ТФКП. ЗАДАЧИ.

Ряды.

I.I. Если в полном нормированном векторном пространстве ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то он сходится, причем $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

I.2. (Признак сравнения.) Пусть $|a_n| \leq b_n$, $b_n \in \mathbb{R}$, $\sum b_n$ сходится. Тогда $\sum a_n$ абсолютно сходится и $\sum |a_n| \leq \sum b_n$.

I.3. (Признак Вейерштрасса.) Пусть $f_n: M \to \mathbb{C}$ (где $M \subseteq \mathbb{C}$), $\forall n\ \forall z \in M$ $|f_n(z)| \leq b_n \in \mathbb{R}$ где $\sum b_n$ сходится. Тогда $\sum f_n$ сходится равномерно на M.

I.4 Два определения верхнего предела $\overline{\lim}\, a_n$ ($a_n \in \mathbb{R}$) эквивалентны:
1) $\overline{\lim}\, a_n$ – наибольшая предельная точка последовательности a_n
2) $\overline{\lim}\, a_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{n\geq N} a_n$.

I.5. (Признак Коши) Пусть $a_n \in \mathbb{C}$, $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда:
$\alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n$ абс. сходится; $\alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n$ расходится.

I.6. (Формула Коши – Адамара) Радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n z^n$:
$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
: ряд абс. сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

I.7. Ряд $\sum a_n z^n$ сходится равномерно в круге $|z| < r$ при $r < R$ (где R – радиус сходимости).

I.8. а) $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$; в) $\underline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \underline{\lim} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

Т.обр. радиус сходимости $\sum a_n z^n$ есть $R = \lim \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (если этот предел существует!).

I.9. При $P \in \mathbb{Z}$ радиус сходимости $\sum n^P z^n$ равен I. Опишите поведение ряда при $|z| = 1$.

I.10. Найти радиусы сходимости:
а) $\sum n! \cdot z^n$; в) $\sum \dfrac{z^n}{n!}$; с) $\sum e^{-\sqrt{n}} \cdot z^n$; d) $\sum \dfrac{(nz)^n}{n!}$

I.11. Пусть R – радиус сходимости $\sum a_n z^n$. Найти радиус сходимости ряда $\sum \dfrac{a_n z^n}{(1+|a_n|)}$.

I.12. Доказать равномерную сходимость:
а) $\sum \dfrac{2^n}{z^n + z^{-n}}$ при $|z| \leq r < \frac{1}{2}$; в) $\sum (-1)^n \cdot n^{-z}$ при $Re(z) \geq a > 0$.

I.13. Пусть $f: [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ интегрируема по Риману и монотонно убывает. Тогда: $\int\limits_1^\infty f(t)\,dt$ сходится $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^\infty f(n)$ сходится.

I.14. Доказать равномерную сходимость (при $Re\, z \geq a > 1$):
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z}.$$

I.15. (преобразование Абеля) Пусть $A_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k$; тогда $\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})\right) + A_n b_n$

I.16. Пусть $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, причем $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n > 0$ и $\forall n.\ A_n = \left(\sum\limits_{k=1}^n a_k\right) \in [m, M]$.
Тогда $m \cdot b_1 \leq \sum\limits_{k=1}^n a_k \cdot b_k \leq M \cdot b_1$

I.17. Пусть $\sum a_n z^n$ с радиусом $R=1$ и $\sum a_n$ сходится.
Тогда $\sum a_n z^n$ сходится равномерно при $z \in [0,1]$ и
$\lim\limits_{z\to 1,\, z\in[0,1]} (\sum a_n z_n) = \sum a_n$

I.18. Пусть $|z_0| = R$ - радиус сходимости $\sum a_n z^n$, и ряд $\sum a_n z_0^n$ сходится. Тогда $\sum a_n z^n$ сходится равномерно на отрезке $[0, z_0]$.

I.19. Если $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \geqslant R(1+\frac{\alpha}{n})$, где $\alpha > 1$, а R - радиус сходимости $\sum a_n z^n$, то ряд $\sum a_n z^n$ сходится во всех точках $|z| = R$

I.20. Если $a_0 > a_1 > \ldots > a_n \to 0$, то $\sum a_n z^n$ сходится во всех точках $|z| = 1$ кроме может быть $z = 1$.

Бесконечные произведения.

Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, где $a_n \neq -1$, сходится, если $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{N}(1+a_n) \neq 0$.

I.21. Если $a_n \in \mathbb{R}^+$, то $\prod(1+a_n)$ сходится $\Longleftrightarrow$ $\sum a_n$ сходится.

I.22. Если $b_n \in \mathbb{R}^+$, $b_n \neq 1$, то $\sum b_n$ сходится $\Rightarrow$ $\prod(1-b_n)$ сходится.

I.23. Если $0 \leqslant b_n < 1$, $\sum b_n$ расходится, то $\prod(1-b_n)$ расходится к 0.

I.24. $\prod(1+|a_n|)$ сходится $\Longrightarrow$ $\prod(1+a_n)$ сходится $(a_n \neq -1)$.

I.25. $\sum |f_n(z)|$ равномерно сходится к ограниченной функции (на множестве M) $\Longrightarrow$ $\prod(1+f_n(z))$ равномерно сходится на M (где $f_n(z) \neq -1$).

I.26. $\sum a_n$, $\sum |a_n|^2$ сходятся $\Rightarrow$ $\prod(1+a_n)$ сходится (аналогично для равномерной сходимости).

I.27. $\prod\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ расходится.

I.28. $\prod\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdot e^{-z/n}$ равномерно сходится при $|z| \leqslant R < \infty$.

I.29. $\prod\limits_{p\in P}(1-p^{-z})$ сходится равномерно во всякой ограниченной области, где $\mathrm{Re}(z) \geqslant a > 1$, и равно $1/\zeta(z)$ (см. I.14
Здесь P - множество простых чисел.

I.30. $\mathrm{Re}(z) \geqslant 2 \Longrightarrow \log \zeta(z) = -\sum\limits_{p\in P} \log(1-p^{-z})$
(главное значение логарифма: $\log z = w$, $e^w = z$, $\mathrm{Im}(w) \in [-\pi, \pi]$).

Т Ф К П . ЗАДАЧИ.

Дифференцирование.

2.1. Найти точки дифференцируемости для:

a) $\operatorname{Re} z$; в) $z \cdot \operatorname{Re} z$; c) $|z|$; d) $|z|^2$.

2.2. Положим $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ для $z = x + iy$.

a) e^z голоморфна на $\mathbb{C}$ и $(e^z)' = e^z$;

в) $e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{z}{n})^n$ и обладает обычными свойствами экспоненты: $e^0 = 1$, $e^{(z_1+z_2)} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

c) функция e^z периодична с периодом $(2\pi i)$ и взаимно однозначна в полосе $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)$

d) функция $\log w = \log|w| + i \arg w$ $(w \neq 0)$ - обратная к e^z. (главное значение логарифма: $\log w = z$ при $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)$

2.3. Положим $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Эти функции голоморфны на $\mathbb{C}$ и совпадают с обычными $\sin x$, $\cos x$ на $\mathbb{R}$. Найти их производные. Найти, где $\sin z = 0$.

2.4. a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y^2\,(x+iy)}{x^2+y^4}, & z = (x+iy) \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$

(I) $f(z)$ не голоморфна в точке $z_0 = 0$;

(II) $f'_\varphi(z_0) = 0$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ $(z_0 = 0)$

(где производная по направлению

$$f'_\varphi(z_0) = \lim_{\substack{\tau\to 0 \\ \tau > 0}} \frac{f(z_0 + \tau e^{i\varphi}) - f(z_0)}{\tau}$$

в) $f(z) = e^{-z^{-4}}$:

(I) $f(z)$ не голоморфна в точке $z_0 = 0$;

(II)′ $f(z)$ удовлетворяет условиям Коши - Римана в точке $z_0 = 0$.

(III) $f(z)$ голоморфна во всех точках $z \neq 0$.

c) Существует ли функция $f(z)$, удовлетворяющая одновременно условиям (I),(II),(III)?

2.5. a) Пусть для голоморфной $f(z)$ выполнено: $a \cdot \operatorname{Re} f(z) + b \cdot \operatorname{Im} f(z) = c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и не все равны 0. Тогда $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

в) Пусть для голоморфной $f(z)$: $\operatorname{Re} f(z) = F(\operatorname{Im} f(z))$ где $F(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Тогда $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

2.6. Пусть $f(z)$ голоморфна в связной области D.

а) Если $\operatorname{Re} f(z)\equiv c$ или $\operatorname{Im} f(z)\equiv c$, то $f(z)\equiv\mathrm{const}$ (в D).

в) Если $|f(z)|\equiv c$ или $\operatorname{Arg} f(z)\equiv c$ (где $f(z)\neq 0$ в D), то $f(z)\equiv\mathrm{const}$

2.7. Найти голоморфную $f(z)$, если $f(0)=0$ и

а) $\operatorname{Re} f = e^x(x\cos y - y\sin y)$ $\quad (z=x+iy)$

в) $\operatorname{Arg} f = \varphi + r\cdot\sin\varphi$ $\quad (z=r\cdot e^{i\varphi})$

с)* $\operatorname{Re} f = \dfrac{x(1+x^2+y^2)}{1+2x^2-2y^2+(x^2+y^2)^2}$ $\quad (z=x+iy)$

2.8. Всякая чисто-действительная (или чисто-мнимая) голоморфная функция - константа.

2.9. $f(z)$, $g(z)$ голоморфны в связной области D ($g(z)\neq 0$ в D).

а) $f(z)+\overline{g(z)}$ действительна $\Longleftrightarrow$ $f(z)=g(z)+c$, где $c\in\mathbb{R}$.

в) $f(z)\cdot\overline{g(z)}$ действительна $\longleftrightarrow$ $f(z)=g(z)\cdot c$, где $c\in\mathbb{R}$.

с) $f(z)\cdot\overline{g(z)}$ неотрицательна $\Longleftrightarrow$ $f(z)=g(z)\cdot c$, где $c\in\mathbb{R}, c\geq 0$.

2.10. а) (теорема Лиувилля). Всякая ограниченная и голоморфная в $\mathbb{C}$ функция - константа.

в) $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и $\operatorname{Re} f(z)$ ограничена $\Rightarrow$ f - константа.

2.11. $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и $\frac{f(z)}{|z|^p}$ ограничено (при $z\to\infty$) $\Longrightarrow$ $f(z)$ полином степени не выше p.

2.12. $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в связной области D и $f(z)\cdot g(z)\equiv 0$ в D. Тогда $f(z)\equiv 0$ или $g(z)\equiv 0$ в D.

2.13. а) $f(z)$ голоморфна в точке $z=0$ и $f(z)=f(2z)$ для всех $|z|<\varepsilon$ $\Longrightarrow$ $f(z)$ - константа.

в) Если $f(z)$ голоморфна в области D, содержащей ∞ и периодична (т.е. для всех z: $f(z)=f(z+z_0)$, где $z_0\neq 0$), то f - константа. (Функция $f(z)$ голоморфна в ∞, если $f(\frac{1}{z})$ голоморфна в 0.)

2.14. Пусть $f(z)=f(x+iy)$ голоморфна в D. Тогда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(x+iy)|^2 = 4\cdot|f'(x+iy)|^2.$$

2.15. (теорема о среднем). Пусть $f(z)$ голоморфна в выпуклой области D. Тогда $\forall a,b\in D$ $\exists$ $c,d\in[a,b]$ (отрезку, соединяющему a и b), что

$$f(a)-f(b)=(a-b)\cdot(\operatorname{Re} f'(c)+\operatorname{Im} f'(d)).$$

Интегрирование

3.0. а) Может ли окружность быть образом негладкого C^1-пути?

в) Может ли граница квадрата быть образом C^1-пути?

3.1. а) $f(z)$ голоморфна в односвязной области D и $|f(z)|\leq M$ в D. Тогда $\left|\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz\right| \leq M\cdot\rho_D(z_1,z_2)$, где $\rho_D(z_1,z_2)$ есть нижняя грань длин ломаных, соединяющих z_1 и z_2 в D.

в) $f(z)$ голоморфна в выпуклой области D, причем $\operatorname{Re}(e^{i\varphi}\cdot f(z))\geq M$ для всех $z\in D$ (φ не зависит от z). Тогда

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz\right| \geq M\cdot|z_2-z_1|.$$

3.2. Пусть $f(z)$ голоморфна в полосе $|\mathrm{Im}\, z|<a$ и $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$. Если сходится интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, то $\forall \alpha\in(-a,a)$ $\int\limits_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(z)\,dz = I$.

3.3. Пусть $f(z)$ голоморфна в полосе $|\mathrm{Im}\, z|<a$, тогда:

а) $f(z)\to 0$ при $z\to\infty$ (равномерно при $|\mathrm{Im}\, z|<a-\varepsilon$) $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $f'(z)\to 0$ при $z\to\infty$ (равномерно там же).

в) $z\cdot f(z)\to 1$ при $z\to\infty$ (равномерно при $|\mathrm{Im}\, z|<a-\varepsilon$) $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $z\cdot f'(z)\to 0$ при $z\to\infty$ (равномерно тамже).

с) Функция $f(z)=\frac{1}{z+i}\, e^{e^{iz}}$ голоморфна при $|\mathrm{Im}\, z|<1$, $z\cdot f(z)$ ограничена при $z\to\infty$, $f'(x)\geq \frac{1}{x}$ при $x\in\mathbb{R}, x>0$.

3.4. Пусть $f(z)$ голоморфна в области D, содержащей ∞ (см.2.13).

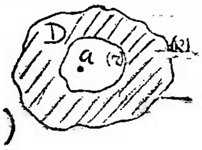
а) $f(z)$ имеет первообразную в $D \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} z\cdot f(z) = 0$.

в) $f(z)$ имеет первообразную в $(D\setminus\{\infty\}) \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} z(f(z)-f(\infty))=0$

3.5. Пусть $f(z)$ голоморфна в области D, содержащей ∞. При этом интегральная формула Коши принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \begin{cases} f(z)-f(\infty), & z\in D \\ -f(\infty), & z\notin D \end{cases}$$

3.6. а) Пусть $f(z)$ голоморфна в кольце $D:(r<|z-a|<R)$. Тогда $f(z)$ представима, причем единственным образом, в виде $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ где $f_1(z)$ голоморфна в круге $|z-a|<R$, а $f_2(z)$ голоморфна при $|z-a|>r$, и $f_2(\infty)=0$.



в) То же имеет место, если рассматривать "кольцо" D с не обязательно круговыми границами (см.рис.)

3.7. (теорема о среднем). Если $f(z)$ голоморфна при $|z-a|<R$, то для всех $\rho<R$: $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a+\rho\cdot e^{i\varphi})\,d\varphi = f(a)$.

3.8. (принцип максимума модуля). Если $f(z)$ голоморфна в D, $f(z)\neq\mathrm{const}$, то $|f(z)|$ не может достигать локального максимума внутри D.

3.9. Если $f(z)=\mathrm{const}$ на контуре C, содержащемся вместе с внутренностью в области D, где f голоморфна, то $f(z)$ постоянна в D или имеет нуль внутри контура C.

3.10. (лемма Шварца). Если $f(z)$ голоморфна при $|z|<1$ и $|f(z)|<M$, $f(0)=0$, то $|f(z)|\leq M\cdot|z|$ в круге $|z|<1$.

3.11. Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<R$, $|f(z)|<M$, $f(0)=0$, то $f'(0)\leq\frac{M}{R}$.

3.12. Пусть $f(z)$ голоморфна в круге $|z|\leq 1$.

а) $$\overline{\int\limits_{|z|=1} f(z)\,dz} = -\int\limits_{|z|=1}\overline{f(z)}\,\frac{dz}{z^2}$$

в) $$\int\limits_{|z|=1}\frac{\overline{f(z)}}{z-a}\,dz = \begin{cases} \overline{f(0)}, & \text{если } |a|<1, \\ \overline{f(0)}-\overline{f\left(\frac{1}{\bar a}\right)}, & \text{если } |a|>1. \end{cases}$$

Ряды Тейлора и Лорана. Особые точки.

4.I. Разложить в ряд Тейлора (по степеням z):

а) $\sin z$; $\cos z$; в) $\sin^2 z$; с) $e^z \cdot \sin z$.

4.2. Ряд Тейлора для $f(z)=\dfrac{1}{1-z-z^2}$ (в окрестности нуля) есть $\sum A_n z^n$, где A_n - последовательность Фибоначчи: $A_0=A_1=1$, $A_{n+2}=A_{n+1}+A_n$. Вычислите коэффициенты A_n.

4.3. Пусть $f(z)=\sum a_n z^n$ в круге $|z|<R$. Тогда для $|a|<R$ $f(z)=\sum b_n(z-a)^n$, в круге $|z-a|<R-|a|$, где $b_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\cdot\dfrac{(n+k)!}{n!k!}a^k$. (связь коэффициентов ряда Тейлора в разных точках).

4.4. Разложить в ряд Лорана (во всех кольцах голоморфности, включая бесконечное): а) $\dfrac{1}{(z+1)\cdot(z-2)}$; в) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$;

с) $z^3\cdot e^{1/z}$; d) $\dfrac{1}{z(1-z)}\cdot e^z$; е)* $e^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})}$.

4.5. Пусть $f(z)=g(z)+\dfrac{A}{(z-z_0)}$, где $g(z)$ голоморфна в кольце $r<|z|<R$ и $r<|z_0|<R$. Пусть $f(z)=\sum a_n z^n$ при $r<|z|<|z_0|$ и $f(z)=\sum b_n z^n$, при $|z_0|<|z|<R$. Тогда $b_n=a_n+A\cdot(z_0-a)^{-(n+1)}$. (Связь коэффициентов ряда Лорана в различных кольцах.)

4.6.а) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{(2^n)}$ голоморфна при $|z|<1$ и не голоморфна ни в какой точке $|z|=1$ (то есть каждая точка $|z|=1$ - особая).

в) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{(n!)}$ голоморфна при $|z|<1$ и каждая точка $|z|=1$ особая (так как $\lim\limits_{r\to 1}(re^{i\varphi})=\infty$ при рациональном φ).

с) $f(z)=\sum\dfrac{z^{(2^n)}}{2^n}$ голоморфна при $|z|<1$ и непрерывна в круге $|z|\leq 1$ однако каждая точка $|z|=1$ - особая!

4.7. Пусть $f(z)$ голоморфна при $0<|z-a|<r$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_0^{2\pi}|f(a+\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi=0$.

Тогда $f(z)$ может быть доопределена до функции голоморфной в точке а (то есть а - устранимая особенность для $f(z)$).

4.8. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в точке а, причем $f(a)=g(a)=0$.

Тогда $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{g'(z)\cdot f^2(z)}{f'(z)\cdot g^2(z)}$.

(способ "раскрытия неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ ").

4.9. Определить характер особенности в точке $z=0$ для функций:

а) $\dfrac{\sin z}{z}$; $\dfrac{z}{1-\cos z}$; в) $\cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$; $\left(\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)^{-1}$;

с) $\sin(e^{1/z})$; d) $z\cdot(e^{1/z}-1)$.

4.10. Найти полюсы (и определить их порядок):

а) $\dfrac{1}{z^2+1}$; $\dfrac{z}{z^4+z^2+1}$; в) $\operatorname{tg} z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$; $\sec z^2=\dfrac{1}{\cos z^2}$;

с) $\dfrac{1}{\sin z\pm\sin a}$; $\dfrac{1}{\cos z\pm\cos a}$; d) $z\cdot(e^z+1)^{-1}$.

4.11. а)($f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и имеет полюс порядка р в точке ∞) $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ ($f(z)$ - полином степени р).

