразование T_u , суженное на V , есть либо поворот, либо отражение. Второе невозможно, так как определитель T_u равен $+1$, а не -1 /почему это так, мы объясним позже/. Итак, T_u есть поворот (вокруг оси $u_{вект}$), и нужно понять лишь, что угол поворота нужный.

Лемма. Пусть $v \in \mathbb{H}_{\text{вект}}$. Тогда отображение $-T_v$: $x \longmapsto -v x v^{-1}$ / $x \in \mathbb{H}_{\text{вект}}$ / есть от ражение относительно плоскости, ортогональной к v .

Доказательство леммы. Во-первых, $(-T_v)\,v = -v$. Если $x \in \mathbb{H}_{\text{вект}}$, то $x^* = -x$, поэтому $(v, x) = x v^* + v x^* = -(vx + xv)$ В частности, если x ортогонален v , то $vx = -xv$ и, следовательно, $(-T_v)(x) = x$. Доказательство леммы окончено.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть u есть произведение двух линейно независимых кватернионов, по модулю равных I и лежащих в $\mathbb{H}_{\text{вект}}$: $u = v_1 \cdot v_2$. Пусть e - такой ортогональный v_1 и v_2 вектор, что базис v_1, v_2, e ориентирован так же, как и базис i, j, k . Пусть α - угол, на который надо повернуть v_1 вокруг e , чтобы он перешёл в v_2 ; тогда ,



$\cos\alpha = (v_1, v_2)$. Тогда $T_{v_2 v_1} = T_{v_2} T_{v_1} = (-T_{v_2})(-T_{v_1})$ - поворот вокруг e на угол 2α /применяем лемму/. Остаётся заметить, что $-(v_1 v_2)$ есть скалярная часть кватернионов $v_1 v_2$ и $v_2 v_1$, а вектор e сонаправлен векторной части кватерниона $v_2 v_1$. Поэтому $T_{v_2 v_1}$ есть поворот вокруг $[v_2 v_1]$ на угол 2α , или, что то же, поворот вокруг $[v_2 v_1]$ на угол $\theta = 2\pi - \alpha$, а $\cos \theta/2 = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha =$ $= -(v_1 v_2)$ = скалярная часть $v_2 v_1$. Итак, утверждение теоремы доказано для кватернионов u , имеющих вид $v_2 v_1$. Осталось доказать, что любой кватернион $u \in U$, не являющийся скаляром, представим в таком виде. /Если u - скаляр, то $u = \pm 1$ и теорема очевидна/. Пусть $u = u_0 + u_{\text{вект}}$. Рассмотрим в плоскости, ортогональной $u_{\text{вект}}$ в $\mathbb{H}_{\text{вект}}$, два кватерниона единичной длины v_2 и v_1 , для которых $[v_2 v_1]$ сонаправлено $u_{\text{вект}}$, а $-\mathrm{Re}(v_1 \cdot v_2) = (v_2, v_1) = -u_0$ /добиться второго возможно, так как $-1 \le (v_2, v_1) \le 1$, если после этого первое не выполнено, то поменяем v_2 и v_1 /. Так как $|u| = 1$, то $u_0^2 +$ $+ |u_{\text{вект}}|^2$ = I, аналогично $\mathrm{Re}(v_2 \cdot v_1)^2 + |(v_2 \cdot v_1)_{\text{вект}}|^2$ = I; /так как $|v_1 v_2| = |v_1|\,|v_2|$ = I/. Так как $u_0 = \mathrm{Re}\, u = \mathrm{Re}(v_2 \cdot v_1)$, то длины сонаправленых векторв $u_{\text{вект}}$ и $v_2 v_1$ одинаковы, поэтому $u = v_2 v_1$. Доказательство теоремы I закончено.

Теорема2. Отображение $T : u \longmapsto T_u$ есть гомоморфизм группы U на группу $SO(\mathbb{H}_{\text{вект}})$ с ядром $\{\pm 1\}$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $T_u \in O(\mathbb{H}_{\text{вект}})$ при $u \in U$. Множество U является единичной сферой в четырёхмерном пространстве $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$. Так как отображение T непрерывно, а сфера связна, то множество $T(U)$ связно и, следовательно, лежит в $SO(\mathbb{H}_{\text{вект}})$ /Это утверждение оставалось недоказанным при доказательстве теоремы I/. Ясно также, что T - гомоморфизм.