в) ($f(z)$ не имеет в $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ особых точек кроме полюсов) $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ ($f(z)$ рациональная функция (частное от деления 2-х полиномов).

4.12. Функция $f(z)$ имеет полюс порядка р в точке а $\Longleftrightarrow f(z)$ представима в виде $\frac{g(z)}{h(z)}$, где функции $g(z)$ и $h(z)$ голоморфны в точке а причем $g(a)\neq 0$, а $h(z)$ имеет в точке а нуль порядка р.

4.13. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют в точке ∞ полюс порядка п и к соответственно, то функция $F(z)=f(g(z))$ имеет в точке ∞ полюс порядка п·к.

4.14. Пусть $g(z)$ голоморфна в точке а и $g(a)=в$.

а) Если в – полюс порядка п функции $f(z)$, то а есть полюс порядка (п·к) функции $F(z)=f(g(z))$, где к – порядок нуля функции $(g(z)-в)$ в точке а.

в) Если в – существенно особая точка функциии $f(z)$, то а – существенно особая точка функции $F(z)=f(g(z))$.

4.15. Пусть а – предельная точка полюсов функции $f(z)$ (то есть существует последовательность $a_п \to a$, где все $a_п$ полюсы и $f(z)$ не имеет иных особых точек в окрестности точки а). Тогда $\forall w\in\mathbb{C}\ \exists z_n\to a\ f(z_n)\to w$ (аналог теоремы Сохоцкого).

4.16. а) e^z имеет существенно особую точку в ∞ и в любой ее окрестности принимает все значения кроме 0 (исключительное Пикаровское значение!).

в) $\sin z$ имеет существенно особую точку в ∞ и в любой ее окрестности принимает все без исключения комплексные значени

4.17. а) $f(z)=e^{-1/z^2}$: $z=0$ существенно особая точка, а при $x\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

в) $f(z)=z\cdot e^{1/z}$: $=0$ существенно особая точка, но при этом $\lim\limits_{(Re\, z\leq 0,\ z\to 0)} f(z)=0$.

4.18. Пусть $f(z)$ голоморфна при $0<|z-a|<r$ и $Re\, f(z)>0$ в окрестности точки а. Тогда а – устранимая особенность для $f(z)$.

4.19. Пусть $z=a$ – существенно особая точка для $f(z)$. Тогда $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ во всякой окрестности точки а функция $f(z)$ принимает некоторое значение W из отрезка $[\alpha,\beta]$.

4.20. Пусть а – существенно особая точка для $f(z)$. Тогда во всякой окрестности точки а:

а) $Re\, f(z)$; в) $Im\, f(z)$; с) $\frac{Re\, f(z)}{Im\, f(z)}$

принимают все действительные значения.

ЗАДАЧИ ПО ТФКП

Применения вычетов

5.1. Найти интегралы: а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(4x^2+1)^2}$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^n}$;
в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$ $(a,b\in\mathbb{R})$ г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$; д) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$;
е) $\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos t\,dt}{1-2a\cos t+a^2}$ $(a\in\mathbb{R})$, ж) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\log^2 x}{1+x^2}\,dx$.

5.2. Доказать: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)((\log x)^2+\pi^2)}=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$.

5.3. Пусть $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$; $\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$. Доказать: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}a}=\frac{\pi\sin a}{\operatorname{sh}\pi\operatorname{sh}a}$.

5.4. Доказать: $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,dx=\frac{\pi}{a}\log(1+a)$ (при $0<a<1$).

5.5. а) Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos xt\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,f(t)$, где $f(x)=\operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$
б) Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin xt\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,f(t)$, где $f(x)=\frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1}-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$

5.6. Найти интегралы (∂D обозначает границу области D с обходом против часовой стрелки): а) $\int\limits_{\partial D}\sin\frac{z}{z+1}\,dz$; $D=\{z\,|\,|z|<3\}$;
б) $\int\limits_{\partial D} e^{\frac{1}{1-z}}\,dz$; $D=\{z\,|\,|z-2|+|z+2|<6\}$; в) $\int\limits_{\partial D}\frac{z^3\,dz}{e^{z^2}-1}$; $D=\{z\,|\,|z|<4\}$; г) $\int\limits_{\partial D}\frac{ze^{-z}}{z^2-1}\,dz$; $D=\{z\,|\,\operatorname{Re} z>0\}$.

5.7. Доказать: а) $\int\limits_0^{+\infty}\sin\log x\,dx/x^2-1=\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\log x}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx=\pi^2$.

5.8. Найти интегралы: а) $\int\limits_0^{+\infty}\log x\,dx/(x+1)^2$; б) $\int\limits_0^{+\infty}x^2dx/\operatorname{ch}x$;
в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^x dx/(4x^2+\pi^2)\operatorname{ch}x$.

5.9. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} z=z$ имеет только действительные корни.

5.10. Пусть $\varepsilon>0$, $f_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,z^k}$. Доказать, что
$\exists N\ \forall n>N\ \forall z\ (f_n(z)=0\Longrightarrow |z|<\varepsilon)$.

5.11. Найти суммы рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^4+1$; б) $\sum\limits_{n\geq 1}n^2/n^4+1$;
в) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n n\sin\alpha n/x^2-n^2$ $(-\pi<\alpha<\pi,\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z})$; г) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n/n^3$.

5.12. Доказать: а) $\sum\limits_{n\geq 1}1/n^3\sin(\sqrt{2}\pi n)=-\frac{13\pi^3}{360\sqrt{2}}$;
б) $\sum\limits_{n\geq 1}\operatorname{cth}\pi n/n^7=19\pi^7/56700$.

5.13. Доказать формулы: а) $1/\sin^2 z=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}1/(z-n\pi)^2$; б) $\operatorname{tg} z=-\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}$; в) $\pi^2/\sin^2\pi z=\pi\alpha+\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha(z-n)}{(z-n)^2}$ $(0\leq\alpha<\pi)$;
г) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

5.14. Доказать формулы: а) $\sin z=z\prod\limits_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$;
б) $\cos\pi z=\prod\limits_{n\geq 1}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)$
в) $\operatorname{ch} z-\cos z=z^2\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right)$

A1

З А Д А Ч И П О Н Е П Р Е Р Ы В Н Ы М Ф У Н К Ц И Я М

1. Доказать эквивалентность приведенных определений неп рерывности.

2. Доказать, что функции $y=x$; $y=x^3$; $y=1/x$ непрерывны при $x=2$.

3. Доказать, что сумма и произведение функций, заданных и непрерывных на одном метрическом пространстве, непрерывна. При каких условиях это утверждение верно для частного двух функций?

4. Многочлен $P_n(x)$ непрерывен на всей действиетльной прямой. Доказать.

5. Рациональная дробь $P^1_n(x)/P^2_m(x)$ непрерывна во всех точках действительной пря мой, где она определёна.

6. Найти области непрерывности тригонометрических функций на прямой.

7. Если функция непрерывна в некоторой точке и положительна в ней, то найдется окростность данной точки, в которой функция также положительна.

8. Функция Д ирихле: $Д(x) = \begin{cases} 0 & \text{при иррациональных } x \\ 1 & \text{при рациональных } x \end{cases}$ разрывна во всех точках действительной пря-мой.

9. Построить на действительной пря мой функции, непрерывные в одной, двух и 10 точках; во всех целых точках (Разрывные во всех остальных точках прямой) Существет ли функция, заданная на действительной пря-мой и имеющая разрывы только в точках вида $X=1/n$?

10. Построить на действительной прямой функции, разрывные в одной, двух, во всех целых точках (непрерывные в остальных точках прямой).

11.* Доказать, что функция Римана $P(x)= \begin{cases} 0 & \text{при иррациональных } x \\ 1/n & \text{при } x=m/n, \text{ причем } m/n \text{ - несократимая дробь,} \end{cases}$ непрерывна в иррациональных и разрывна в рациональных точках.

12.** Построить на действительной прямой монотонную функцию, непрерывную в иррациональных и разрывную в рациональных точках.

13. Построить на метрическом пространстве M непрерывную функцию, равную 0 на данном замкнутом множестве и положительную на его дополнении.

14. Доказать, что если две непрерывные функции совпадают на некотором всюду плотном множестве, то они совпадают на всем пространвтве.

15. Доказать, что множество непрерывных функций на сепарабельном метрическом пространстве континуально.

16.* Построить на множестве рациональных точек такую функцию, что любая функция на действительной прямой, совпадающая с ~~[illegible]~~ такой функцией в рациональных точках, всюду разрывна.

17.* Построить на действительной прямой функцию, не ограниченную на каждом интервале.

18. Пусть $f(x) \in C(R)$; $a \in R$. Пусть $M_1=\{x: f(x)>a\}$; $M_2=\{x: f(x)=a\}$; $M_3=\{x: f(x)\leq a\}$; Тогда M_1 - открыто, а M_2 и M_3 - замкнуты.

19. Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$ и $\forall c$ $M_1=\{x: f(x)\geq c\}$ и $M_2=\{x: f(x)\leq c\}$ замкнуты. Тогда $f(x)\in C[a,b]$.

20.* Построить на действительной пря-мой такую функцию, что на любом интервале она принимает все действительные значения.

21. Доказать, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. $(x \in]0;\frac{\pi}{2}[)$.

22. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

23. Доказать, что последовательность периметров P_n правильных n-угольников, вписанных в окружность единичного радиуса имеет предел (обозначаемый 2π).

24. Пусть $P_n = x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to -\infty} P_n(x)=\begin{cases} +\infty, & n=2k \\ -\infty, & n=2k+1 \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to\infty} P_n(x)= \infty$.

A2

25. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция. Тогда $\Phi(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } -a\le f(x)\le a,\\ a, & \text{если } f(x)>a,\\ -a, & \text{если } f(x)<-a\end{cases}$

также непрерывна. (Здесь a - положительное число.)

. Определение: множество A, принадлежащее метрическому пространству M, называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств.

26. Если функция определена на связном множестве и непрерывна на нем, то она принимает все промежуточные значения (т.е. если $f(x)=a$; $f(y)=b$ и $a<b$, то $\forall c$ такого, что $a<c<b$ $\exists t$ такое, что $f(t)=c$). (Это-теорема о промежуточном значении.)

27. Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

28. Пусть $f(x)\in C[0,1]$ и принимает значения из $[0,1]$. Тогда найдется $c\in[0,1]$ такое, что $f(c)=c$.

29. Построить непрерывную ф-ию, отображающую $]0,1[$ в $]0,1[$ и не имеющую неподвижных точек.

30.* Пусть f: окружность $S^1\to R$ непрерывна. Тогда найдется диаметр окружности в концах которого ф-ия принимает равные значения. (Из этого вытекает, что прямая и окружность не гомеоморфны.)

31. Функция заданная на метр. пространстве M принимает конечное число значений. Доказать, что множество точек непрерывности такой ф-ии открыто.

32. Построить пример ф-ии, удовлетворяющей теореме о промежуточном значении и разрывной в некоторой точке.

33. Построить ф-ию, принимающую все промежуточные значения и всюду разрывную.

34. Верно ли такое усиление теоремы о промежуточном значении: если $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$, то $\forall m$ такого, что $f(a)<m<f(b)$, найдется такое $c\in[a,b]$ и такое $\delta>0$, что

1. $f(c)=m$.

2. При $0<h<\delta$ $\quad \begin{cases} f(c+h)\ge m\\ f(c-h)\le m\end{cases}$ или $\begin{cases} f(c+h)\le m\\ f(c-h)\ge m\end{cases}$.

35. Пусть $f(x)$ определена на связном компакте K и такова, что на любом связном замкнутом подмножестве K она принимает и притом конечное число раз, любое промежуточное значение. Тогда $f(x)$ непрерывна на K. (Существенно ли требование конечности числа раз примаемых промежуточных значений?)

36. Существует ли непрерывная ф-ия на отрезке, которая принимает каждое свое значение ровно два раза?

37. Построить разрывную ф-ию, удовлетворяющую условиям предыдущей задачи.

38. Доказать, что любой выпуклый многоугольник на плоскости можно разделить прямой заданного направления на две равновеликие части.

39.* Доказать, что любые два выпуклые многоугольника на плоскости можно разделить некоторой прямой на две равновеликие части. (Разумеется, одновременно оба.)

40.* Доказать, что выпуклый многоугольник на плоскости можно разделить двумя перпендикулярными прямыми на ~~на~~ четыре равновеликие части.

41. Построить на $]0,1[$ непрерывные ф-ии $f_1(x)$ и $f_2(x)$ такие, что $f_1(x)$ не ограничена, а $f_2(x)$ ограничена, но не принимает наибольшего и наименьшего значения.

42. Доказать, что около выпуклой фигуры на плоскости можно описать квадрат.

43. Дать определение: "$f(x)$ не является равномерно непрерывной на M."

44. x, $\sin(x)$ - равномерно непрерывны на прямой, а $y=x^2$, $y=1/x$, $y=\sin(x^2)$ и $y=\sin(1/x)$ не равномерно непрерывны на $]0,\infty[$.

45. Является ли функция $y=x^{1/2}$ равномерно непрерывной?

46. Если производная функции ограничена на прямой, то данная функция равномерно непрерывна на прямой. Доказать.

Верно ли, что если производная не ограничена, то функция не является равномерно непрерывной?

47. Построить графики функций: $\sin\frac{1}{x}$; $x\sin\frac{1}{x}$; $x^2\sin\frac{1}{x}$; $\sin(x^2)$; $e^{-\frac{1}{x}}$.

48. Доказать, что функцию $y=x\sin(1/x)$ можно продолжить до непрерывной на всей прямой.

49.* Пусть $f(x)\in C(Q)$. Можно ли ее продолжить до непрерывной на всей прямой? При каком условии это возможно?

Переформулировать и доказать соответствующее утверждение для любого сепарабельного пространства.

50. Если функция непрерывна, монотонна и ограничена на прямой, то она равномерно непрерывна на ней.

51. Верно ли, что любая функция, заданная на компакте и достигающая наибольшего и наименьшего значения на любом замкнутом подмножестве компакта, непрерывна на нём?

52.* Если непрерывная функция имеет обратную, то она монотонна.

53. Построить на прямой разрывную функцию, имеющую обратную.

54. Найти все непрерывные функции, отображающие $[0,1]$ в себя, для которых $f(0)=0$; $f(1)=1$ и $f(f(x))=x$.

Разные задачи.

55.** Используя утверждение п.3.3. доказать, что не существует функции, непрерывной в рациональных и разрывной в иррациональных точках.

56. Существует ли непрерывная функция, принимающая в рациональных точках иррациональные значения, а в иррациональных – рациональные?

57.* Если $f(x)\in C(R)$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)$, то $f(x)=ax$. Доказать.

58.* Если $f(x)\in C(R)$ и $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, причем $f(0)\neq 0$, то найдется $a>0$ такое, что $f(x)=a^x$.

59.* Построить на прямой разрывную функцию $f(x)$ такую, что $f(0)\neq 0$; и $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

60. Доказать, что уравнение $2^x=x^{100}$ имеет не менее трех действительных корней.

61. Доказать, что для всякой функции на прямой найдутся и притом единственным образом четная и нечетная функции, такие, что исходная функция представляется суммой последних.

62.** Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на окружности. Доказать, что для всякого в найдется точка окружности с такая, что $f(c)=f(c+в)$.

63.** а) $f(x)$ – непрерывная функция отрезка $[0,1]$, причем $f(0)=f(1)$. Доказать, что для любого целого n найдется точка $x\in[0,1]$, для которой $f(x)=f(x+1/n)$.

в) Для любого $a\neq 1/n$ можно построить функцию $f(x)$, для которой $f(x)\neq f(x+a)$ при всех $x\in[0,1]$. Доказать. (Функция удовлетворяет условию п.а).)

64.** Существует ли на отрезке непрерывная и ни на каком внутреннем интервале не монотонная функция?

65.* Пусть $f(x)$ задана на $[0,1]$ и $f(x)=0$ при $x\in K$ (канторову множеству); в середине каждого смежного интервала К $f(x)=1$ и линейно убывает к 0 в концах такого интервала. Найти все точки разрыва этой функции.

66.** Используя понятие связности доказать, что R^1 и R^2 не гомеоморфны.

А4

Пространство $C^*(X)$ /методические разработки/

1. Пространство Огр(X).

Пусть X – произвольное множество. Элементами метрического пространства Огр(X) будут ограниченные функции $X \to \mathbb{R}$ /не обязательно непрерывные, да и вообще на X не предполагается никакой структуры метрического пространства/. Расстояние между f и g определим формулой $\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$. Если X конечно и содержит n элементов, то Огр(X) можно отождествить с $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Огр(X) полно.

Доказательство. Пусть f_n – фундаментальная последовательность, тогда для всякого $x \in X$ последовательность $f_n(x)$ фундаментальна в $\mathbb{R}$; пусть $f(x)$ – ее предел. Тогда $f_n \to f$ в пространстве Огр(X).

Если $f_n \to f$ в пространстве Огр(X), то говорят, что последовательность f_n равномерно сходится к f. Более слабое условие – для всех $x \in X$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ – называется поточечной сходимостью.

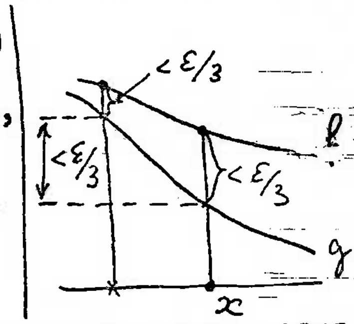
Задача /дополнительная/. Если X несчетно, то в Огр(X) нельзя ввести метрику, сходимость в которой была бы равносильна поточечной сходимости. /Почему?/. Однако топологию ввести можно /Как?/ Если X счетно, то можно ввести и метрику. /Как?/. А для конечного X равномерная и поточечная сходимости совпадают.

2. Пространство $C^*(X)$.

Пусть X – метрическое пространство. Тогда в Огр(X) можно выделить подмножество $C^*(X)$, состоящее из ограниченных непрерывных функций. Если X компактно, то все непрерывные функции на нем ограничены и это пространство обозначают просто $C(X)$ /C от continuous – непрерывный/

Теорема. $C^*(X)$ – замкнутое подмножество Огр(X) /Следовательно, $C^*(X)$ полно./ Другими словами, равномерный предел непрерывных функций есть непрерывная функция.

Доказательство. Пусть f – точка касания $C^*(X)$. Докажем непрерывность f в произвольной точке x, а именно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем окрестность, в которой f отклоняется от своего значения в x не более чем на ε. Для этого найдем функцию g из $C^*(X)$, отстоящую от f не более чем на $\varepsilon/3$ и затем в качестве искомой возьмем ту окрестность x, в которой g отличается от своего значения в x не более чем на $\varepsilon/3$.



Замечание. Таким образом, если f_n непрерывны и последовательность f_n равномерно сходится к f, то f непрерывна. Поточечной сходимости недостаточно: поточечный предел непрерывных функций может быть разрывен /приведите пример/. /Однако функция Дирихле, например, не может быть представлена как поточечный предел непрерывных функций; докажите это в качестве дополнительной задачи./

3. Теорема Арцела – Асколи.

В силу полноты $C^*(X)$ замкнутое вполне ограниченное множество в нем компактно. В случае компактного X имеется следующий критерий полной ограниченности.

Теорема. Пусть X компактно, $M \subset C(X)$. Тогда M вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнены условия /1/ и /2/:

/1/ M равномерно ограничено;

/2/ M равностепенно равномерно непрерывно.