Остаётся найти ядро и образ T. Так как всякая изометрия в $\mathbb{R}^3$ с определителем I есть поворот, то из теоремы I следует, что образ T совпадает со всей группой $SO(\mathbb{H}_{вект})$: зная ось и угол, можно подобрать подходящий кватернион u. Пусть u лежит в ядре T. Тогда u коммутирует со всеми элементами из $\mathbb{H}_{вект}$ и, поэтому, лежит в центре $\mathbb{H}$. Так как центр $\mathbb{H}$ скалярен, и $|u|=1$, то $u=\pm 1$.

Опишем теперь более подробно группу U. По определению $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix} \;\middle|\; |a|^2+|b|^2=1\right\}$. Множество матриц такого вида в точности совпадает с группой $SU(2)$ /унитарных матриц с единичным определителем/. В самом деле, видно, что строки выписанной матрицы ортогональны и имеют длину I. Обратно, если $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SU(2)$, то $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. Вторая строка должна быть ортогональна первой и, значит, пропорциональна вектору $(-\bar{\beta}, \bar{\alpha})$. Коэффициент пропорциональности равен I так как $\det\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ -\lambda\bar{\beta} & \lambda\bar{\alpha}\end{vmatrix}=\lambda$.

Факт совпадения группы U и $SU(2)$ можно объяснить по-другому. Во-первых, элементы вида $x_0+x_1 i\in\mathbb{H}$ образуют поле, изоморфное $\mathbb{C}$ /очевидно/. Далее, $\mathbb{H}$ можно рассматривать как двумерное пространство над $\mathbb{C}$ относительно обычного умножения: $\lambda\cdot x$ равно произведению λ и x в $\mathbb{H}$. Таким образом, $\mathbb{H}$ превращается в двумерное комплексное евклидово пространство. Наконец, если $u\in U$, то умножение справа на u : $x\longmapsto x\cdot u$ определяет $\mathbb{C}$ -линейное отображение $\mathbb{H}$ в себя, которое является унитарным, т.к. $|x\cdot u|=|x|$. Итак, мы построили вложение $U\hookrightarrow U(\mathbb{H})$. На самом деле это - изоморфизм U на $SU(\mathbb{H})\simeq SU(2)$. /проверьте!/

Следствие. Существует гомоморфизм T группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ с ядром $\{\pm 1\}$.

Замечание. Обратное "двузначное" отображение $SO(3)\longrightarrow SU(2)$ называется спинорным. Оно позволяет каждому повороту в трёхмерном пространстве сопоставить /с точностью до знака/ унитарное преобразование двумерного комплексного пространства, элементы которого физики называют спинорами.

Следствие. $SO(3)$ гомеоморфна $\mathbb{R}P^2$ /трёхмерной сфере со склеенными противоположными точками/.

В теории относительности ареной действий является не трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, а четырёхмерное пространство-время. Аналогом длины вектора является интервал: $l^2(x)=-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Точное математическое определение таково: рассматривается четырёхмерное векторное пространство $\mathcal{M}=\mathbb{R}^4$ и билинейная форма

$\langle x, y\rangle_{\mathcal{M}} = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ в $\mathcal{M}$. Основное отличие этой формы от обычного скалярного произведения состоит в том, что скалярный квадрат $\langle x, x\rangle$ может быть отрицательным /или нулевым при $x \neq 0$/. Естественно, важную роль при изучении геометрии $\mathcal{M}$ играет группа изометрий $\mathcal{M}$, т.е. таких линейных отображений $A: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, что $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Эта группа называется группой Лоренца и обозначается $O(3,1)$ /числа 3,I означают, что в формуле для скалярного произведения три плюса и один минус/. Мы сейчас построим аналог спинорного отображения для группы Лоренца.

Прежде всего построим аналог пространства $\mathbb{H}_{\text{вект}}$. Для этого рассмотрим пространство всех комплексных эрмитовых 2x2 матриц. Это четырёхмерное вещественное пространство, элементы которого мы будем записывать в виде $x = \begin{vmatrix} x_0 + x_1 & x_3 - i x_2 \\ x_3 + i x_2 & x_0 - x_1 \end{vmatrix}$ выбрав базис из матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

При этом $\det x = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Отождествляя пространство эрмитовых матриц с пространством $\mathcal{M}$, имеем равенство $\langle x, x\rangle_{\mathcal{M}} = -\det x$. Заметим, что если x эрмитова матрица, то матрица $a x a^*$ тоже эрмитова /a – любая матрица/. Пусть теперь $a \in SL(2, \mathbb{C})$. Определим отображение $T_a : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ по формуле $T_a : x \longmapsto a x a^*$.

<u>Предложение.</u> I/ Отображение T_a есть изометрия $\mathcal{M}$ /относительно формы /.

2/ Отображение $T: a \longmapsto T_a$ есть гомоморфизм группы $SL(2,\mathbb{C})$ в группу $O(3,1)$ /изометрий пространства $\mathcal{M}$ / с ядром $\{\pm 1\}$.

<u>Замечание.</u> Мы не утверждаем, что образ T совпадает со всей группой $O(3,1)$. Это неверно, т.к. группа $SL(2,\mathbb{C})$ связна, а $O(3,1)$ – нет. Оказывается, группа $O(3,1)$ имеет четыре связных компоненты /в отличие от групп $O(3)$ или $O(4)$, у которых их две/. Компонента, содержащая единичную матрицу, обозначается $SO_+(3,1)$, и можно показать, что образ T совпадает с $SO_+(3,1)$.

<u>Доказательство.</u> I/ Ясно, что отображение T_a линейно. Оно сохраняет длину : $\langle T_a x, T_a x\rangle = -\det(T_a x) = -\det a \cdot \det x \cdot \det a^*$. Но $\det a = 1$, поэтому написанное произведение равно

2/ Ясно, что $T_a \circ T_b = T_{ab}$. Найдём ядро T. Пусть для всех эрмитовых x верно $a x a^* = x$. Полагая $x = 1$, видим, что a – унитарная матрица, причём $a x = x (a^*)^{-1} = x a$ для всех эрмитовых x. Так как любая матрица есть линейная комбинация эрмитовых, то a коммутирует с любой матрицей. Следовательно a скалярна. Так как $\det a = 1$, то $a = \pm 1$.

ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ.

Теория инвариантов возникла в начале XIX века в работах Кэли и Грассмана. В этой теории сочетаются методы различных областей математики: алгебры, анализа, геометрии. Её можно рассматривать как часть теории представлений групп или как кусочек алгебраической геометрии.

Пусть G группа и X множество.

Определение. Говорят, что группа G действует на множестве X, если каждому элементу g из G соответсвует взаимнооднозначное преобразование T_g множества X /для краткости часто вместо $T_g(x)$ пишут gx и говорят, что под действием $g \in G$ элемент $x \in X$ переходит в элемент $gx \in X$ / и при этом выполнены условия:

а/ $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ $\forall g_1, g_2 \in G, x \in X$ /умножению в группе соответствует композиция преобразований/

б/ $1 \cdot x = x$

Замечание. Задать действие G на X значит определить гомоморфизм группы G в группу биекций множества X

Примеры.

	G	X
1.	S_n (группа перестановок)	$\{1, 2, \dots, n\}$
2.	$GL(V)$	V
3.	$O(n)$	$\mathbb{R}^n$
4.	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{R}$
5.	S_n	$\mathbb{R}^n$

В первом примере S_n переставляет числа $1, 2, \dots, n$. Во втором и третьем примерах группа действует линейными преобразованиями. В четвёртом примере /единственный/ нетривиальный элемент $\mathbb{Z}_2$ действует как отражение : $x \longmapsto -x$. В пятом примере S_n переставляет координаты.

Орбиты. Пусть G действует на X и $x \in X$. Орбитой, проходящей через точку x, называется подмножество в X, состоящее из всех точек, в которые можно перевести x, действуя элементами G.

Предложение /очевидное/. а/ Две точки лежат на одной орбите тттк их можно перевести друг в друга. б/ Принадлежность одной орбите есть отношение эквивалентности. Орбиты, проходящие через разные точки либо совпадают, либо не пересекаются. в/ Всё множество X распадается на орбиты.

Инварианты. Пусть G действует на X. Числовая функция Φ на X называется инвариантной если $\forall x \in X$, $g \in G$ $\Phi(gx) = \Phi(x)$. Инварианты непосредственно связаны с орбитами: функция на X инвариантна тттк она постоянна на каждой орбите.

Пример. $G = \mathbb{Z}_2$, $X = \mathbb{R}$ /пример 4 действия группы/ Орбиты/ суть множества вида $\{x, -x\}$. Инварианты – чётные функции.

Пример. $G = O(n)$, $X = \mathbb{R}^n$ /пример 3/. Орбиты – сферы, инварианты – функции от радиуса.

Замечание. Инвариантные функции образуют подкольцо в кольце всех функций на X .

В теории инвариантов рассматриваются не произвольные группы и множества. Именно, мы будем считать, что

I/ X есть линейное пространство V .

2/ G есть подгруппа в $GL(V)$, естественно действующая на V.

Можно сказать, что в теории инвариантов изучаются линейные действия групп на линейных пространствах. Такое действие представляет собой гомоморфизм $G \longrightarrow GL(V)$; такие гомоморфизмы называют также представлениями группы G в пространстве V . Мы налагаем также ограничение на инвариантные функции. Отныне инвариантом мы будем называть инвариантную функцию на V , являющуюся многочленом на V . /Функция $V \longrightarrow \mathbb{R}$ называется многочленом, если она становится многочленом от координат при некотором – и, следовательно при любом выборе базиса/.