Условие /1/ означает, что существует такое C, что

$(\forall x \in X)(\forall f \in M)(|f(x)| \le C)$

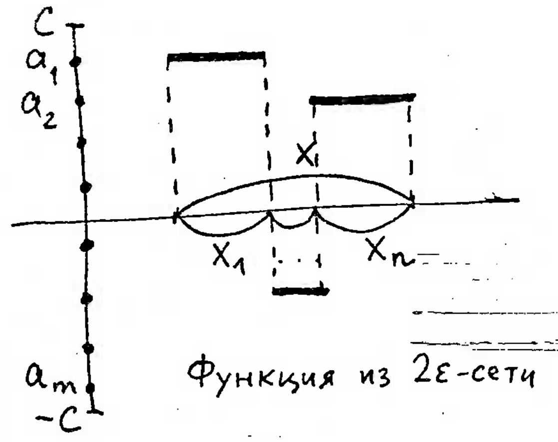
Условие /2/ означает, что $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$

$(\forall x_1, x_2 \in X)(\forall f \in M)[\rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon]$

Иными словами, /1/ означает, что все функции из M ограничены одной константой; /2/ означает, что для всякого ε существует δ, пригодное для всех точек и всех функций из M.

Доказательство. А. Пусть M вполне ограничено, $f_1 \ldots f_n$ – ε-сеть в M. Все f_i ограничены какими-то C_i, тогда любая функция из M ограничена $\max\{C_i\} + \varepsilon$. Все f_i равномерно непрерывны /напоминаем, X компактно/, поэтому существуют такие δ_i, что $\rho(x_1, x_2) < \delta_i$ влечет $|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \varepsilon$. Если $\rho(x_1, x_2) < \min\{\delta_i\}$, а f – любая функция из M, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon + 2\varepsilon$. Отсюда вытекает равностепенная равномерная непре-

Б. Пусть М равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Для доказательства полной ограниченности М достаточно /при любом $\varepsilon > 0$ / покрыть его шарами радиуса 2ε с центрами в некоторых точках Огр(Х) /не обязательно лежащих в М !/. Пусть δ выбрано по ε из условия равностепенной непрерывности. В силу компактности Х оно вполне ограничено и его можно представить как объединение $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ непересекающихся множеств диаметра меньше δ. Все функции из М в силу равномерной ограниченности не превосходят некоторого С; пусть $a_1, \ldots, a_m$ - ε-сеть в $[-c, c]$. Тогда искомое конечное множество в Огр(Х) есть множество функций, постоянных на каждом X_i и принимающих там любое из значений $a_1, \ldots, a_m$: любая функция из М отстоит от одной из таких функций не более чем на 2ε.



Следствия. 1. Замкнутое равномерно ограниченное равностепенно равномерно непрерывное множество функций на компактном пространстве Х является компактным в метрике $C(X)$.

2. Всякая равномерно ограниченная равностепенно равномерно непрерывная последовательность функций на компакте имеет равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Замечание. Так как Х компактно, то условие равномерной ограниченности равносильно условию поточечной ограниченности: "для всякого $x \in X$ множество $\{f(x) \mid f \in M\}$ ограничено", а условие равностепенно равномерной непрерывности - условию равностепенной непрерывности в каждой точке: "для всякого $x \in X$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки x, что для всех $y \in U$ и для всех $f \in M$ верно $|f(y) - f(x)| \le \varepsilon$".

3. Теорема Стоуна - Вейерштрасса.

Вейерштрассом в прошлом веке была доказана

Теорема. Множество многочленов плотно в пространстве $C[a,b]$. /Иными словами, всякая непрерывная функция на отрезке может быть равномерно приближена многочленами./ Обобщение, сделанное Стоуном уже в нашем веке, таково:

Теорема. Пусть Х - компакт, $F \subset C(X)$,

/1/ F - алгебра, то есть вместе с любыми функциями f, g содержит функции $f+g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

/2/ F содержит константы;

/3/ F разделяет точки $(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists f \in F)(f(x) \neq f(y))$

/4/ F замкнуто.

Тогда $F = C(X)$ / содержит все непрерывные функции на Х/.

Следствие. Если для F выполнены /1/-/3/, то F плотно в $C(X)$.

Вывод следствия. В самом деле, тогда для замыкания F выполнены /1/-/4/. /Доказательство /1/ использует непрерывность сложения и умножения в $C(X)$ /

Замечание. Если $X = [a,b]$, а F - многочлены, получаем теорему Вейерштрасса.

Доказательство теоремы Стоуна.

А. Частный случай теоремы Вейерштрасса.

Лемма. Функция $x \mapsto |x|$ на $[-1, 1]$ может быть равномерно приближена многочленами: существует последовательность многочленов p_n, которая сходится в $C[-1,1]$ к этой функции.

Существует много доказательств этой леммы; впоследствии мы рассмотрим другое, более наглядное, доказательство, использующее понятие интеграла. А сейчас рассмотрим последовательность многочленов q_n: пусть $q_0 = 0$, $q_{n+1}(t) = q_n(t) + \frac{1}{2}(t - q_n^2(t))$. Тогда при $t \in [0,1]$ верно $0 \le \sqrt{t} - q_n(t) \le 2\sqrt{t}/(2 + n\sqrt{t})$ /индукция по n/, поэтому q_n сходится к $x \mapsto \sqrt{x}$ в $[0,1]$. Теперь ясно, что полиномы $p_n(x) = q_n(x^2)$ сходятся к $x \mapsto |x|$ в $[-1,1]$.

Б. Если $f \in F$, то $|f| \in F$.
Можно считать, что $|f(x)| \le 1$ /иначе перейдем к f/C /. Тогда $P_n(f)$ равномерно сходится к $|f|$ /так как P_n сходится к модулю/ и принадлежит F /так как F - алгебра, содержащая константы и f /. В силу замкнутости $|f| \in F$.

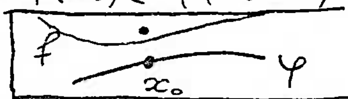
В. Если $f, g \in F$, то $\max(f,g)$ и $\min(f,g) \in F$. /Они, очевидно, непрерывны./ В самом деле, их можно линейно выразить через $f+g$ и $|f-g|$, решив систему:

$$\begin{cases} \max(f,g) + \min(f,g) = f+g \\ \max(f,g) - \min(f,g) = |f-g| \end{cases}$$

Следствие. $f_1,\dots,f_n \in F \Rightarrow \max(f_1\dots f_n),\ \min(f_1,\dots,f_n) \in F$.

Г. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Тогда существует такая функция f из F, что $f(x_1)=a_1$, $f(x_2)=a_2$.
В самом деле, пусть g разделяет точки x_1 и x_2 и принадлежит F; тогда искомую f можно найти в виде $C_1 g + C_2$.

Д. Пусть φ - непрерывная функция на X, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $f \in F$, такая, что всюду $\varphi(x) \le f(x)$ а в точке x_0 f "почти равно" φ: $\varphi(x_0) \le f(x_0) \le \varphi(x_0+\varepsilon)$



(На самом деле при нашем построении $f(x_0) = \varphi(x_0)+\varepsilon$, но для дальнейшего это неважно.)

Доказательство. Для каждого $x \in X$ найдем функцию f_x, удовлетворяющую условиям $f_x(x_0) = \varphi(x_0)+\varepsilon$; $f_x(x) = \varphi(x)+\varepsilon$ /Г/. /В частности, это делается и для $x = x_0$/. Пусть $V_x = \{y \mid f_x(y) > \varphi(y)\}$ тогда $x \in V_x$ и поэтому V_x - открытое покрытие X. Если $V_{x_1},\dots V_{x_n}$ - конечное подпокрытие, то $\max(f_{x_1},\dots,f_{x_n})$ - искомая функция.

Е. Пусть φ - непрерывная функция на X, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая $f \in F$, что $\rho(\varphi, f) < 2\varepsilon$.

Доказательство. Пусть для каждого x через f^x обозначается функция из F, удовлетворяющая условиям: /1/ $\varphi \le f^x$ и /2/ $f^x(x) \le \varphi(x+\varepsilon)$ /см.Д/. Пусть U_x - множество $\{y \mid f^x(y) < \varphi(y)+2\varepsilon\}$. Множество U_x открыто и содержит x. Выберем из покрытия $\{U_x\}$ конечное подпокрытие $U_{x_1},\dots,U_{x_n}$. Тогда в качестве f надо взять $\min(f^{x_1},\dots,f^{x_n})$.

Итак, F плотно в $C(X)$, но F замкнуто, поэтому $F = C(X)$. /Это не первое место, в котором используется замкнутость!/. Теорема Стоуна доказана.

Следствия.
1. Непрерывная на прямоугольнике функция может быть равномерно приближена многочленами от двух переменных.
2. Непрерывная периодическая с периодом 2π функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ может быть приближена "тригонометрическими полиномами", то есть функциями вида $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$. *)

Замечание. Можно проверить, что если функция на отрезке не является многочленом, то степени многочленов, входящих в приближающую ее последовательность многочленов, стремятся к бесконечности.

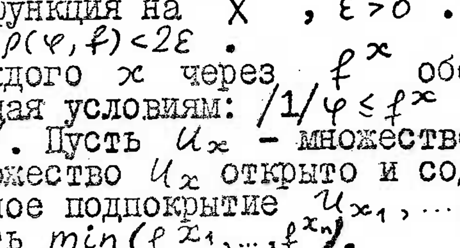


Рисунок к п.Е

*) Это так, потому что периодические функции на прямой можно рассматривать как функции на окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

(план-конспект) А1

I. Пусть E – линейное пространство над R. Действительная функция $x \to \|x\|$ на E называется <u>нормой</u>, если:

(I) $\|x\| \geq 0$; если $x \neq 0$, то $\|x\| > 0$.
(2) Если $a \in R$, то $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ ($|a|$ – модуль a).
(3) Неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Пространство с введенной на нем нормой называется нормированным. Легко видеть, что справедлива

<u>Теорема.</u> Если X – нормированное пространство, то $\rho(a, b) = \|a - b\|$ – метрика на X.

Таким образом в нормированном пространстве определяется сходимость, открытость, компактность и т.д.

2. Пусть E и Φ – два нормированных пространства; $A: E \to \Phi$ – линейный оператор.

<u>Теорема.</u> Следующие свойства равносильны:

(I) A непрерывен; (I') A непрерывен в 0; (I") A непрерывен в некоторой точке; (2) A ограничен в некоторой окрестности 0; (2') A ограничен в единичном шаре; (2") A ограничен на любом ограниченном множестве; (2"') существует такое C, что для всякого $x \in E$ $\|Ax\| \leq C\|x\|$; (2"") Частное $\|Ax\|/\|x\|$ при $x \neq 0$ ограничено.

<u>Указания к доказательству:</u> (I)<=>(I')<=>(I"). Пусть x_0 – точка E. Тогда $A(x_0+y) - Ax_0 = Ay$. Поэтому поведение A в окрестности x_0 определяется его поведением в окрестности 0.

(2)<=>(2')<=>(2")<=>(2"')<=>(2""). Все шары подобны, и операторы отличаются на коэффициент подобия.

(I)<=>(2) Если A непр. в 0, то A ограничен в нек-ой окрестности 0.
(2)<=>(I) Если $\|Ax\| \leq C\|x\|$, то A непрерывен.

3. Число $\sup\limits_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|Ax\|$ называется <u>нормой оператора A</u> и обозначается $\|A\|$. Очевидно, $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

<u>Теорема.</u> Введенная норма превращает пространство $L(E, \Phi)$ линейных непрерывных операторов из E в Φ в нормированное. Это пространство полно, если полно Φ.

<u>Указания к д-ву</u>: Нер-во тр-ка: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$; $\Rightarrow \|(A + B)x\| \leq \|(A + B)\| \cdot \|x\|$.
Полнота. Пусть последовательность A_n – фундаментальна. Тогда, если ее предел A, то A линеен. Последовательность $\|A_n\|$ ограничена некоторым C, поэтому $\|Ax\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} A_n x\| \leq \sup \|A_n x\| \leq C \cdot \|x\|$.

<u>Задача.</u> Пусть $E = \Phi = R^2$ с нормой $\max(x_1, x_2)$. Найти норму оператора $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

То же для нормы $|x_1| + |x_2|$. (Для обычной нормы это труднее всего.)

4. Пусть $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ – две нормы на векторном пространстве E. Они называются эквивалентными, если задаваемые ими метрики эквивалентны (имеют одинаковые открытые множества, или, что то же, одинаковую сходимость). Вариант определения: нормы эквивалентны, если тождественный оператор из $E_{\|\ \|_1}$ в $E_{\|\ \|_2}$ является гомеоморфизмом (непрерывен вместе с обратным).

Если вспомнить теорему п. 2, легко получить следующую теорему

<u>Теорема.</u> Две нормы $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие константы C_1 и C_2, что $\|x\|_1 \leq C_1 \cdot \|x\|_2$ и $\|x\|_2 \leq C_2 \cdot \|x\|_1$ для всех x.

В метрических пространствах полнота может исчезнуть при замене метрики на эквивалентную. Но в нормированных пространствах это не так.

Теорема. Полнота нормированного пространства не меняется при замене нормы на эквивалентную.

5. Теорема. В R^n все нормы эквивалентны.

Указания к д-ву. Пусть $\|x\|_\Sigma$ – норма $|x_1| + \ldots + |x_n|$, $\|\;\|$ – произвольная норма, $e_1, \ldots e_n$ – базис. Тогда, если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $\|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\| \leq$ $\leq (\max \|e_i\|) \cdot \|x\|_\Sigma$. Итак, одна оценка получена. Из нее следует также, что функция $x \mapsto \|x\|$ непрерывна в $(R^n, \|\;\|_\Sigma)$. Так как единичная сфера в $(R^n, \|\;\|_\Sigma)$ компактна, то непрерывная функция $\|\;\|$ достигает на ней минимума. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех x с $\|x\|_\Sigma = 1$ имеем $\|x\| \geq \varepsilon$. Тогда для всех x $\|x\|_\Sigma \leq (1/\varepsilon)\|x\|$. Итак, $\|\;\|$ эквивалентна $\|\;\|_\Sigma$.

Следствия. 1) В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

2) Конечномерное пространство с любой нормой полно. (Это следует из полноты R^n с обычной нормой.)

3) Конечномерное подпространство в любом нормированном пространстве замкнуто.

4) Любой линейный оператор из конечномерного пространства непрерывен. (Нер-во $A(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) \leq \max_i \|Ae_i\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\|_\Sigma$ устанавливает непр. A в норме $\|\;\|_\Sigma$.

Задача. Пусть в ортонормированном базисе R^n (норма, порождена скалярным произведением) оператор A задан матрицей (a_{ij}). Тогда $\max_i \sum_j a_{ij}^2 \leq \|A\|^2 \leq \sum_i \sum_j a_{ij}^2$

6. Рассмотрим пространство $\mathrm{End}\, R^n$ всех линейных отображений в себя. Это конечномерное векторное пространство размерности (n^2). Если в R^n выбран базис, то $\mathrm{End}\, R^n$ можно отождествить с пространством матриц. ~~Каждая~~

Задача. Сходимость последовательности линейных опреаторов в конечномерном пространстве с базисом $e_1, \ldots, e_n$ эквивалентна сходимости (поэлементной) матриц этих опреаторов. При этом сходимость не зависит от выбора базиса.

Теорема. Множество диагонализируемых операторов плотно в $\mathrm{End}\, R^n$.

Указания к д-ву. Достаточно д-ть, что множество операторов с различными собственными значениями ~~пл~~ плотно в $\mathrm{End}\, R^n$. Если $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ – треугольный вид A, то в качестве A_i можно взять треугольные матрицы у которых наддиагональные элементы совпадают с A, а на диагонали имеют ~~[illegible]~~ различные элементы, сходящиеся к соответствующим элементам $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ A.

Задачи

1. Доказать, что $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = \max_i |x_i|$; $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = \sum_i |x_i|$ являются нормами в R^n.

2. Доказать, что $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$ – норма в R^n. (Подробнее в курсе евклидовой геометрии.

3. Являются ли в пространстве непрерывных функций на $[0,1]$ нормами следующие функции: а) $f \mapsto |f(0)|$; б) $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|dx$ в) $f \mapsto |\int_0^1 f(x)dx|$ г) $f \mapsto \sup_{x \in [0,1]} f(x)$

4. Доказать, что единичный шар в любом нормированном пространстве выпукл. (Единичный шар в нормированном пространстве – мн-во точек x: $\|x\| \leq 1$. Множество A выпукло, если отрезок, соединяющий две точки A весь лежит в A.)

5. В нормированном пространстве $(V, \|\;\|)$ функция $\|\;\|: V \to R$ непрерывна.

6. Замкнуто ли в $C[0,1]$ подпространство непрерывно дифференцируемых функций?

7. Исследовать на линейность и непрерывность операторы из $C[0,1]$ в R, заданные так: а) $f \mapsto f(0)$; б) $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$

8. Исследовать на линейность и непрерывность следующие операторы, действующие из $C[0,1]$ в $C[0,1]$: $f \mapsto (x \mapsto f(\sin x))$; $f \mapsto (x \mapsto \sin(f(x)))$

9. Доказать, что всякий оператор $A: R^n \to E$, где E - произвольное нормированное пространство, и норма в R^n - сумма модулей координат непрерывен

10. Пусть E - пр-во непр. дифференцируемых ф-ий на $[0,1]$ с нормой ~~С~~ $C[0,1]$. Непрерывен ли функционал $f \to f'(1/2)$?

11. Найти норму операторов в задачах 7 и 8.

12.* Найти норму оператора $C[0,1] \to R$: $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx - 2f(0)$.

13.* Построить пример таких пространств E и Ф и такой последовательности линейных непрерывных операторов A_n: E → Ф, что для всякого x существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$, но оператор $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ (как легко видеть, линейный) разрывен.

14. Эквивалентны ли на пр-ве $C[0,1]$ такие нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{и} \quad \|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx ?$$

Полно ли пр-во в этих нормах?

15. Рассмотрим на пр-ве $C^1[0,1]$ непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций нормы:

а) $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$

б) $\|f\| = \sup |f(x) + f'(x)|$

в) $\|f\| = |f(0)| + \sup |f'(x)|$

Доказать, что они эквивалентны.

16.* Доказать, что если единичный шар в некотром пространстве покрыт k шарами меньшего радиуса, то размерность пр-ва не больше k.

17*. Доказать, что единичный шар в бесконечномерном пространстве некомпактен (хотя замкнут и ограничен).

18. Пусть O_n - группа ортогональных преобразований. Доказать, что все элементы этой группы лежат на единичной сфере в R^{n^2}.

19. Описать строение групп O_2 и SO_2 - группы ортогональных преобразований с положительным определителем. Доказать, что первая из них некоммутативна, а вторая - коммутативна.

20. Верно ли равенство: $O_n = SO_n \otimes Z_2$?

Доказать, что O_n состоит из двух связных компонент, одна из которых есть SO_n.

21. Доказать, что ~~линейная~~ группа преобразований n-мерного пр-ва (над R) (GL_n) состоит из двух связных компонент (каждая из которых есть утолщение соответствующей компоненты O_n. Из каких матриц состоит слой этого утолщения.

22. Вычислить размерность SO_n

23. Построить оператор $A_n \in SO_{2n}$, не имеющий собственных векторов.

24* Если $A: R^n \to R^n$ и след A = 0, то существует такой базис, что матрица A в этом базисе имеет нулевые диагональные элементы.

Задачи по нормированным пространствам А 10

I. Пусть E – нормир.пр-во. а) Д-ть, что замыкание открытого шара $\mathcal{U}(a;r)$ есть $B(a;r)$, а внутренность $B(a;r)$ есть $\mathcal{U}(a;r)$.
б) Док-ть, что открытый шар $B(a;r)$ гомеоморфен всему E.

2. Док-ть, что замыкание вект.подпр-ва в нормированном пр-ве есть векторное подпр-во.