Примеры /инвариантов для некоторых из рассмотренных примеров действий/

	G	V	инварианты
/I/	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{R}$	многочлены от x^2
/2/	S_n	$\mathbb{R}^n$	симметрические многочлены
/3/	$GL(V)$	V	константы
/4/	$O(n)$	$\mathbb{R}^n$	многочлены от $\|x\|^2=(x,x)$

В случаях /I/ и /2/ описание инвариантов очевидно. Докажем /3/.

I способ. Множество всех ненулевых векторов в V образует орбиту, которая плотна в V . Инвариант постоянен на этой орбите и непрерывен на всём V , следовательно он константа.

2 способ. Пусть P – инвариантный многочлен. Разложим его на однородные составляющие /см. §2/ : $P=P_0+P_1+P_2+\dots$. Рассмотрим скалярный оператор $\lambda\cdot 1\in GL(V)$. Имеем $P(\lambda x)=P_0(x)+\lambda\cdot P_1(x)+\lambda^2\cdot P_2(x)+\dots$. Отсюда, в силу инвариантности P и произвольности λ вытекает /см. §2/, что $P_1=P_2=\dots=0$.

Докажем /4/. Пусть P – инвариантный многочлен в $\mathbb{R}^n$. Выберем в $\mathbb{R}^n$ произвольную прямую. Т.к. среди изометрий $\mathbb{R}^n$ есть отражение относительно гиперплоскости, ортогональной этой прямой, то ограничение P на эту прямую – чётный многочлен вида $t\longmapsto Q(t^2)$ Покажем, что и на всём $\mathbb{R}^n$ многочлены $P(x)$ и $Q(|x|^2)$ совпадают. Действительно, на каждой сфере оба многочлена /инвариантных!/ постоянны и при этом совпадают в точках пересечения сферы с выбранной прямой.

Замечание. Функция $x\longmapsto |x|$ не есть многочлен от x !

Можно поставить задачу об отыскании инвариантов ортогональной группы $O(V)$ более общим образом; именно, можно разыскивать инвариантные многочлены от нескольких переменных, т.е. такие многочлены $P(x_1,\dots,x_k)$ на $V\oplus V\oplus\dots\oplus V$ /k раз/, что для всякого $g\in O(V)$ выполнено равенство $P(gx_1,\dots,gx_k)=P(x_1,\dots,x_k)$. /Чтобы включить эту задачу в нашу общую схему, достаточно заметить, что мы ищем инварианты на $V\oplus\dots\oplus V$ относительно действия группы матриц вида

$$\begin{pmatrix} g & & & \\ & g & & \\ & & \ddots & \\ & & & g \end{pmatrix}$$

где $g\in O(V)$ /. Примером таких инвариантов на $V\oplus V$ являются функции $x,y\longmapsto(x,y)$ или $x,y\longmapsto(x,x)\cdot(x,y)^3$.

Мы хотим опис ать все инвариантные многочлены на V от нескольких переменных.

Теорема об инвариантах ортогональной группы.

Всякий инвариантный многочлен $P(v_1,\dots,v_r)$ от r векторных переменных $v_1,\dots,v_r\in V$ есть многочлен от попарных скалярных произведений $\langle v_i,v_j\rangle$. Более точно, найдётся такой многочлен Q от $\frac{r(r+1)}{2}$ числовых аргументов, что $P(v_1,\dots,v_r)=Q(\langle v_i\, v_j\rangle)$.

Замечания. I/ Числа $\langle v_i\, v_j\rangle$ образуют симметрическую матрицу - матрицу Грама. Теорема утверждает, что элементы матрицы Грама образуют полную систему инвариантов, т.е. что любой инвариант через них выражается. 2/ Если в формулировке теоремы отказаться от требования, что бы функция Q бы многочленом, то теорема сильно упрощается и становится следствием теоремы Грама. В самом деле, группа $O(V)$ действует на наборах $(v_1,\dots,v_r)$ и инвариантность мнгочлена P означает его постоянство на орбитах этого действия. Но в силу теоремы Грама множество орбит параметризуется матрицами Грама, так как два набора $(v_1,\dots v_r)$ и $(\tilde v_1,\dots,\tilde v_r)$ можно перевести друг в друга тогда и только тогда, когда их матрицы Грама равны. Итак,

(множество орбит) = (множество матриц Грама) поэтому (инварианты) = = (функции постоянные на орбитах) = (функции на множестве орбит) = (функции на матрицах Грама) = = (функции от матричных элементов $\langle v_i\, v_j\rangle$ матриц Грама).