3. Пусть E – нормир.пр-во, F – банахово пр-во, G – подпр-во, плотное в E и $f: G \to F$ – непр. лин. отображ. Д-ть, что существует и единственное непр. лин. отображ. $\bar{f}: E \to F$, являющееся продолжением f.

4. Пусть E,F – нормир.пр-ва, $A: E \to F$ – лин. отображ. Д-ть, что если для всякой последовательности (x_n), стремящейся к 0 в E, последовательность $(A(x_n))$ в F ограничена, то A -непрерывен.

5. Пусть E, F, G – нормир. пр-ва, $A \in \mathcal{L}(E,F)$, $B \in \mathcal{L}(F,G)$. Док-ть, что $\|B \circ A\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

6. Док-ть, что для любого нормированного пр-ва E над K отображение $E \to \mathcal{L}(K,E)$, ставящее в соответствие вектору $a \in E$ элемент $\theta_a: \lambda \mapsto \lambda a$, есть линейная изометрия E на $\mathcal{L}(K,E)$.

7. Докажите, что $C_0^* = \ell_1$, $\ell_1^* = \ell_\infty$ и $\ell_p^* = \ell_q$, где $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Равенства означают, что эти пр-ва линейно изометричны.)

8. а) Пусть H – замкнутая гиперплоскость в нормир. пр-ве E, задаваемая уравнением $A(x)=0$, где A – непр. линейная форма на E. Доказать, что $\forall a \in E$ расстояние $d(a,H)$ равно $|A(a)|/\|A\|$.

б) Пусть H – замкнутая гиперплоскость в пр-ве C_0 Банаха (т.е. в пр-ве последовательностей, стремящихся к 0), заданная уравнением $A(x)=0$, где $A((\alpha_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \alpha_n$. Доказать, что для всякого $a \notin H$ расстояние от a до H не достигается.

9. Доказать, что нормированное пр-во, в котором существует компактная сфера, конечномерно.

10. Д-ть, что в нормированном пр-ве достигается расстояние от данной точки до произвольного конечномерного подпр-ва.

II. Доказать, что нормир.пр-во является банаховым $\Longleftrightarrow$ любой абсолютно сходящийся ряд в нем сходится.

I2. Пусть E – нормир. пр-во, L – его замкнутое подпр-во.

а) Д-ть, что функция $\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|$ превращает фактор-пр-во $V = E/L$ в нормированное пр-во (здесь X – эл-т V, т.е. подмн-во в E вида $x_0 + L$).

б) Док-ть, что если E – банахово, то и V -банахово. (Указание: воспользоваться предыдущей задачей).

I3. Пусть $A = (a_{ij})$ – n x n – матрица, рассматриваемая как линейный оператор $K^n \to K^n$. Вычислить $\|A\|$, если K^n рассматривается с нормой:

а) $\| \|_1$; б) $\| \|_\infty$; в*) $\| \|_2$ (ответ в последнем случае: $\|A\| = \sqrt{\lambda}$, где λ – наибольшее собственное значение матрицы A^*A, а A^*– матрица, сопряженная к A).

I4. Пусть F – пр-во непрерывных финитных ф-ий на $\mathbb{R}$ (т.е. каждая $f \in F$ равна 0 вне некоторого интервала (зависящего от f)) с нормой $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Д-ть, что пополнение F состоит из всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к 0 при $|x| \to \infty$.

Задачи по рядам

I. Пусть $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $\varphi(n)$ равным наименьшему числу отрезков $[a,b]$ в $\mathbb{N}$, таких, что их объединение есть множество $\sigma(\{1,2,\ldots,n\})$.

а) Предположим, что $\varphi(n)$ ограничена на $\mathbb{N}$. Доказать, что $\forall$ сходящегося ряда (x_n) в нормированном пр-ве E ряд $(x_{\sigma(n)})$ также сходится и к той же сумме.

б*) Предположим, что $\varphi(n)$ неограничена на $\mathbb{N}$. Построить сходящийся ряд (x_n) в $\mathbb{R}$, для которого ряд $(x_{\sigma(n)})$ расходится.

2. Пусть $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция, такая, что $|\sigma(n)-n|$ ограничено на $\mathbb{N}$. Доказать, что справедливо заключение задачи I а).

3. Пусть $a_{mn} = \frac{1}{m^2-n^2}$ при $m \neq n$, $a_{nn}=0$. Д-ть, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{mn})$ (Указание: внутренние суммы считаются явно!)

4. Док-ть, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ сходится, а его произведение по Коши с самим собой расходится.

5. Д-ть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p \leq 1$.

6. С помощью формулы Эйлера посчитать суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ $(x \in \mathbb{R})$.

7. а) Д-ть <u>теорему Римана</u>: пусть (a_n) – неабсолютно сходящийся ряд в $\mathbb{R}$, и $\alpha \leq \beta$ – любые два числа в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\exists$ биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая, что частичные суммы $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ удовлетворяют условию $\varliminf\limits_{n\to\infty} S'_n = \alpha$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} S'_n = \beta$.

б) Докажите, что в конечномерном пр-ве (нормированном) коммутативноая сходимость эквивалентна абсолютной сходимости.

в) В пр-ве C_0 Банаха (последовательности, стремящиеся к 0, с $\|(x_n)\| = \sup |x_n|$) положим $e_n=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (единица на n-ом месте). Доказать, что $\forall\, x = (x_1,x_2,\ldots) \in C_0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ в C_0 коммутативно сходится к x. Привести пример, когда этот ряд сходится неабсолютно.

8. Пусть $a_n \geq 0$, и ряд (a_n) расходится. Что можно сказать о сходимости следующих рядов: $\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)$, $\left(\frac{a_n}{1+na_n}\right)$, $\left(\frac{a_n}{1+n^2a_n}\right)$, $\left(\frac{a_n}{1+a_n^2}\right)$?

9. Пусть $a_n \geq 0$, и ряд (a_n) сходится. Д-ть, что ряды $\left(\frac{\sqrt{a_n}}{n}\right)$, (a_n^2), (a_n^3) сходятся.

10. Доказать, что если ряд (a_n) сходится, и (b_n) – монотонная ограниченная последовательность, то ряд $(a_n b_n)$ сходится (<u>признак Абеля</u>).

11. Найти радиус сходимости степенных рядов:

$$1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 \ldots \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

12. Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum c_n z^n$ равен 1, и $c_0 > c_1 > c_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Доказать, что ряд $\sum c_n z^n$ сходится в каждой точке окружности $|z|=1$, за исключением, быть может, точки $z = 1$. (В частности, это верно для $c_n = \frac{1}{n}$.)

ПРОИЗВОДНАЯ

A12

I. Определение производной.

I.I. Производная в $\mathbb{R}$ как линейная часть.

Теорема. Пусть f определена в окрестности a. Тогда следующие свойства равносильны:

/I/ $f'(a)=A$

/2/ существует такая функция φ, определённая в окрестности 0, что $f(a+h)=f(a)+A\cdot h+\varphi(h)$, а $\lim_{h\to 0}(|\varphi(h)|/|h|)=0$

Второе условие означает просто, что $\lim_{h\to 0}(|f(a+h)-f(a)-Ah|/|h|)=0$

Доказательство. В сам деле $|f(a+h)-f(a)-Ah|/|h| = |[f(a+h)-f(a)]/h - A|$.

Фактически теорема даёт новое определение производной. С его помощью легко доказать теорему о производной сложной функции.

Теорема. Пусть f определена в окрестности a и дифференцируема в a, $f(a)=b$, g определена в окрестности b и дифференцируема в b. Тогда $g\circ f$ определена в окрестности a, дифференцируема в a и $(g\circ f)'(a)=g'(b)\cdot f'(a)$.

Доказательство. Определённость $g\circ f$ в окрестности a следует из непрерывности f в a. Пусть $A=f'(a)$, $B=g'(b)$. По условию $f(a+h)=f(a)+Ah+\varphi(h)$, $g(b+k)=g(b)+B\cdot k+\psi(k)$.

Подставляя вместо k выражение $f(a+h)-f(a)$, имеем: $(g\circ f)(a+h)=$ $=g(b)+B\cdot(Ah+\varphi(h))+\psi(Ah+\varphi(h))=(g\circ f)(a)+B\cdot A\cdot h+\theta(h)$, где $\theta(h)=B\varphi(h)+\psi(Ah+\varphi(h))$. Ясно, что $\lim_{h\to 0}|\theta(h)|/|h|=0$ /в самом деле, существует такое $C>0$, что при достаточно малых h верно $|Ah+\varphi(h)|\le Ch$; дальнейшее уже нетрудно/.

I.2. Общее определение производной.

Пусть E, F – нормированные пространства, $a\in E$, функция $f: E\to F$ определена в окрестности a. Пусть $A: E\to F$ линейный непрерывный оператор.

Опр. A есть производная f в a, если для некоторой $\varphi: E\to F$ определённой в окрестности O /в E/, выполнены свойства:

/I/ $f(a+h)=f(a)+Ah+\varphi(h)$ /Ah – результат применения A к h/.

/2/ $\lim_{h\to 0}\|\varphi(h)\|/\|h\|=0$

Для краткости иногда употребляют /некорректное/ обозначение $o(\|h\|)$ как обозначение функции, удовлетворяющей /2/. /А $o(\|h\|^2)$ – для функции, для которой $\lim_{h\to 0}\|\varphi(h)\|/\|h\|^2=0$ т.д./. С его помощью определение выглядит так: A есть $\varphi'(a)$, если $f(a+h)=f(a)+Ah+o(\|h\|)$

Функция называется дифференцируемой на множестве $U\subseteq E$, если она имеет производную во всех точках этого множества.

Примеры.

I. Если $E=F=\mathbb{R}$, $\|x\|=|x|$ то оператор из E в F есть просто умножение на некоторое число и определение совпадает с обычным /см. п. I.I./

2. Пусть $E=\mathbb{R}$ /с обычной нормой/, F – любое. Тогда пространство $L(E,F)$ линейных непрерывных /впрочем, в этом случае все линейные непрерывны/ операторов канонически изоморфно F: всякий оператор имеет вид $t\mapsto t\cdot k$, где k – вектор F.

Теорема. Оператор $t\mapsto t\cdot k$ является производной функции $f:\mathbb{R}\to F$ в точке a тогда и только тогда, когда $k=\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]/h$

Доказательство аналогично доказательству теоремы в пункте I.I.

Ещё один пример мы рассмотрим в I.3.

I.3. Производные функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Общее определение производной в случае $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}$ приводит к следующему. /выбор нормы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$ несущественен: все они эквивалентны/. Линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ задаётся числами $\alpha_1,\dots\alpha_n$: $(h_1,\dots h_n)\mapsto\sum\alpha_i h_i$. Функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифференцируема в $a=(a_1,\dots a_n)$, если $f(a_1+h_1,\dots a_n+h_n)=f(a_1,\dots a_n)+\alpha_1 h_1+\dots+\alpha_n h_n+o(|h_1|+\dots+|h_n|)$ Можно понять, что α_i – "частные производные" f вдоль i-ой координаты, т.е. производные функции $t\mapsto f(\dots a_{i-1},t,a_{i+1},\dots)$ в точке a_i. /эта функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}$, так что производная обычная/. Мы ещё вернёмся к этому при обсуждении понятия частной производной.

I.4. Простейшие свойства производной.

А. Единственность.

У функции не может быть двух различных производных в одной точке/но может не быть ни одной/.

Доказательство. Если A и B – две производные, то $Ah-Bh=o(\|h\|)$. Докажем, что $Ah_0=Bh_0$ для любого данного h_0. В самом деле, если $t\in\mathbb{R}$, $A(th_0)-B(th_0)=t(A(h_0)-B(h_0))$, но $A(th_0)-B(th_0)=o(|t|\cdot\|h\|)=o(t)$. Поэтому $A(h_0)=B(h_0)$.

Б. Производная линейной функции.

Если $A: E\to F$ – линейный непрерывный оператор, $a\in E$, то $A'(a)=A$

Доказательство. $A(a+h)=A(a)+A(h)$.

В. Непрерывность дифференцируемой функции.

Если $f: E\to F$ дифференцируема в a, то она непрерывна в a.

Доказательство. $f(a+h)=f(a)+Ah+o(\|h\|)$. A непрерывно по определению, а $o(\|h\|)$ не только непрерывно в нуле, но даже удовлетворяет более сильному условию $o(\|h\|)/|h|\to 0$.

I.5. Производная вдоль вектора.

Пусть $f: E\to F$ определена в окрестности точки a, $h_0\in E$. Производной f в точке a вдоль вектора h_0 называется предел $\lim_{t\to 0}(f(a+th_0)-f(a)/t)$ /если он существует/. Это-вектор F.

Теорема. Если f дифференцируема в a, то производная вдоль любого вектора h_0 существует и равна $f'(a)h_0$.

Доказательство. $f(a+th_0)=f(a)+t\cdot f'(a)h_0+o(t)$.

Однако существования производной вдоль любого вектора недостаточно для дифференцируемости: во-первых, производная вдоль h_0 может нелинейно зависеть от h_0 /тогда функция недифференцируема/, во-вторых, даже если зависимость линейная, функция всё равно может быть недифференцируемой.

I.6. Производная суммы.

Теорема. Если $f, g: E\to F$ определены в окрестности точки a и дифференцируемы в a, то $f+g$ диф. в a и $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.

Доказательство. В самом деле, если $f(a+h)=f(a)+Ah+o_1(\|h\|)$, $g(a+h)=g(a)+Bh+o_2(\|h\|)$, то $(f+g)(a+h)=(f+g)(a)+(A+B)h+o_1(\|h\|)+o_2(\|h\|)$.

I.7. Производная сложной функции.

Теорема. Если $f: E\to F$, $g: F\to H$, f дифференцируема в $a\in E$, g дифференцируема в $b=f(a)\in F$, то $g\circ f$ дифференцируема в a и $(g\circ f)'(a)=g'(b)\circ f'(a)$. /Справа – композиция операторов из E в F и из F в H/.

Доказательство. повторяет рассуждение п.I.I.

I.8. Производные функций из E в $H_1\oplus H_2$.

Пусть H_1, H_2 – нормированные пространства. Тогда в $H_1\oplus H_2$ мы будем рассматривать норму $\left\|\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right\|=\max(\|h_1\|_{F_1},\|h_2\|_{F_2})$ /или ей эквивалентную/

Всякой функции f из E в $H_1\oplus H_2$ соответствует пара функций $f_1: E\to H_1$ и $f_2: E\to H_2$. Свойства функции f определяются свойствами функций f_1 и f_2, например, f непрерывна в $a \Leftrightarrow f_1$ и f_2 непрерывны в a /проверьте!/. Заметим также, что пространство $L(E, H_1\oplus H_2)$ линейных непрерывных операторов из E в $H_1\oplus H_2$ канонически изоморфно $L(E,H_1)\oplus L(E,H_2)$, причём это изоморфизм нормированных пространств.

Теорема. Функция $f: E\to H_1\oplus H_2$ дифференцируема в a тогда и только тогда, когда соответствующие функции $f_1: E\to H_1$ и $f_2: E\to H_2$ дифференцируемы в a, при этом $f'(a)=\begin{pmatrix}f_1'(a)\\f_2'(a)\end{pmatrix}$ /в смысле упомянутого изоморфизма/

Доказательство. $f(a+h)-f(a)-\begin{pmatrix}f_1'(a)\\f_2'(a)\end{pmatrix}h=\begin{pmatrix}f_1(a+h)-f_1(a)-f_1'(a)h\\f_2(a+h)-f_2(a)-f_2'(a)h\end{pmatrix}$

поэтому если f_1 и f_2 дифференцируемы, то f дифференцируема и её производная такая, как утверждается. Если же f дифференцируема, то f_i – тоже, т.к. $f_i=\pi_{H_i}\circ f$, где π_{H_i} – оператор проекции $H_1\oplus H_2$ на H_i.

I.9. Дифференцирование билинейной формы.
Пусть $B: E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ – непрерывная билинейная форма. Продифференцируем её как функцию из $E_1 \oplus E_2$ в F.
Теорема. Она дифференцируема и $\left[B'\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}h_1\\a_2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}a_1\\h_2\end{pmatrix}$ /легко видеть, что правая часть линейная и непрерывно зависит от (h_1, h_2) /.
Доказательство.
В силу билинейности $B\begin{pmatrix}a_1+h_1\\a_2+h_2\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}a_1\\h_2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}h_1\\a_2\end{pmatrix}$ $(*)$
Осталось проверить, что $B\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} = o(\|h_1\|+\|h_2\|)$. Это следует из леммы.
Лемма. Билинейная форма B непрерывна титтк существует такое C, что $\|B(h_1,h_2)\| \le C\|h_1\|\|h_2\|$.
Док-во леммы. Если C существует, то B непрерывна /см. разложение $(*)$ /. Если же B непрерывна, то существуют такие ε_1 и ε_2, что $(\|h_1\| \le \varepsilon_1$ и $\|h_2\| \le \varepsilon_2) \Rightarrow \|B(h_1,h_2)\| \le 1$. Теперь $B(h_1,h_2) \le (1/\varepsilon_1\varepsilon_2)\cdot\|h_1\|\|h_2\|$

В случае $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$ имеем, что производная функции $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 x_2$ в (a_1, a_2) есть $(h_1, h_2) \longmapsto a_1 h_1 + a_2 h_2$.

I.10. Дифференцирование "произведения" функций.
Теорема, обобщающая правило дифференцирования $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ формулируется так:
Теорема. Если $f_1: E \longrightarrow G_1$, $f_2: E \longrightarrow G_2$, B – непрерывная билинейная форма на $G_1 \oplus G_2$ со значением в H, f_1 и f_2 дифференцируемы в a, то функция $B(f_1, f_2): x \longmapsto B(f_1(x), f_2(x))$ дифференцируема в a и $(B(f_1,f_2))'(a) = B(f_1'(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f_2'(a))$ или, подробнее, $[(B(f_1,f_2))'(a)]h = B(f_1'(a)h, f_2(a)) + B(f_1(a), f_2'(a)h)$.
Доказательство. Образуем из f_1 и f_2 функцию из E в $G_1 \oplus G_2$ и применим теоремы пунктов I.7., I.8., I.9.

В случае $G_1 = G_2 = \mathbb{R}$, $B(x,y) = xy$ мы получаем, что если $f_1, f_2: E \to \mathbb{R}$ то $(f_1 f_2)'(a) = f_1'(a) f_2(a) + f_1(a) f_2'(a)$. /каждое из слагаемых правой части есть произведение числа и линейного функционала на E /. Если же и E равно $\mathbb{R}$, то получаем обычное правило $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)\cdot g'(a)$

I.11. Отображение $A \to A^{-1}$.
Пусть E – нормированное пространство. Рассмотрим в $L(E,E)$ подмножество S, состоящее из тех операторов, для которых существует непрерывный обратный. Функция $A \longmapsto A^{-1}$ определена на S.
Теорема. Если E – полное нормированное пространство, то
1/. S – открыто.
2/. функция $A \longmapsto A^{-1}$ непрерывна на S
3/. функция $A \overset{\Phi}{\longmapsto} A^{-1}$ дифференцируема на S и $[\Phi'(A)]H = -A^{-1}HA^{-1}$
Краткое доказательство. Докажем, что 1 /единичный оператор из $L(E,E)$/ – внутренняя точка S. В самом деле, если $\|B\| < 1$, то $1 - B + B^2 - B^3 + \cdots$ – сходящийся ряд в полном нормированном пространстве $L(E,E)$, и его предел обратен к $1+B$. Сумма этого ряда непрерывно зависит от B при $\|B\| < 1$, поэтому функция $A \longmapsto A^{-1}$ непрерывна в некоторой окрестности 1. Она дифференцируема в 1, её производная в 1 равна $H \longmapsto -H$. Если A – любой обратим. оператор, то $(A+H)^{-1} = (A(1+A^{-1}H))^{-1} = (1+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$. Это равенство надо понимать так, что если $(1+A^{-1}H)^{-1}$ обратим, /в частности, если $\|A^{-1}H\| < 1$, для чего достаточно выполнения неравенства $\|H\| < 1/\|A^{-1}\|$ /, то $A+H$ обратим и обратный задаётся написанной формулой. Теперь ясно, что S открыто, функция $\Phi: A \longmapsto A^{-1}$ непрерывна и дифференцируема; её производную можно вычислить по теореме о производной композиции и получить нужный ответ.
Следствие. Если $f: E \longrightarrow L(F,F)$ дифференцируема в a, $f'(a)$ обратим, то f^{-1} определена в окрестности точки a и $(f^{-1})'(a)h = -f(a)^{-1}\cdot f'(a)\cdot f(a)^{-1}$.
Доказательство. Применяем теорему этого пункта и формулу для производной композиции.