Доказательство сформулированной теоремы требует применения методов теории инвариантов. Мы проведём его лишь в лёгком случае: /число векторов r /$\leq \dim V$. Пусть $\dim V=n$; будем вести индукцию по n. Случай $r=1$ нами уже разобран. Рассмотрим теперь случай $r=n$. Разложим $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{n-1}$. В соответствии с этим наш многочлен $P(v_1,\dots,v_n)$ представится в виде $Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n,w_1,\dots,w_n)$, где $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $w_i\in\mathbb{R}^{n-1}$, $v_i=(\lambda_i,w_i)$. Отражение $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{n-1}$ относительно $\mathbb{R}^{n-1}$ /преобразование $(\lambda,w)\longmapsto(-\lambda,w)$ /, меняющее знаки всех λ_i, сохраняет многочлен Q, поэтому Q - можно представить как многочлен от попарных произведений $\lambda_i\lambda_j$ /ибо в каждый сомножитель входит чётное число лямбд/: $Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, w_1, \ldots, w_n) = R(\lambda_1^2, \lambda_1\lambda_2, \ldots, \lambda_n^2, w_1, \ldots, w_n)$, или, сокращённо, $R(\lambda_i\lambda_j, w_1, \ldots, w_n)$. Представим многочлен R как многочлен от $\lambda_i\lambda_j$, коэффициенты которого являются многочленами от $w_1, \ldots, w_n$. Эти многочлены — инвариантные многочлены от n векторов из $\mathbb{R}^{n-1}$. Положив в них $w_1 = 0$, получаем инвариантные многочлены от $n-1$ векторов в $\mathbb{R}^{n-1}$; применяя предположение индукции, видим, что $Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, w_2, \ldots, w_n) = S(\{\lambda_i\lambda_j\}, \{\langle w_i w_j\rangle\})$. Так как /в предположении $w_1 = 0$ / $\lambda_i\lambda_j = \langle v_1 v_i\rangle \cdot \langle v_1 v_j\rangle / \langle v_1 v_1\rangle$, $\langle w_i, w_j\rangle = \langle v_i v_j\rangle - \lambda_i\lambda_j$ то $Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, w_2, \ldots, w_n) = T(\langle v_i v_j\rangle) / \langle v_1 v_1\rangle^s$, где T — некоторый многочлен, а s — некторое натуральное число /подставляем выражения для $\langle w_i w_j\rangle$, а затем для $\lambda_i\lambda_j$ через $\langle v_i v_j\rangle$ /. Иными словами, при $v_1 \in \mathbb{R} \oplus \{0\}$ имеем $P(v_1, \ldots, v_n) = T(\langle v_i v_j\rangle) / \langle v_1 v_1\rangle^s$. Это же равенство имеет место и при любом v_1, так как любой набор $v_1, \ldots, v_n$ можно перевести изометрией в набор, у которого $v_1 \in \mathbb{R} \oplus \{0\}$; обе части при этом сохранятся.

Чтобы уничтожить знаменатель, повторим рассуждения относительно второй координаты. Мы получим, что $P(v_1, \ldots, v_n) = T'(\langle v_i v_j\rangle) / \langle v_2 v_2\rangle^{s'}$. Обозначив $\langle v_i v_j\rangle$ через t_{ij} и сравнивая полученные выражения для P, мы находим, что $t_{22}^{s'} \cdot T(t_{ij}) = t_{11}^{s} \cdot T'(t_{ij})$. Если бы обе части этого равенства совпадали как многочлены от $\frac{n(n+1)}{2}$ переменных t_{ij}, то из однозначности разложения на простые множители в кольце многочленов от нескольких переменных следовало бы, что T делится на t_{11}^s и, значит, $P(v_1, \ldots, v_n)$ есть не только рациональная функция, но и многочлен от $v_1, \ldots, v_n$. /Впрочем, в данном случае можно обойтись без использования теоремы об однозначности разложения на простые множители, заметив, что многочлен делится на t_{11}^s тогда и только тогда, когда каждый входящий в него одночлен делится на t_{11}^s. Поэтому каждый одночлен в левой части делится на t_{11}^s, поэтому и T делится на t_{11}^s. К сожалению, полученное нами равенство установлено пока не для произвольных значений t_{ij}, а лишь для тех, которые имеют вид $t_{ij} = \langle v_i v_j\rangle$. Такие наборы t_{ij} не образуют плотного множества в пространстве $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Например, при $n = 1$ они заполняют лишь положительную полупрямую в $\mathbb{R}$.

Отождествим $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ с пространством симметрических матриц, которое, в свою очередь, отождествим с пространством симметрических операторов в $\mathbb{R}^n$. Какие операторы отвечают матрицам Грама?

<u>Лемма.</u> Симметрическая матрица $|a_{ij}|$ является матрицей Грама тогда и только тогда, когда оператор в $\mathbb{R}^n$ с матрицей $|a_{ij}|$ положителен.

<u>Доказательство.</u> Если $a_{ij} = \langle v_i v_j\rangle$, то оператор с матрицей $|a_{ij}|$ равен положительному оператору B^*B, где B — оператор, пере-

водящий i -ый базисный вектор e_i в v_i. Обратно, если оператор с матрицей $\|a_{ij}\|$ положителен, и, следовательно, представляется в виде B^*B, то $a_{ij} = \langle B^*B e_i, e_j\rangle = \langle Be_i, Be_j\rangle$ ∎

Следствие. Множество матриц Грама содержит открытое подмножество в $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Доказательство. Всякий симметрический оператор, близкий к единичному положителен. ∎

Теперь мы видим, что многочлены $T(t_{ij})\cdot t_{22}^{s'}$ и $T'(t_{ij})\cdot t_{11}^{s}$ совпадают на открытом множестве и, следовательно, равны /многочлен в $\mathbb{R}^k$, тождественно равный нулю в открытом множестве, имеет нулевые коэффициенты/. Это позволяет завершить доказательство теоремы описанным выше способом. ∎

Пример. Рассмотрим многочлен $\mathcal{D}(v_1,\dots,v_n)$, сопоставляющий векторам $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ определитель отображения, переводящего i-ый базисный вектор /в $\mathbb{R}^n$/ в v_i. Ясно, что $\mathcal{D}(Av_1,\dots,Av_n) = \det A\cdot\mathcal{D}(v_1,\dots,v_n)$. Если A - изометрия, то $\det A = \pm 1$. Поэтому многочлен $\mathcal{D}^2$ является инвариантом. Согласно теореме, он должен выражаться через скалярные произведения $\langle v_i\, v_j\rangle$. И, действительно, $\mathcal{D}^2$ совпадает с определителем матрицы Грама /см. "объём в $\mathbb{R}^n$"/.

Замечание. Если число векторов r больше размерности пространства, то инварианты $\langle v_i\, v_j\rangle$ перестают быть независимыми: возможен не тождественно равный 0 многочлен от $\frac{r(r+1)}{2}$ переменных, обращающийся в 0 при подстановке $\langle v_i\, v_j\rangle$, именно, $\det\|\langle v_i\, v_j\rangle\| = 0$ /при $r > n$ r- мерный объём параллелепипеда, натянутого на $v_1,\dots,v_r$ равен 0 т.к. этот параллелепипед вырожден и лежит в n -мерном пространстве/.

Задачи по инвариантам – I

Ал 66

Пусть группа G действует на множестве X (это значит, что каждому элементу $g \in G$ соответствует преобразование T_g множества X, причем соответствие $g \mapsto T_g$ – гомоморфизм). Говорят, что под действием g точка x переходит в точку $T_g x$, которую обозначают также gx. Орбитой точки x называется множество Gx всех тех точек, в которые можно перевести точку x. Стабилизатором точки x называется подмножество $G(x)$ группы G, состоящее из тех элементов g, которые оставляют x на месте: $G(x) = \{g \mid gx = x\}$.

1. Докажите, что орбиты двух разных точек либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, все множество X разбивается на непересекающиеся подмножества.

2. Докажите, что: а) $G(x)$ – подгруппа группы G; б) если G конечна, то $|Gx| = |G|/|G(x)|$; в) если точки x и y лежат в одной орбите, что подгруппы $G(x)$ и $G(y)$ сопряжены (это значит, что существует $g \in G$, для которого $G(x) = g\,G(y)\,g^{-1}$).

В следующих 4 задачах V – n-мерное векторное пространство над полем k, состоящим из q элементов.

3. а) Опишите все орбиты $GL(V)$ в V. б) Найдите число элементов в V и в каждой орбите.

4. а) Пусть $G = GL(V)$, $v \in V$. Найти $|G|/|G(v)|$ (ср. 2 б)). б) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Найти стабилизатор вектора e_1 (описать соответствующие матрицы). в) Найти $|GL(V)|$.

5. Найти число элементов группы $SL(V) = \{A \in GL(V) \mid \det A = 1\}$.

6. Найти число k-мерных подпространств в V. (Указание. Рассмотреть действие $GL(V)$ в множестве k-мерных подпространств и применить результат задачи 2.)

7. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ билинейную форму $B(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$. Эта форма симметрична, но не положительно определена: $B(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$. Пусть $O(1,1)$ (соответственно $SO(1,1)$) – подгруппа $GL(2,\mathbb{R})$ (соответственно $SL(2,\mathbb{R})$), состоящая из всех операторов, сохраняющих B. а) Нарисуйте орбиты $O(1,1)$ и $SO(1,1)$ в $\mathbb{R}^2$. б) Найдите стабилизатор вектора $e_1 = (1,0)$ в $O(1,1)$ и $SO(1,1)$.

8. Пусть $GL(2,\mathbb{R})$ действует в $\mathbb{R}^2$. а) Найдите число связных компонент стабилизатора точки e_1. б) Обозначим через G ту связную компоненту стабилизатора, которая содержит единицу. Проверьте, что G – подгруппа. в) Опишите орбиты G в $\mathbb{R}^2$.

9. Рассмотрим действие $G = GL(n,\mathbb{C})$ в $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = \operatorname{End} \mathbb{C}^n$ при помощи сопряжения: $g : A \mapsto gAg^{-1}$. Пусть $\mathcal{D}$ – подпространство диагональных матриц в $\operatorname{End} \mathbb{C}^n$. а) Докажите, что $\mathcal{D}$ пересекает почти все орбиты G в $\operatorname{End} \mathbb{C}^n$, то есть что объединение всех орбит, пересекающих $\mathcal{D}$, плотно в $\operatorname{End} \mathbb{C}^n$.

б) Докажите, что полиномиальные инварианты на $End\,\mathbb{C}^n$ (то есть многочлены от матричных элементов, не меняющиеся при сопряжении), совпадающие на $\mathcal{D}$, равны. в) Какие точки $\mathcal{D}$ лежат на одной G-орбите?

10. (Продолжение) Пусть $A \in End\,\mathbb{C}^n$, $\det(t\cdot 1 - A) = t^n + \lambda_1 t^{n-1} + \ldots + \lambda_n$ – характеристический многочлен оператора (или матрицы) A.
а) Проверьте, что коэффициенты λ_i являются многочленами от матричных элементов A. Докажите, что λ_i инвариантны относительно действия $GL(n,\mathbb{C})$. б) Как выглядит ограничение λ_i на $\mathcal{D}$?

11. (продолжение) ~~Докажите,~~ что всякий инвариантный многочлен на $End(\mathbb{C}^n)$ однозначно представляется в виде многочлена от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (Указание. Рассмотрите ограничение этого многочлена на $\mathcal{D}$.)

Задачи по элементарной топологии.

1. Доказать, что группа $SO(3)$ гомеоморфна $\mathbb{R}P^3$.
2. Доказать, что пространство $G_+(4,2)$ ориентированных двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^4$, проходящих через 0 /т.е. каждая плоскость считается дважды – с одной ориентацией и с другой/ гомеоморфно $S^2 \times S^2$.
3. Доказать, что если в $S^2 \times S^2$ склеить каждую точку (x,y) с точкой (y,x), то получится пространство, гомеоморфное $\mathbb{C}P^2$.
4. Доказать, что если в $\mathbb{C}P^2$ склеить каждую точку $(x_1:x_2:x_3)$ с $(\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$, то получится пространство, гомеоморфное S^4.
5. Доказать, что если в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 (= S^2 \times S^2)$ склеить каждую точку $|(x_1:x_2),(x_3:x_4)|$ с $|(\bar{x}_1:\bar{x}_2),(\bar{x}_3:\bar{x}_4)|$, то получится пространство, гомеоморфное S^4.
6. Доказать, что при любом гладком вложении S^2 в $\mathbb{C}^2$ касательные плоскости по крайней мере в двух точках будут комплексными прямыми.
7. Пусть X – топологическое пространство, $x \in X$. Доказать, что пространство всех путей в X, начинающихся в x_0, стягиваемо по себе в точку.
8. Пусть $\mathbb{R}^\infty$ – пространство последовательностей вещественных чисел с топологией поточечной сходимости. Доказать, что всякая непрерывная фукция $\phi : \mathbb{R}^\infty \setminus 0 \to \mathbb{R}$, постоянная на лучах /т.е. $\phi(tx_1, tx_2, \ldots) = \phi(x_1, x_2, \ldots)$ при всех $t > 0$ / является константой.
9. Докажите, что в n – мерном пространстве над полем $\mathbb{F}_2$ существует такой оператор, группа степеней которого транзитивно действует на множестве всех ненулевых векторов.
10. Доказать, что группа кос из трёх нитей изоморфна:
    а/ группе с образующими P и T и соотношением $P^2 = T^3$;
    б/ фундаментальной группе дополнения к трилистнику в $\mathbb{R}^3$.
11. Найти все замкнутые подгруппы $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$.