Это обобщает известное равенство $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$.

1.12. Геометрическая интерпретация производной.
Пусть a – точка нормированного пространства E. Путём, проходящим через a, назовём отображение γ некоторой окрестности 0 в E, дифференцируемое в нуле и такое, что $\gamma(0)=a$. Два пути γ_1 и γ_2 касаются, если $\|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)\|=o(|t|)$ при $t\to 0$ или, иными словами, $\gamma_1'(t)=\gamma_2'(t)$. Это – отношение эквивалентности. Касательным вектором к пространству E в точке a назовём класс эквивалентности по этому отношению. /Это странное название происходит из дифференциальной геометрии, где определяются касательные вектора на так называемом многообразии/. Очевидно, что множество касательных векторов находится во взаимно-однозначном соответствии с пространством E. Это соответствие позволяет объяснить геометрический смысл производной так:

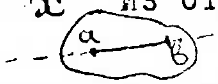
Пусть $f: E\to F$ – дифференцируемое в a отображение. Пусть $h\in E$. Как найти $f'(a)h$? Надо рассмотреть h как касательный вектор к E в a, то есть найти путь γ: $\gamma'(0)=h$. Затем нужно перенести путь γ в F с помощью f, то есть рассмотреть путь $\gamma_1: t\mapsto f(\gamma(t))$. Его касательный к F в точке $f(a)$ вектор и будет соответствовать $f'(a)h$ /следует из теоремы о производной композиции/

2. Теорема о конечном приращении и её следствия.
2.1. Теорема о конечном приращении для функции вещественного аргумента
Пусть f определена в окрестности отрезка $[a,b]$, принимает значения в нормированном пространстве E и при всех $t\in[a,b]$ дифференцируема в t и $\|f'(t)\|\le M$ для некоторого числа M. /$\|f'(t)\|$ можно понимать двояко: как норму линейного оператора из $\mathbb{R}$ в E в $L(\mathbb{R},E)$ или как норму соответствующего ему вектора в E – но это одно и то же/.

Теорема. В этом случае $\|f(b)-f(a)\|\le M\cdot(b-a)$. /в каждый момент времени/
/Если праща летит со скоростью меньшей M , то за время $(b-a)$ она не может пролететь больше $M(b-a)$ /. Иногда теорему формулируют так: $\|f(b)-f(a)\|\le \sup_{t\in[a,b]}\|f'(t)\|\cdot(b-a)$. Если $E=\mathbb{R}$, то это вытекает из теоремы о среднем: $f(b)-f(a)=f'(t)(b-a)$, однако при $E\ne\mathbb{R}$ последняя неверна.

Доказательство. Достаточно для любого $\varepsilon>0$ доказать, что $\|f(b)-f(a)\|\le(M+\varepsilon)(b-a)$. Назовём отрезок $[x,y]\subset[a,b]$ хорошим, если $\|f(y)-f(x)\|\le(M+\varepsilon)(y-x)$. Если отрезок плох, то одна из его половин плоха. Поэтому, если $[a,b]$ плох, то существует вложенная последовательность плохих отрезков, длина которых стремится к нулю. Если α – их общая точка, то /в силу неравенства $\|f'(\alpha)\|\le M$ и определения производной/, все достаточно малые отрезки, содержащие α, хороши. /Здесь важно, что мы прибавили ε /. Полученное противоречие показывает, что $[a,b]$ – хорош.

2.2. Общая теорема о конечном приращении.
Теорема. Пусть f определена и дифференцируема в открытом выпуклом множестве U нормированного простанства E и принимает значения в нормированном пространстве F. /Множество выпукло, если для любых двух его точек верно, что отрезок, их соединяющий, лежит в множестве. Отрезок $[a,b]=\{c\in E\mid c=a+t(b-a), 0\le t\le 1\}$/. Пусть $a,b\in E$ и для всех точек x из отрезка $[a,b]$ верно $\|f'(x)\|_{L(E,F)}\le M$ для некоторого M. В этом



случае $\|f(b)-f(a)\|_F\le M\|b-a\|_E$.

Доказательство. Если $\varphi(t)=f(a+t(b-a))$, то φ дифференцируема в окрестности отрезка $[0,1]$ и $\|\varphi'(t)\|=\|f'(a+t(b-a))\circ(b-a)\|\le$
$\le\|f'(a+t(b-a))\|\cdot\|b-a\|\le M\|b-a\|$.

Теперь осталось применить теорему предыдущего пункта, учитывая что $\|f(b)-f(a)\| = \|\varphi(1)-\varphi(0)\|$. Эта теорема – одна из самых употребительных. Её можно записать так: $\|f(b)-f(a)\| \le \sup_{t\in[0,1]} \|f'(a+t(b-a))\| \, \|b-a\| = \sup_{\xi\in[a,b]} \|f'(\xi)\| \, \|b-a\|$. Условие выпуклости $\mathcal{U}$ существенно, точнее, надо, чтобы $[a,b]\subset \mathcal{U}$. На самом деле мы доказали чуть более сложный факт: $\|f(b)-f(a)\| \le \sup_{t\in[0,1]} \|f'(a+t(b-a))\cdot(b-a)\|$; это, однако, в большинстве случаев несущественно.

2.3. Простейшие следствия теоремы о конечном приращении.

Следствие1. Если $L: E \to F$ – линейный непрерывный оператор, то применяя теорему к функции $(f-L)$, имеем $\|f(b)-f(a)-L(b-a)\| \le \sup_{\xi\in[a,b]} \|f'(\xi)-L\| \, \|b-a\|$.

Следствие2. В частности, если $L=f'(a)$, то имеем $\|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)\| \le \sup_{\xi\in[a,b]} \|f'(\xi)-f'(a)\| \, \|b-a\|$.

Следствие3. Если $f'(x)=0$ в выпуклой области $G\subset E$, то f постоянна в G. /На самом деле достаточно связности G, т.к. у каждой точки есть выпуклая окрестность /шар/ и поэтому f локально постоянна/

Следствие4. Если $f'(x)=A$ в выпуклой области пространства E, то $f(x)=Ax+a$ $(A\in L(E,F),\ a\in F)$.

2.4. Частная производная по подпространству.

Пусть $f: E\to F$, E' – подпространство E, $a\in E$. Рассмотрим сужение f на $a+E'$ или, ещё лучше, функцию $h \mapsto f(a+h)$ для h из E'. Если эта функция дифференцируема в 0 /как функция из E' в F/, то её производная называется производной функции f в точке a вдоль подпространства E'. Иными словами, это означает, что $f(a+h)=f(a)+Ah+o(\|h\|)$ для h из E'. /A – производная вдоль E' – линейный непрерывный из E' в F/. Имеет место очевидная

Теорема. Если f дифференцируема в a, то она дифференцируема вдоль любого $E'\subset E$ и производная вдоль E' есть сужение $f'(a)$ на E'.

В частности, если $x_1,\dots x_n \mapsto f(x_1,\dots x_n)$ – функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, e_i – стандартный базис, $E_i=\langle e_i\rangle$, то производная вдоль E_i в a есть линейное отображение E_i в $\mathbb{R}$: $te_i \mapsto \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} t$; $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ называется частной производной вдоль i-ой координаты; $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = f'(a)e_i$ = производная f вдоль вектора e_i. Мы приведём сейчас критерий, позволяющий из существования и непрерывности частных производных судить о существовании производной функции. Пусть $E=E_1\oplus E_2$, f определена в окрестности точки $x=(x_1;x_2)$ и в каждой точке этой окрестности дифференцируема вдоль E_1 и E_2, причём функции $x\mapsto f'_{E_1}(x)$ и $x\mapsto f'_{E_2}(x)$ непрерывны. /f'_{E_i} – производная вдоль E_i/.

Теорема. В этом случае f дифференцируема в $(x_1;x_2)$ и, следовательно, $f'(x)(h_1;h_2)=f'_{E_1}(x)h_1+f'_{E_2}(x)h_2$.

Доказательство даёт следующая оценка $\|f(x_1+h_1, x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-f'_{E_1}(x_1,x_2)h_1-f'_{E_2}(x_1,x_2)h_2\| \le \|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)-f'_{E_2}(x_1,x_2)h_2\| + \|f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2)-f'_{E_1}(x_1,x_2)h_1\| \le \sup_{0\le\theta\le 1} \|f'_{E_2}(x_1+h_1, x_2+\theta h_2) - f'_{E_2}(x_1,x_2)\| \, \|h_2\| + \sup_{0\le\theta\le 1} \|f'_{E_1}(x_1+\theta h_1, x_2) - f'_{E_1}(x_1,x_2)\| \, \|h_1\| = o(\|h_1\|+\|h_2\|)$ *)

Следствие. Если f определена на некотором открытом множестве в $E_1\oplus E_2$ и имеет непрерывные производные по E_1 и E_2, то f непрерывно дифференцируема.

*) – Напомним, что норма в E предполагается полученной из норм в E_1 и E_2.

Если E – нормированное пространство, E_1 и E_2 – два его подпространства, дающие в прямой сумме всё E, то на E возникают две нормы: исходная и получающаяся при изоморфизме E и /внешней/ прямой суммы $E_1\oplus E_2$. /На E_1 и E_2 рассматриваются индуцированные из E нормы/. Эти нормы, вообще говоря, разные! /это заведомо так, если E_1 или E_2 не замкнуты в E/. Если нормы совпадают, то E называется нормированной прямой суммой своих подпространств E_1 и E_2. Если E полно, а E_1 и E_2 замкнуты, то сумма нормированная. /это следует из так называемой теоремы Банаха об открытом отображении/. Внешняя прямая сумма, очевидно, всегда нормирована.

2.5. Дифференцирование предела.

Пусть $f_1, \dots f_n, \dots$ – последовательность функций из E в F, сходящаяся к функции f. Пусть f_i – дифференцируемы. Нас интересует, в каком случае можно утверждать, что дифференцируема и f и что $f' = \lim f_n'$.

Теорема. Пусть $f_1, f_2, \dots$ – последовательность непрерывно дифференцируемых функций, определённых в открытом шаре V пространства E, f_i сходится поточечно к некоторой функции f, а f_i' равномерно сходятся к некоторой функции g. Тогда f дифференцируема и $f' = g$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это в центре шара /эту точку обозначим a /. Сделаем это. $\|f(a+h) - f(a) - g(a)h\| = \lim_n \|f_n(a+h) - f_n(a) - g(a)h\|$. Так как $\|f_n(a+h) - f_n(a) - g(a)h\| \le \sup_{0\le\theta\le1} \|f_n'(a+\theta h) - g(a)\| \|h\|$, сходимость f_n' к g равномерна, g-непр. /как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций/, то можно увидеть, что оцениваемое выражение есть $o(\|h\|)$.

Замечание1. Вместо поточечной сходимости во всём шаре можно потребовать полноту пространства, в котором принимают значения функции f_i, а также сходимость f_i в центре шара : из этого вытекает, что для всякой точки x из шара последовательность $f_i(x)$ куда-то сходится. В самом деле, она фундаментальна: $\|f_i(x) - f_j(x)\| \le \|(f_i - f_j)x - (f_i - f_j)a\| + \|(f_i - f_j)a\| \le \sup_{0\le\theta\le1} \|(f_i - f_j)'(a+\theta(x-a))\| + \|(f_i - f_j)a\| \to 0$

Замечание2. Нетрудно показать /аналогично 1/, что сходимость функций f_i будет равномерной.

Замечание3. Теорема имеет локальный характер, поэтому верна для любой открытой области. /замечание1 требует выпуклость или хотя бы связность области/.

2.6. Один пример применения теоремы о конечном приращении.

Пусть $F(x,y)$ определена в области $\mathbb{R}^2$, содержащей квадрат $[0,1]\times[0,1]$ и непрерывно дифференцируема в ней. Рассмотрим функцию $x \xrightarrow{\Phi} (y \mapsto F(x,y))$, определённую в окрестности отрезка $[0,1]$ и принимающую значения в $C[0,1]$. Докажем, что эта функция дифференцируема. В самом деле $\Phi(x+h) - \Phi(x) = (y \mapsto F(x+h, y) - F(x,y))$

Так как $F(x+h, y) - F(x,y) \approx F_x'(x,y)$, то производная $\Phi'(x)$ видимо равна $(y \mapsto F_x'(x,y))$. В самом деле $[\Phi(x+h) - \Phi(x) - (y \mapsto F_x'(x,y))h](x) = |F(x+h, y) - F(x,y) - F_x'(x,y)h| \le \sup_{0\le\theta\le1} |F_x'(x+h, y) - F_x'(x,y)| |h|$.

Нам надо оценить выражение в квадратных скобках по норме $C[0,1]$. В силу равномерной непрерывности F_x' /$[0,1]\times[0,1]$ – компакт/ и написанной оценки всё получается.

Следствие. Функция $x \xrightarrow{A} \int_0^1 F(x,y)dy$ дифференцируема и её производная в точке x равна $\int_0^1 F_x'(x,y)dy$. В самом деле, A есть композиция функции Φ и линейного непрерывного функционала на $C[0,1]$, сопоставляющего каждой $f \in C[0,1]$ её интеграл по $[0,1]$.

2.7. Условие Липшица и производная.

Говорят, что функция $f: M_1 \to M_2$ / M_1 и M_2 – метрические пространства/ удовлетворяет условию Липшица с константой C, если $\forall x,y \in M_1$ $\rho(f(x), f(y)) \le C\rho(x,y)$. /очевидно, что она непрерывна/.

Теорема. Пусть f определена и дифференцируема на выпуклом открытом множестве A в нормированном пространстве X и принимает значения в нормированном пространстве Y. Тогда условия /1/ и /2/ равносильны: /1/ f удовлетворяет условию Липшица с константой C,

/2/ для всех $x \in A$ верно $\|f'(x)\| \le C$

Доказательство. /2/ $\Rightarrow$ /1/ вытекает из теоремы о конечном приращении /здесь важна выпуклость A /.

/1/ $\Rightarrow$ /2/. $\|f'(x)h\| = \|\lim_{t\to0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}\|$. Так как $\|\frac{f(x+th) - f(x)}{t}\| \le C\|h\|$, то $\|f'(x)h\| \le C\|h\|$ т.е. $\|f'(x)\| \le C$.

3. Теорема о неявной функции.

3.1. Задача о неявной функции в $\mathbb{R}^2$.

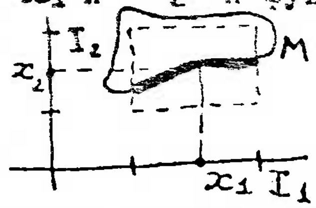
Рассмотрим множество точек M выделяемое уравнением $F(x,y) = 0$, где F – некоторая, допустим, гладкая, вещественная функция на $\mathbb{R}^2$.

Примеры. 1. $F(x,y) = x^2 + y^2$, M – одна точка.

2. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, M – окружность

3. $F(x,y) = 0$, M – вся плоскость.

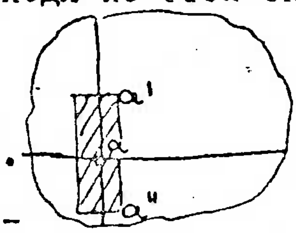
Мы хотим найти условия, достаточные для того, чтобы можно было локально представить это множество как график некоторой функции $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Более точно, назовём точку $(x_1 x_2) \in M$ регулярной относительно x, если существуют такие интервалы I_1 и I_2 содержащие x_1 и x_2 и функция $\varphi: I_1 \to I_2$, что $M \cap (I_1 \times I_2)$ = график φ. (Требуя существование функции $\varphi: I_2 \to I_1$, мы бы пришли к определению регулярности отн. y). Какие точки регулярны отн. x в наших примерах? В примерах I и 3 нет регулярных отн. x точек, в примере 2 регулярны относительно x все точки, кроме $(1,0)$ и $(-1,0)$. Оказывается, что достаточное условие того, чтобы точка была хорошей, таково: $F'_y \neq 0$ /Доказательство см. в следующем пункте./



3.2. Неявная функция в $\mathbb{R}^2$.

Теорема. Если $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^2$ и $F'_y(a) \neq 0$, то a регулярна относительно x.

Доказательство. Пусть $F'_y(a) > 0$. Тогда F'_y положительна в некоторой окрестности a. Сдвигаясь по вертикали и не выходя из этой окрестности, выберем a' выше a и a'' ниже a. Очевидно, $F(a') > 0$, $F(a'') < 0$. Выпустим из a' и a'' настолько малые горизонтальные отрезки, чтобы во всех точках первого F было бы положительно, а во всех точках второго - отрицательно. Можно выбрать их одинаковой длины. Получается прямоугольник, в каждом вертикальном сечении которого функция F меняет знак и монотонна, следовательно, имеет единственный корень. Поэтому a регулярна относительно x. В следующем пункте мы обобщим эту теорему.



3.3. Общая теорема о неявной функции.

Теорема. Пусть X, Y, Z - банаховы пространства /полные нормированные/, функция $F: X \times Y \to Z$ определена и непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0). Пусть $F'_Y(x_0, y_0)$ обратимый и имеющий непрерывный обратный линейный оператор из Y в Z. /Заметим, что из существования такого оператора вытекает изоморфность Y и Z. В частности, в конечномерном случае $\dim Y = \dim Z$/. Тогда существуют такие шары V и W с центрами в x_0 и y_0 и такая функция $\varphi: V \to W$, что:

I/ $F(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ для любых точек $x \in V$, $y \in W$

2/ функция φ непрерывно дифференцируема и $\varphi'(x) = -[F'_Y(x, \varphi(x))]^{-1} \circ F'_X(x, \varphi(x))$ /в частности, указанный обратный оператор существует/

Говорят, что "уравнение $F(x,y) = 0$ в окрестности точки $(x_0 y_0)$ неявно задаёт y как функцию от x"; второй пункт теоремы называют "правилом дифференцирования неявно заданных функций". Доказательство теоремы см. в нескольких следующих пунктах.

3.4. Доказательство теоремы о неявной функции. /план/

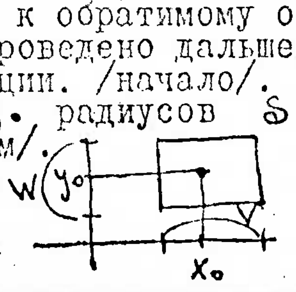
Нам надо доказать, что в окрестности точки $(x_0 y_0)$ при каждом x уравнение $F(x,y) = 0$ имеет единственное решение. Мы будем применять теорему о неподвижной точке сжимающего оператора. Для этого перепишем уравнение $F(x,y) = 0$ в виде $y = y - [F'_y(x_0 y_0)]^{-1} F(x,y)$. Правая часть /при фиксированном x/ должна быть сжимающей; на это есть надежда, так как её производная по y есть $1 - [F'_y(x_0 y_0)]^{-1} [F'_y(x,y)]$, что близко к нулю, так как $F'_y(x,y)$ близко к $F'_y(x_0 y_0)$. Уточняя это рассуждение, мы докажем пункт /I/. Далее мы проверим непрерывность и дифференцируемость φ. Дифференцируя тождество $F(x, \varphi(x)) = 0$, мы получим $F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x)) \circ \varphi'(x)$, откуда и следует равенство /2/. /Оператор $F'_y(x, \varphi(x))$ обратим, так как близок к обратимому оператору $F'_y(x_0 y_0)$/. Подробно рассуждение будет проведено дальше.