Задачи. Ал68 Перепечатано (© проф. А.А.Кириллов)

I. Известно, что квадрат числа, оканчивающегося на 25 /на 376/, также оканчивается на 25 /376/. Найти все подобные /бесконечнозначные/окончания.

2. Дан условно сходящийся ряд над $\mathbb{C}$. Сумма его, вообще говоря, зависит от порядка слагаемых. Найти г.м. сумм на комплексной плоскости.

3. Найти на плоскости все замкнутые, однородные относительно своей группы движений, множества.

Определение. Классом функции $f(x)$ называется размерность пространства функций $f(x+T)$ /рассматриваются непрерывные функции со значениями в $\mathbb{R}$ /.

4. Найти все функции класса I и 2 на прямой.

5. Доказать, что константа - единственная функция класса I на окружности. Найти на окружности все функции класса 2.

6. Доказать, что $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$

7. Существует ли в $\mathbb{Q}_5$ $\sqrt{2}$? $\sqrt{-1}$?

8. Доказать, что $\mathbb{Z}_m$ компактно в $\mathbb{Q}_m$ / $\mathbb{Q}_m$- поле m-адических чисел/.

9. Доказать, что поле порядка p^k /где p - простое число/ можно реализовать как подалгебру алгебры матриц порядка k над F_p .

I0. Доказать, что мультипликативная группа конечного поля - циклическая.

II. Определить, какие из следующих групп изоморфны между собой:
 а/ группа движений куба;
 б/ S_4
 в/ $SL(2, F_3)$

I2. Решить предыдущую задачу для групп:
 а/ движений додекаэдра,
 б/ A_5
 в/ $SL(2, F_4)$
 г/ $PSL(2, F_5)$ - проективных преобразований проективной прямой над полем F_5 .

I3. Найти все непрерывные гомоморфизмы в T групп:
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, T, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_m$.

I4. Пусть $P(x)$ - многочлен. Вычислить $P(x)$, где $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

I5. Вычислить $P(x)$, где $X = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{pmatrix}$

I6. Пусть A - кольцо с образующими p и q и соотношением $pq - qp = 1$. Доказать, что A - кольцо Оре.

I7.Доказать, что в A разрешимо уравнение Ферма: $X^3+Y^3 = Z^3$.

I8. Сколько точек и сколько прямых на двумерной плоскости над полем

19. Можно ли однозначно восстановить функцию, определённую в трёхмерном пространстве над полем F_q со значениями в F_q, если известны суммы её значений по любой двумерной плоскости?
20. Поверхность острова является графиком гладкой функции, имеющей конечное число /П/ пиков, /В/-вершин, и седловин - /С/. Доказать, что К = П - С + В = I. Чему равно К на поверхности Земли, на поверхности колец Сатурна?
21. Доказать, что пространство последовательностей Фибоначчи над полем характеристики 0 - двумерно, причём существует базис, элементы которого - геометрические прогрессии.
22. Доказать, что вокруг замкнутого и ограниченного множества на плоскости можно описать квадрат.
23. Сформулировать и доказать аналогичную задачу в пространстве.
24. Сколько элементов в группе $GL(2, F_q)$? Исследовать классы сопряжённых элементов в этой группе.
25. Определитель матрицы есть многочлен от её элементов. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы есть квадрат некоторого многочлена от её элементов.
26. Доказать, что из любого подмножества множества действительных чисел /со стандартной топологией/ операциями дополнения и замыкания можно получить не более четырнадцати различных множеств. Построить множество, для которого эта возможность осуществляется.

Задачи. (Перепечатано, © А.Зелевинский.)

1. Пусть G - конечная группа порядка $|G|$, H - такая её подгруппа, что индекс $/G : H/$ равен наименьшему простому делителю $|G|$. Доказать, что H нормальна в G.
2. а/ Пусть М - многоугольник на плоскости. Обозначим через M_1 многоугольник с вершинами в серединах сторон М. Доказать, что последовательность $\{M_n\}$, $M_n = (M_{n-1})_1$, стягивается к точке.
   б/ То же, если вершины M_1 - центры тяжести наборов из соседних k вершин.
3. Найти $a_1, \dots, a_n, \dots$, если $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n + C + \frac{a_1}{n} + \dots \frac{a_k}{n^k} + \dots$
4. Пусть $x_1 \neq 0$, $x_n = \sin x_{n-1}$. Найти асимптотику x_n, $n \to \infty$
5. Вычислить $\int_0^1 x^{-x} dx$ с точностью до 0,001.