3.5. Доказательство теоремы о неявной функции. /начало/.

Пусть V и W - шары с центрами x_0 и y_0 радиусов δ и ε соответственно. /Выбор ε и δ мы пока отложим/.

Напомним, что мы рассматриваем отображение

$$y \xmapsto{Q_x} y - [F'_y(x_0 y_0)]^{-1} \cdot F(x,y)$$



при фиксированном $x \in V$. Нам надо, чтобы оно было сжимающим, например, удовлетворяло условию Липшица с $C = \frac{1}{2}$. Для этого норма его производной должна быть не больше $\frac{1}{2}$. Вычислим эту производную: $(Q_x)' = 1 - [F_y'(x_0 y_0)]^{-1} \circ F_y'(x, y)$. В силу непрерывности F'_y при достаточно малых ε и δ функции Q_x будут сжимающими с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Кроме того, мы хотим искать неподвижную точку функции Q_x в шаре W и, следовательно, мы должны добиться того, чтобы Q_x переводил W в себя. Так как Q_x сжимающая с коэффициентом $\frac{1}{2}$, достаточно требовать того, чтобы $\|Q_x(y_0) - y_0\| \le \frac{1}{2}\varepsilon$, то есть чтобы $\|[F_y'(x_0 y_0)]^{-1} \cdot F(x, y_0)\| \le \frac{1}{2}\varepsilon$. Уменьшая, если нужно, δ /при неизменном ε/ мы добьёмся и этого. Итак, первый пункт теоремы доказан: $\varphi(x)$ = неподвижная точка Q_x. В следующем мы будем доказывать непрерывность функции φ и вычислять её производную.

3.6. Непрерывность неявно заданной функции.

Докажем, что построенная в предыдущем пункте функция $\varphi: x \longmapsto$ /неподвижная точка Q_x/ непрерывна. Для этого рассмотрим последовательность функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$: $\varphi_0(x) = y_0$, $\varphi_{n+1}(x) = Q_x(\varphi_n(x)) = \varphi_n(x) - [F_y'(x_0 y_0)]^{-1} \cdot F(x, \varphi(x))$. Если φ_i непрерывна, то непрерывна и φ_{i+1}, поэтому все φ_i непрерывны. Так как неподвижная точка есть предел последовательности итераций, то $\varphi_n(x)$ поточечно сходится к . Более того, так как все Q_x сжимающие с одинаковым коэффициентом $\frac{1}{2}$, эта сходимость равномерна. /Вспомните доказательство теоремы о неподвижной точке/. Итак, φ_n равномерно сходится к φ, поэтому непрерывна.

3.7. Дифференцируемость неявно заданной функции.

Докажем, что φ дифференцируема в точке x_0. Очевидно, $F(x, \varphi(x)) = 0$ при всех $x \in V$. Поэтому $F(x_0+h, \varphi(x_0+h)) - F(x_0, \varphi(x_0)) = 0$.
С другой стороны, эта разность равна /в силу дифференцируемости F в (x_0, y_0)/ $F_x'(x_0, y_0)h + F_y'(x_0, y_0)(\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)) + \alpha(h, \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0))$, где $\|\alpha(h,k)\| = o(\|h\| + \|k\|)$. Применяя $[F_y'(x_0 y_0)]^{-1}$, имеем
$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = -[F_y'(x_0 y_0)]^{-1} F_x'(x_0 y_0) h + \alpha(h, \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0))$.
Единственное, что плохо - то, что в правой части стоит не $o(\|h\|)$, а $o(\|h\| + \|\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)\|)$. Эта трудность преодолевается так: можно считать что шары V и W настолько малы, что $\|\alpha(h,k)\| \le \frac{1}{2}\|h\| + \frac{1}{2}\|k\|$ и, следовательно, $\|\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)\| \le \le C \cdot \|h\| + \frac{1}{2}\|h\| + \frac{1}{2}\|\varphi(x+h) - \varphi(x_0)\|$, откуда $\|\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)\| \le 2C\|h\| + \|h\|$.
Поэтому $\alpha(h, \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)\| = o(\|h\| + 2C\|h\| + \|h\|) = o(\|h\|)$.
Итак, φ дифференцируема в точке x_0. Можно считать, что во всех точках $V \times W$ оператор F_y' обратим /т.к. близок к обратимому оператору $F_y'(x_0, y_0)$/ и, следовательно, что в любой из точек графика φ можно применить уже описанную часть теоремы о неявной функции. Поэтому φ дифференцируема всюду. Непрерывность φ' следует из её выражения через производные функции F. Итак, доказательство общей теоремы о неявной функции закончено.

3.8. Пример: линии и поверхности в $\mathbb{R}^3$.

I. Пусть $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим "поверхность" $\{(x_1 x_2 x_3) \mid F(x_1 x_2 x_3) = 0\}$. Если в данной точке этого множества $F'_{x_3} \ne 0$, то локально оно представимо в виде графика функции $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ /следствие теоремы о неявной функции/. /Если же, например, $F'_{x_1} \ne 0$, то, напротив, x_1 можно выразить через x_2 и x_3; плохо, если F'_{x_1}, F'_{x_2} и F'_{x_3} равны нулю, т.е. $F' = 0$/.

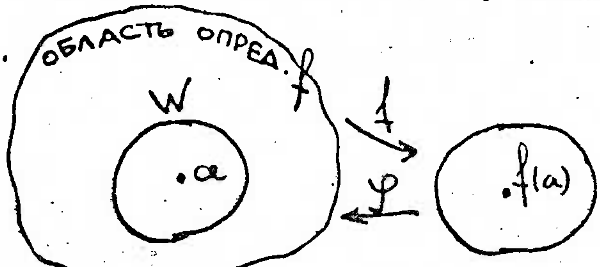
2. Пусть $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ - непрерывно дифференцируемая функция $F: (x_1 x_2 x_3) \longmapsto (F_1(x_1 x_2 x_3), F_2(x_1 x_2 x_3))$. Рассмотрим "линию" $\{(x_1 x_2 x_3) \mid F(x_1 x_2 x_3) = \langle 0, 0\rangle\}$. Нас интересует, в каком случае эта линия /локально/ может быть представлена в виде $\{x_1, \varphi(x_1), \psi(x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. Теорема о неявной функции даёт ответ: для этого достаточно, чтобы
Если мы согласны выбрать в качестве "независимого параметра" любое из трёх неизвестных, то достаточно неравенства нулю одного из трёх определителей, то есть того, чтобы оператор $F' \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ имел максимально возможный ранг /2/.

$$\det \begin{Vmatrix} F'_{1x_2}, & F'_{1x_3} \\ F'_{2x_2} & F'_{2x_3} \end{Vmatrix} \ne 0$$

3.9. Диффеоморфизмы, теорема об обратной функции.
Пусть X, Y - банаховы пространства, $U\subset X$, $V\subset Y$ - открытые множества в них. Взаимно однозначное отображение f множества U на множество V называется <u>диффеоморфизмом</u>, если f и f^{-1} непрерывно дифференцируемы.

<u>Теорема.</u> Пусть X, Y - банаховы, f - непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества A в пространстве X в пространство Y, $a\in A$, $f'(a)$ - обратимый линейный оператор из X в Y *). Тогда существуют такие окрестности U и V точек a и $f(a)$, что f является диффеоморфизмом U на V.

<u>Доказательство.</u> Применим теорему о неявной функции к уравнению $F(x,y)=0$, где $F(x,y)=y-f(x)$, и будем пытаться выразить x как функцию от y /по сравнению с формулировкой пункта 3.8. переменные x и y переставлены/. Функция F непрерывно дифференцируема, надо проверить лишь обратимость $F'_x(a,f(a))$, т.е. обратимость $f'(a)$. Она дана по условию. Итак, по теореме о неявной функции существует окрестность V точки $f(a)$, окрестность W точки a и функция $\varphi: V\to W$, такие, что для $x\in W$, $y\in V$ свойства $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ равносильны. В качестве U надо взять открытое множество $f^{-1}(V)\cap W$. Легко проверить, что f как функция из U в V и φ как функция из V в U взаимно обратны. Одна из них дифференцируема по условию, другая - по теореме о неявной функции.



З А Д А Ч И /по теме "производная"/.

§1.

1. Определитель можно рассматривать как функцию $\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}$. Найти её производную а/. в произвольной точке, б/. в точке 1 /единичной матрице/.
2. Говорят, что функция $f: E\to F$ имеет <u>производную Гато</u> в точке $x\in E$, если она имеет в x производную вдоль любого вектора h, линейно и непрерывно зависящую от h. /Этот оператор и называется производной Гато/. Если f имеет производную Фреше, то имеет и производную Гато. Верно ли обратное?
3. Отождествим $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$, найти производные функций $z\to z^2$, $z\to z^{-1}$, $z\to (az+b)/(cz+d)$.
4. Найти производную функции $\Phi: C[0,1]\to\mathbb{R}$ определённой соотношением $\Phi(f)=(\sin f(0)+\cos\int f)^2$.
5. Рассмотрим пространство l_1 числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\dots)$ с $\|x\|=\sum|x_i|<\infty$ и функцию $x\mapsto\|x\|$. Доказать, что она не дифференцируема ни в одной точке.
6. Пусть E - евклидово пространство с нормой $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. В каких точках $\|x\|$ дифференцируема? /ср. с пред. задачей/

§2.

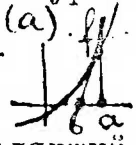
1. Доказать, что если в шаре V производная функции $f: X\to Y$ постоянна и всюду равна A, то существует такое $y_0\in Y$, что $f(x)=Ax+y_0$
2. Доказать такое обобщение теоремы о конечном приращении: если $f:\mathbb{R}\to E$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - дифференцируемые функции и $\|f'(x)\|\le g(x)$ для всех x, то $\|f(b)-f(a)\|\le g(b)-g(a)$.
3. В теореме о частных производных и полной производной достаточно требовать непрерывности одной из двух частных производных. Почему?
4. Обобщить теорему о частных производных и полной производной для случая $E=E_1\oplus\dots\oplus E_n$.
5. Доказать, что если в каждой точке открытого множества у функции существуют производные Гато /см. задачи в первой части/ и она непре-

*). Как и в теореме о неявной функции, предполагается непрерывность $[f'(a)]^{-1}$, впрочем она вытекает из взаимной однозначности $f'(a)$, его непрерывности и полноты X и Y /теорема Банаха/.

рывно зависит от точки, то функция непрерывно дифференцируема.
6. Путём в нормированном пространстве E называется непрерывное отображение γ отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$ в E. Длиной пути γ называется точная верхняя грань длин вписанных ломаных, т.е. $\sup\left(\sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\| \mid a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\right)$ /он может быть бесконечным или конечным, в последнем случае путь называется <u>спрямляемым</u> /. Доказать, что если γ непрерывно дифференцируем, то длина γ равна $\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$

§3.

I. Найти уравнение касательной к множеству $\{\langle x,y\rangle \mid \sin x+x+y^2+\operatorname{tg} y=0\}$ в точке $(0,0)$.
2. Исследовать, какие условия на F действительно используются в доказательстве теоремы о неявной функции. /см. Г.Е.Шилов, "Функции нескольких переменных"/.
3. Метод Ньютона приближённого решения уравнения $f(x)=0$ / $f: E\to F$ - непрерывно дифференцируемая функция/ состоит в следующем: если a - уже имеющееся приближение, то следующее, "улучшенное", вычисляется так: $f(x)$ заменяется на $l(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ и ищется корень линейного уравнения $l(x)=0$, т.е. рассматривается $b=a-[f'(a)]^{-1}f(a)$ /разумеется, предполагается обратимость $f'(a)$ /. Таким образом, последовательность приближений строится по формуле $x_{n+1}=x_n-[f'(x_n)]^{-1}f(x_n)$ начиная с некоторого начального приближения x_0. Более грубый, но более простой метод/ позволяющий избежать вычислений f' во многих точках/ состоит в рассмотрении последовательности $x_{n+1}=x_n-[f'(x_0)]^{-1}f(x_n)$. Докажите, что если f имеет корень α и $f'(\alpha)$ обратимо, то существует такая окрестность точки α, что упрощённый метод Ньютона, начатый с любой точки из этой окрестности, будет работать /т.е. $x_n\to\alpha$/.



<u>Указание.</u> Примените теорему о сжимающем отображении примерно так же, как при доказательстве теоремы о неявной функции. Анализ обычного /не упрощённого/ метода Ньютона сложнее, хотя при достаточной гладкости аналогичное утверждение тоже верно.

Продифференцировать следующие функции:

1. $\Phi: C[0,1] \to C[0,1]$. а). $\Phi(f): x \mapsto f(\sin x)$; б). $\Phi(f): x \mapsto \sin f(x)$.

2. $x \mapsto \|x\|$ в конечномерном евклидовом пространстве. (Где она дифференцируема?).

3. $\Phi: C[0,1] \to \mathbb{R}$. а). $\Phi(f) = \sin f(0)$; б). $\Phi(f) = \int_0^1 \sin f(x)\,dx$

4. Продифференцировать функцию $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \xmapsto{A} \sin x \cdot \cos(x^2 y)$, найти $[A'(1,2)](-1,1)$.

5. Привести пример такой дифференцируемой функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, что $\forall x\, f'(x) \neq 0$, $f(0) = f(1)$.

6. Продифференцировать $\Phi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$
$\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(A^{-1}B)$.

7. Вычислить производную ф-ии $\det: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ в точке 1 вдоль H.

8. Дифференцируема ли функция $C[0,1] \times C[0,1] \xrightarrow{\Phi} C[0,1]$, определённая формулой $\Phi(f;g) = f \circ g$?

9. Найти производную $C[0,1] \to C([0,1] \times [0,1])$:
$\Phi(f): \langle x,y \rangle \mapsto f(x) \cdot f(y)$.

10. Найти производную отображения $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$ евклидова пр-ва E в себя.

11. Найти производную ф-ии $\Phi:]0,1[\times]0,1[\times C[0,1] \to \mathbb{R}$
$(a, b, f) \xmapsto{\Phi} \int_a^b f(x)\,dx$.

12. Функция $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, где $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \begin{cases} [r(1-r)]^\varphi, & 0 < \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r < 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

непрерывна на каждом луче, выходящем из 0, но не непрерывна в 0.

13. В пространстве l_1 последовательностей $x_1, x_2, \ldots$ с $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ функция $x \mapsto |x|$ $(|x| \leq \sum |x_i|)$ нигде не дифференцируема.

14. Функция $C[0,1] \to \mathbb{R}$ $f \mapsto \|f\|$ нигде не дифференцируема.

Евклидовы пространства (задачи).

1а. $(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ 1б. $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$.

2. Если $|(x,y)| = \|x\| \cdot \|y\|$, то x и y пропорциональны.

3. Если $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, то x и y пропорциональны.

4. Найти длину проекции ребра n - мерного куба на его главную диагональ /самую длинную/. В какие точки диагонали проецируются вершины куба?

5. Найти проекцию $(4,-1,-3,4)$ на $W = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, где $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (1,2,2,-1)$, $e_3 = (1,0,0,-3)$.

6. Всякая билинейная форма $B(x,y)$ в евклидовом пр-ве V имеет вид $(x,y) \mapsto (Bx,y)$, где B - некоторый оператор в V.

А23

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ.

I. Топологические пространства.

При изучении объектов в метрическом пространстве часто не нужно знать, какая метрика взята на пространстве, а важно лишь то, какие множества являются открытыми. Так мы приходим к понятию топологического пространства. В пунктах I-6 мы приведём сводку основных определений и результатов, связанных с этим понятием; доказательства и более подробные комментарии см. в книге: Л. Шварц. Анализ, т. I, гл. 2.

Определение. Говорят, что на множестве E задана топология /введена структура топологического пространства/, если некоторые подмножества E объявлены открытыми, причем выполнены следующие свойства:

I/ $\emptyset$ и E открыты;

2/ объединение любого /возможно, бесконечного/ числа открытых множеств открыто;

3/ пересечение двух /и следовательно, любого конечного числа/ открытых множеств открыто.

Множество, дополнение которого открыто, называют замкнутым. Свойства I/-3/ можно переформулировать в терминах замкнутых множеств:

I/ $\emptyset$ и E замкнуты;

2/ пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;

3/ объединение двух замкнутых множеств замкнуто.

Всякое метрическое пространство является топологическим; топологическое пространство, получаемое из метрического, называется метризуемым. Подмножество $X \subset E$ называется окрестностью принадлежащей ему точки a, если существует открытое множество V, содержащее a и содержащееся в X. Понятие окрестности приспособлено для переноса "ε-δ - рассуждений" на случай топологических пространств: часто фразу "для всякого ε существует δ ..." /означающую: для всякой шаровой [радиуса ε] окрестности точки a существует шаровая окрестность [некоторого радиуса ...]/ можно заменить на фразу: "для всякой окрестности точки a существует такая окрестность точки b, что..."

Множество всех внутренних точек множества X - внутренность X - является максимальным по включению открытым множеством, содержащемся в X. Точка a касается множества X, если любая окрестность a пересекается с X /$\Leftrightarrow$ если $E \setminus X$ не есть окрестность a $\Leftrightarrow$ если любое открытое множество, содержащее a, пересекается с X/. Множество всех точек касания множества X есть замкнутое множество, содержащее X и являющееся среди таких минимальным. Оно называется замыканием X. Последовательность точек x_n пространства X сходится к a, если в любом открытом множестве, содержащем a, лежат почти все x_n. Если $x_n \in X$, $x_n \to a$, то a - точка касания для X. Обратное утверждение /справедливое для метрических пространств/ неверно: не для всякой точки касания существует сходящаяся к ней последовательность. /задача I/. Поэтому рассуждения с последовательностями в случае топологических пространств часто оказываются непригодными; существуют понятия "направленность" и "фильтр", иногда заменяющие понятие последовательности; о них см. Д. Келли Общая топология. У последовательности может быть, вообще говоря, несколько пределов, если пространство не отделимо. (топологическое пространство X называется отделимым /хаусдорфовым/, если у любых двух различных точек x и y существуют непересекающиеся окрестности/. В случае отделимого пространства это, как легко видеть, невозможно. Чтобы избежать подобных патологий в дальнейшем все пространства будут считаться отделимыми /если не оговорено противное/. Отметим ещё один факт: определение предельной точки последовательности как точки, в любой окрестности которой бесконечно много членов последовательности и как предела некоторой подпоследовательности различны /задача 3/

2. Конструкции топологических пространств.

2.I. База топологии.

Пусть E - топологическое пространство, $\mathcal{B}$ - некоторое семейство открытых множеств в E. $\mathcal{B}$ называется базой E, если любое открытое множество есть объединение множеств из $\mathcal{B}$. Топологию можно задавать, задавая базу. А именно, пусть E – произвольное множество, $\mathcal{B}$ – семейство подмножеств E, удовлетворяющее условию

/В/ Пересечение любых двух множеств из $\mathcal{B}$ можно представить в виде объединения множеств $\mathcal{B}$.

В этом случае в E можно ввести топологию, объявив открытыми $\varnothing$, E, а также любые объединения множеств из $\mathcal{B}$. Семейство $\mathcal{B}$ будет для этой топологии базой.

Пример1. Открытые интервалы с рациональными концами образуют базу на прямой с обычной топологией.

Пример2. Топология поточечной сходимости. Пусть X – произвольное множество, Y – топологическое пространство. Введём на пространстве F всех функций из X в Y топологию, объявив базовыми открытыми множествами все множества, получающиеся так: берётся некоторое конечное множество точек $x_1, \dots x_n \in X$, столько же открытых множеств $V_1, \dots V_n \subset Y$ и рассматривается множество $\{f: X \to Y \mid f(x_i) \in V_i \text{ для всех } i\}$. Последовательность функций $f_1, f_2, \dots$ сходится в этой топологии к функции f тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ последовательность $f_1(x), f_2(x), \dots$ сходится /в Y/ к $f(x)$ /задача 4/. Из задачи I /или задачи 3/ следует, при $X=Y=\mathbb{R}$ это пространство неметризуемо.

2.2. Индуцированная топология.

Пусть E – топологическое пространство, $A \subset E$. Введём на A структуру топологического пространства, объявив открытыми те подмножества A, которые представимы в виде $A \cap V$, где V – открытое в E множество. Это определение согласовано с определением индуцированной метрики. Если E отделимо, то и A отделимо.

2.3. Произведение топологических пространств. Пусть E_1 и E_2 – топологические пространства; введём в $E_1 \times E_2$ топологию, взяв в качестве ее базы множества вида $U_1 \times U_2$, где U_1 открыто в E_1, а U_2 открыто в E_2. /Можно следующим образом определить произведение любого семейства пространств E_α. Базовыми открытыми множествами объявляются те, которые получаются следующим образом: берётся любой конечный набор индексов $\alpha_1, \dots \alpha_n$ и открытых множеств $U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}$ в пространствах $E_{\alpha_1}, \dots E_{\alpha_n}$ и рассматривается множество тех точек декартова произведения $\prod_\alpha E_\alpha$, у которых α_i-ые координаты лежат в U_{α_i}. Это произведение тогда называют тихоновским в честь А.Н.Тихонова. Пространство функций из X в Y с топологией поточечной сходимости есть на самом деле тихоновское произведение пространств Y, взятых в количестве, равном мощности X.) Легко видеть, что сходимость в произведении – покоординатная, и что произведение отделимых пространств отделимо. Операция произведения ассоциативна.

2.4. Факторпространства.

Пусть X – множество, $\sim$ – отношение эквивалентности /т.е. рефлексивное, транзитивное и симметричное/. Тогда можно естественно определить фактормножество $X/\sim$ /состоящее из классов эквивалентности/ и отображение $X \to X/\sim$, сопоставляющее элементу его класс. Если в X задана топология, то возникает топология в $X/\sim$ /фактортопология/. А именно, множество в $X/\sim$ называется открытым, если его прообраз при каноническом наложении X на $X/\sim$ открыт. Замкнутыми множествами в $X/\sim$ будут, очевидно, те, прообраз которых замкнут. Факторпространство может быть неотделимым, даже если X отделимо. /задачи 5,7б/.

Если $f: X \to Y$ – наложение, то в X можно ввести отношение эквивалентности: $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_2)=f(x_1)$; фактормножество будет канонически изоморфно Y и в Y возникает топология. Очевидно, $A \subset Y$ открыто в этой топологии тогда и только тогда, когда $f^{-1}(A)$ открыто в X. /Наложение f топологического пространства X на топологическое пространство Y, обладающее этим свойством, называется факторотображением./

Пусть $f: X \to Y$ – факторотображение, φ – непрерывное отображение X в Z. Легко видеть, что непрерывное $\psi: Y \to Z$, замыкающее диаграмму, существует тогда и только тогда, когда $\forall x_1\, x_2 \in X\ (f(x_1)=f(x_2) \to \varphi(x_1)=\varphi(x_2))$. /То, что f – факторотображение, используется при проверке непрерывности ψ./

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

3. Свойства топологических пространств.

3.I. Счетная база.

Для пространств со счётной базой справедлива теорема Линделёфа: у всякого открытого покрытия есть счётное подпокрытие /задача 9/. Подпространства и произведения /конечного числа/ пространств со счётной базой имеют счётную базу. Наличие счётной базы не равносильно наличию счётного всюду плотного множества /пересекающегося с любым открытым множеством/ /задача I0/.

3.2. Компактность.

Топологическое пространство называется компактным, если всякое открытое покрытие его имеет конечное подпокрытие. В этом случае, для каждой последовательности есть точка, любая окрестность которой содержит бесконечно много членов этой последовательности /но отсюда автоматически не следует наличие сходящейся подпоследовательности/. Обратное неверно /задача 4/. Компактное /в индуцированной топологии/ подмножество отделимого пространства замкнуто; замкнутое подмножество компактного пространства компактно. Произведение компактных пространств в любом числе компактно/теорема Тихонова, её доказательство для бесконечных произведений использует так называемую лемму Цорна; для конечных произведений доказательство довольно просто/. /задачи II и 26/.

4. Непрерывные отображения.

Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно в $a \in X$, если прообраз любой окрестности $f(a)$ есть окрестность a. Обратите внимание, что определение с последовательностями не эквивалентно этому /слабее его/. Отображение $f: X \to Y$ непрерывно во всех точках X тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт /вариант: прообраз любого замкнутого множества замкнут/. Верна теорема о непрерывности композиции в естественной формулировке. Взаимнооднозначное непрерывное вместе с обратным отображение X в Y называется гомеоморфизмом; пространства X и Y называются гомеоморфными, если существует их гомеоморфизм. Образ компакта при непрерывном отображении есть компакт. Отсюда вытекает, что если X компакт, а Y отделимо, то любое непрерывное наложение X на Y будет факторотображением; в частности, любое непрерывное взаимнооднозначное отображение компакта в отделимое пространство есть гомеоморфизм /задача I3/.

Легко видеть, что отображение X в $Y \times Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда соответствующие отображения из X в Y и из X в Z непрерывны. То же верно и для бесконечных произведений.

5. Связные пространства.

Топологическое пространство E связно, если его нельзя разбить на две непересекающиеся открытые части /вариант: нельзя разбить на две непересекающиеся замкнутые части; ещё один: в нём нет одновременно открытых и замкнутых множеств, кроме $\varnothing$ и E ./

Теорема I. Связными подмножествами $\mathbb{R}$ являются: пустое, промежутки и всё $\mathbb{R}$.

Теорема 2. Образ связного пространства при непрерывном отображении связен. /в самом деле, прообраз открыто-замкнутого множества открыто-замкнут/.

Следствием этих двух теорем является теорема о промежуточном значении для функций на отрезке /и на любом связном пространстве/; если вещественная функция непрерывна на связном пространстве, то множество значений связно по теореме 2 и является одним из описанных в теореме I множеств.

Верен и обратный факт: если любая вещественная и непрерывная функция на E принимает вместе с любыми двумя значениями все промежуточные, то пространство связно. /В самом деле, если A открыто-замкнуто, то функция χ_A , равная 0 в A и I вне A , непрерывна./

Объединение семейства попарно пересекающихся связных множеств связно.

Часто связность пространства используется в следующей форме: локально постоянная функция на связном пространстве постоянна. (Функция, определенная на топологическом пространстве и принимающая значения в любом множестве, называется локально постоянной, если у каждой точки есть окрестность, в которой функция постоянна.) В самом деле, прообраз любого значения локально постоянной функции открыт и замкнут.

Более сильным, чем связность, свойством является так называемая линейная связность. Путем в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\gamma : [a,b] \to X$. Точка $\gamma(a)$ называется началом, а точка $\gamma(b)$ – концом пути. Пространство называется линейно связным, если любые две точки можно соединить путем.

Т е о р е м а . Линейно связное пространство связно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если X – открыто-замкнуто в пространстве E , $p \in X$, $q \notin X$, то p и q нельзя соединить путем: если γ был бы таким путем, то $\gamma^{-1}(X)$ и $\gamma^{-1}(E \setminus X)$ образовали бы разбиение отрезка на два непустых открытых множества (что невозможно в силу его связности)■. Обратное неверно (задача I4).

Образ линейно связного множества при непрерывном отображении линейно связен.

6. Компоненты.

Пусть E – топологическое пространство. Точки x , y принадлежащие E , связаны, если они содержатся в некотором связном подмножестве E . Это – отношение эквивалентности, так как объединение двух пересекающихся связных множеств связно. Классы эквивалентности по этому отношению называются связными компонентами. Каждая связная компонента связна и замкнута (так как замыкание связного множества связно). См. задачу I5.

Пространство E называется локально связным, если для всякой окрестности V всякой точки $a \in E$, существует свяная окрестность этой точки, содержащаяся в V .(Это – не то же, что "у всякой точки есть связная окрестность"!)

Бывают связные, но не локально связные пространства, а бывают, наоборот, локально связные, но не связные пространства (задача I7). В локально связном пространстве всякая связная компонента открыта.

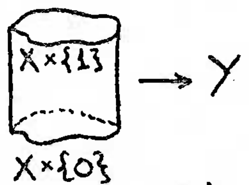
Более сильное свойство – локальная линейная связность – означает, что во всякой окрестности всякой точки можно найти линейно связную подокрестность. В этом случае всякая связная компонента линейно связна. В частности, если локально линейно связное пространство связно, то оно линейно связно. Например,

открытое связное подмножество нормированного пространства линейно связно.

7. Гомотопия.

Пусть X , Y – топологические пространства, $f_0, f_1 : X \to Y$ – непрерывные отображения.

О п р е д е л е н и е. f_0 и f_1 гомотопны, если существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times X \to Y$, что $F(0,x) = f_0(x)$, $F(1,x) = f_1(x)$ для всех $x \in X$.



Гомотопность f_0 и f_1 означает, что они могут быть "непрерывно деформированы" друг в друга; промежуточными этапами этой деформации являются отображения $f_t : X \to Y$ определяемые формулой $f_t(x) = F(t,x)$. Иными словами, f_0 и f_1 гомотопны, если их можно включить в семейство f_t ($t \in [0,1]$) , непрерывно зависящее от t (в том смысле, что отображение $(x,t) \to f_t(x)$ непрерывно на $X \times I$). Имеют место следующие простые свойства:

I) Если два отображения гомотопны, то их композиции с любым третьим отображением также гомотопны.

2) Гомотопия является отношением эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений из X в Y .

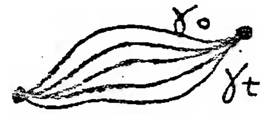
Таким образом, множество непрерывных отображений из X в Y

разбивается на классы. Структура получающегося множества классов играет важную роль в топологии. Это множество обозначается $[X, Y]$.

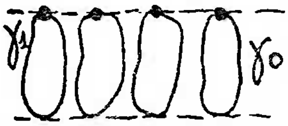
8. Односвязные пространства.

Мы будем рассматривать гомотопность путей в некотором пространстве Y. Однако обычное отношение гомотопности мало интересно, так как в линейно связном пространстве любые два пути гомотопны. (Задача I8.) Более содержательны такие понятия:

А) Гомотопия с закрепленными концами.



Два пути γ_0 и $\gamma_1 : [0,1] \to Y$ гомотопны с закрепленными



концами, (рисунок справа), если у них общие начала и концы и существует семейство γ_t $(0 \le t \le 1)$ путей с теми же началами и концами, осуществляющее гомотопию.

Б) Гомотопия в классе петель.

Путь $\gamma : [0,1] \to Y$ называется петлей, если $\gamma(0) = \gamma(1)$. Две петли γ_0 и γ_1 гомотопны в классе петель, если существует гомотопия, все промежуточные пути которой - петли (рисунок слева сверху).

Путь называется постоянным, если $\gamma(t)$ при всех t равно некоторой точке пространства Y. Постоянный путь является петлей.

Т е о р е м а . Следующие свойства линейно связного пространства Y равносильны:

(I) любые два пути с одинаковыми концами (точнее, с одинаковыми началами и концами) гомотопны с закрепленными концами;

(2) всякая петля гомотопна постоянной;

(3) любое непрерывное окружности $T\ (= \{ z \mid |z| = 1 \})$ * в Y продолжается до непрерывного отображения круга $D^2 = \{ z \mid |z| \le 1 \}$

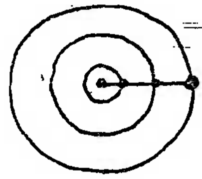
(4) любое непрерывное отображение границы квадрата в Y продолжается до непрерывного отображения всего квадрата.

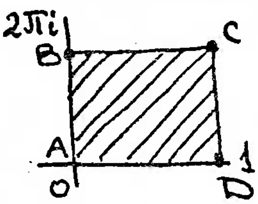
Если эти свойства выполнены, пространство Y называется односвязным.

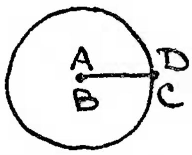
Д о к а з а т е л ь с т в о.

(I)$\Rightarrow$(2) Петля , выходящая из a, и постоянно равная a петля гомотопны с фиксированными концами, и, следовательно, гомотопны в классе петель.

(2)$\Rightarrow$(3) Пусть имеется отображение окружности в Y . Его можно рассматривать как петлю (выбрав на окружности точку). Рассмотрим гомотопию этой петли к постоянной в классе петель. Промежуточные петли рассмотрим как отображения меньших окружностей - вплоть до постоянной, которую (в силу ее постоянства) можно рассмотреть как отображение окружности нулевого радиуса. Получим непрерывное отображение круга.







Более формально, рассмотрим прямоугольник $ABCD$ на комплексной плоскости. Отображение $\eta : r + i\varphi \to re^{i\varphi}$ переводит прямоугольник в круг D^2. Сторона CD переходит в окружность, AB - в центр, а AD и BC - в один из радиусов.

Л е м м а. Непрерывная функция φ на прямоугольнике тогда и только тогда может быть представлена в виде $z \mapsto \psi(\eta(z))$, где ψ - непрерывная функция на круге, когда φ постоянна на AB и совпадает в соответствующих точках сторон AD и BC $\varphi(x) = \varphi(x + 2\pi i)$ (иными словами, $\eta(x) = \eta(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$).

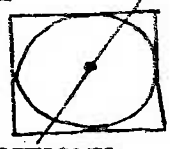
Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Отображение η является непрерывным наложением компакта на отделимое пространство, и, следовательно, является факторотображением. Остается воспользоваться диаграммой пункта 2.4 ▨

Итак, пусть f - непрерывная функция на окружности. Тогда рассмотрим петлю $z \mapsto f(\eta(z))$, определенную на CD ; согласно определению гомотопии в классе петель, эта функция продолжается с CD на весь прямоугольник, причем совпадает в точках x и $x + 2\pi i$

*) Эту окружность иногда обозначают также S^1 и T^1 ; вообще, S^n является обозначением для сферы в $\mathbb{R}^n$, а T^n - для $\underbrace{T \times \ldots \times T}_{n}$.

и постоянна на AB . Следовательно (по лемме), она имеет вид $\Psi(\gamma(z))$, где Ψ - некоторая функция на круге. Функция Ψ и будет продолжением f .

(3)⇒(4) Отображение $\mathbb{R}^2$ в себя , определяемое формулой $x \mapsto (\|x\|_{max}/\|x\|_2)\cdot x$,где $\|x\|_{max}=\max(|x_1|,|x_2|)$, $\|x\|_2$ - евклидова норма (см. рис.) устанавливает гомеоморфизм круга $\|x\|_2 \le 1$ и квадрата $\|x\|_{max}\le 1$ Оно непрерывно в силу эквивалентности норм.



(4)⇒(I) Задача построения гомотопии с закрепленными концами двух путей как раз и требует продолжения на весь квадрат отображения, равного одному пути на верхней стороне, другому - на нижней и постоянному на боковых сторонах.

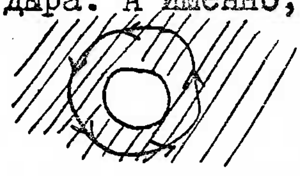
Примеры.

I. Нормированные пространства (в частности, $\mathbb{R}^n$) односвязны.

2. Более того, любое выпуклое множество в нормированном пространстве односвязно.

3. Более того, звездное множество в нормированном пространстве односвязно. (Множество звездно относительно точки A , если оно вместе с каждой своей точкой x содержит отрезок Ax .) В самом деле, пусть S - звездное относительно 0 множество. γ_1 - петля. Тогда петли $\gamma_t(s)=t\cdot\gamma(s)$ $(0\le t\le 1)$ образуют гомотопию γ_1 и петли, постоянно равной 0, в классе петель.

4. Пример неодносвязного пространства - внешность круга. Нарисованная петля не гомотопна постоянной - гомотопии мешает дыра. А именно, петля делает один оборот вокруг центра окружности.



При непрерывной деформации /гомотопии/ число оборотов должно меняться непрерывно и быть всегда целым, поэтому оно должно быть постоянным. Поэтому эта петля не гомотопна постоянной /которая делает 0 оборотов/. Уточнения в этом рассуждении требует понятие "число оборотов". Кроме того, нужно доказать, что оно не меняется при гомотопии. Этому будут посвящены дальнейшие пункты.

По аналогичным причинам не односвязны T, $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

5. Теорема. При $n\ge 2$ сфера $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_{n+1}=1\}$ односвязна.

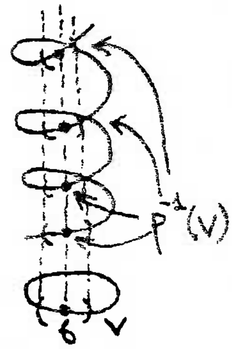
Набросок доказательства. Сфера S^n без точки гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, односвязна. Поэтому если петля проходит не через каждую точку сферы, то она гомотопна постоянной. Остался /экзотический/ случай, когда петля γ покрывает всю сферу. Построим гомотопную ей петлю, не покрывающей всей сферы /чем и окончим доказательство/. Пусть γ' - петля в $\mathbb{R}^{n+1}$ /не обязательно лежащая на сфере/, являющаяся кусочно-линейной /состоящей из прямолинейных отрезков/ и отстоящая от γ не более, чем на $1/10$ /радиус сферы - I/. Тогда отображение $(x,t)\mapsto\gamma(x)+t(\gamma'(x)-\gamma(x))$ осуществляет гомотопию γ и γ', не задевающую 0 /не равную 0 ни при каких x и t /. Проектируя её на S^n по лучам, выходящим из 0, получаем гомотопию между петлёй γ и петлёй γ'' , которая состоит из отрезков больших кругов и не может покрывать всей сферы. ▨

Из односвязности S^n легко вывести односвязность $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, т.к. всякая петля в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ гомотопна своей центральной проекции на S^n /задача I9/.

Заметим в заключение, что произведение двух пространств односвязно тогда и только тогда, когда оба сомножителя односвязны. В самом деле, задача о продолжении отображения окружности в $X\times Y$ равносильна задаче о продолжении соответствующих отображений окружности в X и Y.

9. Накрытия.

Пусть $p: E\to B$ - непрерывное отображение топологических пространств, являющееся наложением. Оно называется накрытием, если у всякой точки $b\in B$ существует окрестность V обладающая таким свойством: её прообраз $p^{-1}(V)$ представляется в виде объединения таких непересекающихся множеств, что каждое из них открыто в $p^{-1}(V)$ и сужение p на каждое из них является гомеоморфизмом его и V . Такие окрестности мы для краткости будем называть <u>регулярными</u> /этот термин не общепринят/. Другими словами, отображение $p\colon E \to B$ – накрытие, если каждая точка $b \in B$ имеет такую /регулярную/ окрестность V, что её прообраз $p^{-1}(V)$ гомеоморфен $V \times \{$ дискретное пространство $\}$.



Окрестность, содержащаяся в регулярной, регулярна.

<u>Замечание.</u> Иногда в определение накрытия добавляют требование связности и локальной ~~линейной~~ связности пространств E и B.

Пространство B называется <u>базой</u> накрытия, пространство E – <u>накрывающим</u> пространством.

Примеры накрытий.

/а/ Тривиальное накрытие. Пусть B – произвольное топологическое пространство, $\mathcal{D}$ – дискретное пространство /в котором все множества открыты/. Тогда проекция $B \times \mathcal{D}$ на B будет накрытием. Однако накрывающее пространство здесь не связно.

/б/ Следующий пример будет для нас основным.

Т е о р е м а. Отображение $p\colon t \mapsto e^{it}$ отображает $\mathbb{R}$ в множество комплексных чисел модуля 1 и является накрытием.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что это отображение – гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{R}$ на мультипликативную группу T с ядром $2\pi\mathbb{Z}$ и что сужение его на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ является гомеоморфизмом на полуокружность $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Докажем, что у любой точки $b \in T$ есть регулярная окрестность. Если $b = 1$, то такой окрестностью будет полуокружность $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Её прообраз, как вытекает из упомянутых свойств, есть объединение отрезков $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, на каждом из которых p является гомеоморфизмом. Общий случай может быть сведён к уже рассмотренному /при этом используется то, что p – гомоморфизм групп, а поворот $z \mapsto bz$ – гомеоморфизм T на себя/. /Проведите рассуждение подробно./ ■

В этом примере оба пространства связны и локально линейно связны. Прообраз каждой точки счётен.

/в/ Пусть $E = B = T$, $p(z) = z^n$ /n – некоторое отличное от нуля целое число/. Это гомоморфизм группы T в себя. Прообраз каждой точки при этом отображении состоит из n элементов.

/г/ Отображение $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ является накрытием; прообраз каждой точки счётен.

/д/ Пусть G – топологическая группа. /Это означает, что в G введена структура группы и топология, причём умножение /как функция $G \times G \to G$ / и взятие обратного / $G \to G$ / непрерывны/. Пусть H – дискретная подгруппа /подгруппа, дискретная в индуцированной топологии – все точки изолированы/. Введём в G/H *) фактортопологию. Отображение $G \to G/H$ будет накрытием. При $G = \mathbb{R}$, $H = 2\pi\mathbb{Z}$ получается уже рассмотренное накрытие $\mathbb{R}$ над T, так как T гомеоморфно $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. При $G = \mathbb{R}^2$, $H = (2\pi\mathbb{Z})^2$ G/H гомеоморфно $T^2 = T \times T$ и мы получаем накрытие $\mathbb{R}^2 \to T^2$.

Накрытие является локальным гомеоморфизмом. /Отображение $\varphi\colon X \to Y$ – <u>локальный гомеоморфизм</u>, если для каждой точки $x \in X$ существуют такие открытые окрестности V точки x и W точки y, что φ осуществляет гомеоморфизм V и W /. Однако не всякий локальный гомеоморфизм есть накрытие /задача 22/.

Прообраз каждой точки при локальном гомеоморфизме дискретен. В случае накрытия его мощность является локально постоянной функцией точки и, следовательно, постоянна для накрытий со связной базой. Она называется <u>числом листов</u> накрытия.

Как и всякий локальный гомеоморфизм, накрытие переводит открытые множества в открытые, и, следовательно, является факторотображением.

10. <u>Теорема о накрывающем пути.</u>

Т е о р е м а. Пусть $p\colon E \to B$ – накрытие; $\gamma\colon I = [\alpha, \beta] \to B$ – путь в B, $a \in E$ и $p(a) = \gamma(\alpha)$. Тогда существует и единственен путь $\tilde{\gamma}$ в E, удовлетворяющий условию $p(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ и начинающийся в a.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & B \end{tikzcd}$$

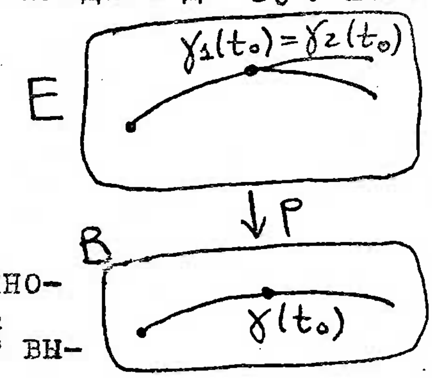
Условие $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ выражают словами " $\tilde{\gamma}$ есть поднятие γ ".

*) Через G/H обозначается множество смежных классов /например, левых/ группы G по подгруппе H; если H – нормальный делитель, то G/H – топологическая группа.

Теорема утверждает, что поднять путь всегда можно, в качестве начала поднятого пути можно выбрать любой из прообразов начала исходного пути, и после такого выбора путь может быть поднят единственным способом.

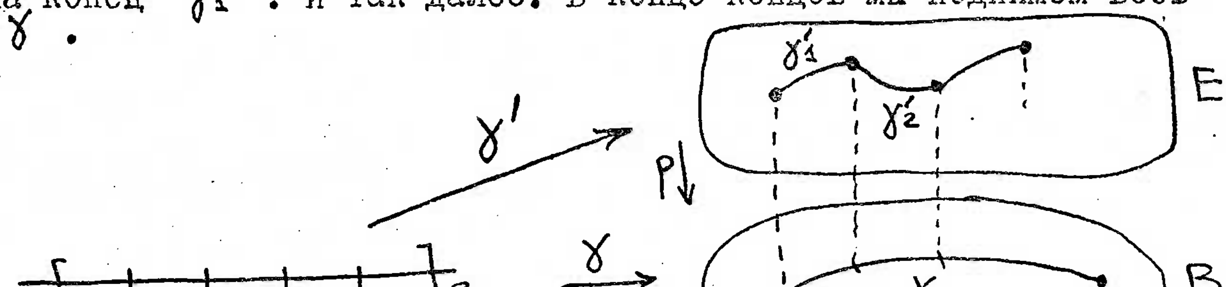
Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность.

Пусть γ_1 и γ_2 – два поднятия пути γ с общим началом. Пусть $t\in[\alpha,\beta]$. Будем говорить, что γ_1 и γ_2 совпадают вплоть до t, если $\gamma_1=\gamma_2$ на отрезке $[\alpha,t]$. Возьмём точную верхнюю грань t_0 множества $\{t \mid \gamma_1$ и γ_2 совпадают вплоть до $t\}$. В силу непрерывности γ_1 и γ_2 /и отделимости E, которую мы неявно предполагаем/ t_0 будет лежать в этом множестве и поэтому γ_1 и γ_2 совпадают до t_0. Если $t_0=\beta$, всё доказано. Пусть $t_0<\beta$ и V – регулярная открытая окрестность точки $\gamma(t_0)$. Её прообраз состоит из некоторого числа гомеоморфных V открытых множеств; пусть W – то из них, которое содержит $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)$. В силу его открытости и непрерывности путей γ_1 и γ_2 при близких к t_0 значениях параметра t точки $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ не выходят за пределы W. Так как p, ограниченное на W, взаимнооднозначно и $p(\gamma_1(t))=\gamma(t)=p(\gamma_2(t))$, то γ_1 и γ_2 совпадают в окрестности t_0, что противоречит выбору t_0. Единственность доказана.



Существование.

Рассмотрим сначала частный случай: образ пути γ лежит целиком в некотором регулярном множестве V. Тогда следует взять прообраз V, представить его в виде объединения гомеоморфных V множеств, взять то из них /W/, которое содержит заданное начало a, рассмотреть гомеоморфизм $p^{-1}: V\to W$ и взять в качестве γ_1 путь $t\mapsto p^{-1}(\gamma(t))$. Общий случай сводится к этому частному с помощью разрезания пути γ на несколько путей и поднятия его по частям. Более точно, рассмотрим следующее открытое покрытие отрезка $[\alpha,\beta]$: для каждой точки t возьмём такой содержащий её интервал V_t, чтобы $\gamma(V_t)$ лежало в некотором регулярном множестве. /Это возможно, так как у $\gamma(t)$ есть регулярная окрестность, а путь γ непрерывен/. В силу леммы Лебега существует такое $\varepsilon>0$, что любой отрезок длины не более ε содержится целиком в одном из множеств покрытия. Разрежем $[\alpha,\beta]$ на отрезки длины не больше, чем ε и рассмотрим части $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ нашего пути, получающиеся сужением γ на эти отрезки. Образ γ_1 лежит в регулярном множестве, поэтому его можно поднять. Сделаем это – получим путь γ_1'. Затем поднимем γ_2, взяв в качестве начала конец γ_1'. И так далее. В конце концов мы поднимем весь путь γ.



■.

II. Угол поворота.

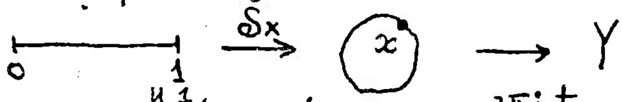
Теперь мы можем дать точное определение числа оборотов.

Пусть $\gamma:[\alpha,\beta]\to T$ путь на окружности. Подняв его на прямую, получим путь $\gamma':[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ /$\exp i\gamma'(t)=\gamma(t)$/. Число $\gamma'(\beta)-\gamma'(\alpha)$ назовём углом поворота пути γ /Оно не зависит от выбора поднятия: если γ' и γ'' – два поднятия, то $\gamma''-\gamma'=\mathrm{const}$/. Если γ – петля, то угол поворота равен $2\pi k$ при некотором целом k. Это k называется числом оборотов петли γ. Имеют место следующие простые утверждения:

1. Пусть пути $\gamma:[\alpha,\beta]\to T^1$ и $\gamma_1:[\alpha,\beta]\to T^1$ отличаются заменой параметра: существует гомеоморфизм h, замыкающий диаграмму, причём $h(\alpha)=\alpha_1$, $h(\beta)=\beta_1$.

$$\begin{tikzcd} {[\alpha,\beta]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, leftrightarrow, "h"] & T^1 \\ {[\alpha_1,\beta_1]} \arrow[ur, "\gamma_1"'] & \end{tikzcd}$$

В этом случае углы поворота путей γ и γ_1 равны./В самом деле, их поднятия также связаны друг с другом посредством h /.
2. Пусть $\gamma_1:[\alpha_1,\alpha_2]\to T^1$ и $\gamma_2:[\alpha_2,\alpha_3]\to T^1$ – два пути, причём конец γ_1 совпадает с началом γ_2 /$\gamma_1(\alpha_2)=\gamma_2(\alpha_2)$/. В этом случае можно образовать путь $\gamma_1\cup\gamma_2:[\alpha_1,\alpha_3]\to T^1$. Его угол поворота будет равен сумме углов поворота путей γ_1 и γ_2. /В самом деле, его поднятие состоит из поднятия γ_1 и поднятия γ_2 /. Если на окружности T выбрать точку x, то отображения $T\to Y$ можно отождествить с петлями в Y: отображению $f:T\to Y$ сопоставляется композиция отображений δ_x и f;



здесь δ_x получается из стандартного накрытия $exp:\mathbb{R}\to T$ и переводит 0 и 1 в x /если $x=e^{2\pi i t_0}$, то $\delta_x: t\mapsto e^{2\pi i(t+t_0)}$ /. Гомотопия двух отображений γ_1 и γ_2 из T в Y превращается в гомотопию петель $\gamma_1\circ\delta_x$ и $\gamma_2\circ\delta_x$ в классе петель. Наоборот, каждой петле можно сопоставить отображение окружности /с отмеченной точкой x /. /Это следует из того, что $[\alpha,\alpha+2\pi]\xrightarrow{t\mapsto exp\, it} T$ – факторотображение./ При этом гомотопным петлям соответствуют гомотопные отображения окружности, т.к. гомотопию в классе петель – непрерывное отображение прямоугольника, совпадающее в соответствующих точках пары противоположных сторон – можно переделать в непрерывное отображение цилиндра $T\times[0,1]$; /это следует из того, что отображение $(\varphi,t)\mapsto(exp\, i\varphi,t)$ является факторотображением $[0,2\pi]\times[0,1]\to T\times[0,1]$ /.

Степень отображения $S^1\to S^1$ *)

Пусть $Y=S^1$. Тогда каждому отображению $f:S^1\to S^1$ соответствует петля в S^1, и число оборотов этой петли называется степенью отображения f /обозначается $\deg f$ /. Степень отобр.-целое число.
Л е м м а. Это определение корректно /не зависит от выбора x /.
У к а з а н и я к д о к а з а т е л ь с т в у. Пусть x и y – две различные точки окружности. В обоих случаях степень f равна сумме углов поворота путей $f\circ\gamma_1$ и $f\circ\gamma_2$. ■

Угол поворота позволяет дать гомотопическую классификацию путей и петель.
Т е о р е м а.
1. Два пути в S^1 с общим началом и концом гомотопны с закреплёнными концами титтк углы их поворотов равны. /напомним, что разница в углах поворотов путей с общим началом и концом кратна 2π /.
2. Два отображения $S^1\to S^1$ гомотопны титтк их степени равны.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пока мы можем доказать только половину теоремы: если...равны, то... гомотопны.

1/ Рассмотрим поднятия путей, начинающиеся в одной точке. Так как углы поворота равны, то поднятия кончаются тоже в одной точке. В силу односвязности $\mathbb{R}_1$ поднятия гомотопны; следовательно, гомотопны и сами пути.
2/ Как объяснялось в пункте II, гомотопность отображений окружности равносильна гомотопности петель, им соответствующих / в классе петель/. Поэтому достаточно доказать, что петли в T, имеющие равное число оборотов, гомотопны /в классе петель/.

Пусть числа оборотов двух петель равны и начинаются они в одной и той же точке. Тогда их гомотопность вытекает из уже доказанного в п. I. Общий случай сводится к этому при помощи следующей леммы.
Л е м м а. Для всякой петли γ и для всякой точки x существует гомотопная ей петля с тем же числом оборотов, начинающаяся в x.
Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть γ – исходная петля. Для каждого $\varphi\in\mathbb{R}$ рассмотрим "поворот на угол φ" петли γ, т.е. отображение $x\mapsto exp(i\varphi)\circ\gamma(x)$. Все повороты данной петли гомотопны друг другу: непрерывно меняя φ, получаем искомую гомотопию. Один из поворотов петли γ начинается и кончается в x ■.

Поясняем более подробно, как из доказанного следует, что отображения одинаковой степени гомотопны.

*) Напоминаем, что S^1, T^1 и T –разные обозначения одного и того же пространства – окружности.

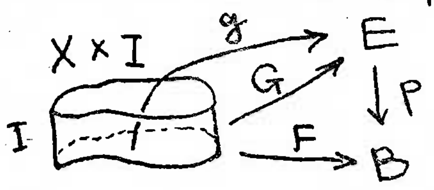
Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : T \to T$. Петли $t \mapsto \gamma_1(\exp 2\pi i t)$ и $t \mapsto \gamma_2(\exp 2\pi i t)$ гомотопны в классе петель и, следовательно, существует непрерывное отображение квадрата $ABCD$ в T, равное γ_1 на AB, γ_2 - на CD и одинаковое на AC и BD. "Склеивая" AC с BD, получаем отображение $T\times[0,1]$ - искомую гомотопию. /Более формально, пользуемся тем, что $(x,y)\mapsto(\exp 2\pi i x, y)$ - факторотображение $ABCD$ на $T\times[0,1]$./ ▨

Чтобы доказать вторую половину теоремы, нам понадобится вернуться к общим фактам, касающимся всех накрытий.

12. Теорема о накрывающей гомотопии.

Эта теорема является обобщением теоремы о поднятии пути.

Т е о р е м а. Пусть $p: E\to B$ - накрытие, X - топологическое пространство. Пусть задано непрерывное отображение F "цилиндра" $X\times I$ в B и непрерывное отображение нижней "крышки" $X\times\{0\}$ этого цилиндра в E, согласованное с отображением нижней крышки в B: $p(g(x,0))=F(x,0)$ для всех $x\in X$. Тогда существует и единственно непрерывное отображение G цилиндра $X\times I$ в B, "поднимающее" F /т.е. такое, что $p\circ G = F$/ и продолжающее g.



К о м м е н т а р и и.

1. Пусть X состоит из одной точки. Тогда F - путь в B, g - точка в E, "проектирующаяся" в начало пути F, и задача состоит в построении пути G, поднимающего F и начинающегося в g. Таким образом, теорема о поднятии пути является следствием рассматриваемой теоремы.

2. Пусть теперь X произвольно. Зафиксируем в нём произвольную точку x_0. Рассмотрим ситуацию на вертикали $\{x_0\}\times I$. Функция $t\mapsto F(x_0,t)$ задаёт путь в B, точка $g(x_0,0)$ проектируется в начало этого пути. Если функция G - искомая, то путь $t\mapsto G(x_0,t)$ должен быть поднятием пути $t\mapsto F(x_0,t)$, начинающимся в $g(x_0,0)$. Таким образом, нашу задачу можно понимать так: имеется семейство путей в B, зависящее от параметра $x_0\in X$ /задаваемое функцией F/; для каждого пути задан /с помощью функции g/ некоторый прообраз его начала. Нам нужно поднять все эти пути /получив тем самым функцию G/. Таким образом, существование и единственность G вытекают из теоремы о поднятии пути, и проблема только в непрерывности G: надо доказать, грубо говоря, что если путь в B "непрерывно" зависит от x_0 и заданное начало в E непрерывно зависит от x_0, то и поднятый путь будет "непрерывно" зависеть от x_0 /"непрерывная" зависимость пути от x_0 означает непрерывность соответствующей функции на $X\times I$/.

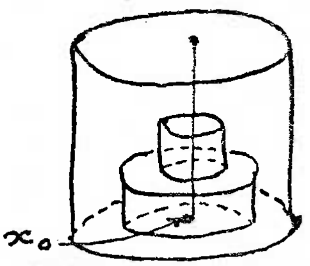
Доказательство непрерывности. Как и в теореме о поднятии пути, рассмотрим сначала частный случай: пусть образ $X\times I$ при F попадает целиком в регулярное множество V. Прообраз его состоит из нескольких гомеоморфных V частей. Пусть образ $X\times\{0\}$ при g попадает целиком в одну из этих частей /назовём её W/ и $p^{-1}: V\to W$ - гомеоморфизм, обратный к p. Тогда функция $G(x,t)=p^{-1}(F(x,t))$ будет искомым поднятием и будет непрерывной. Следовательно, в рассмотренном случае единственно возможное поднятие будет непрерывным.

В общем случае мы будем доказывать такой факт: для всякой точки x_0 существует окрестность $V\subset X$ и непрерывное отображение $G_V: V\times I$ в E, поднимающее $F|_{V\times I}$ и согласованное с $g|_{V\times\{0\}}$. В силу единственности оно будет совпадать с G и, следовательно, непрерывность G будет доказана. Итак, пусть x_0 - фиксированная точка X. Назовём подмножество $A\subset X\times I$ регулярным, если $F(A)$ содержится в регулярном открытом множестве.

Л е м м а. Существует такое $\varepsilon>0$ и такая окрестность U точки x_0, что любой цилиндрик вида $U\times[\alpha,\beta]$ при $|\beta-\alpha|<\varepsilon$ регулярен.

Д - в о л е м м ы. В самом деле, у каждой точки отрезка $\{x_0\}\times I$ есть цилиндрическая регулярная окрестность $(\alpha_x,\beta_x)\times V_x$. Выбираем из них конечное покрытие компакта $\{x_0\}\times I$; в качестве V возьмём пересечение всех V_x, соответствующих множествам этого конечного покрытия; ε выбираем с помощью леммы Лебега /о том, что любой интервал достаточно малой длины целиком входит в некоторый интервал покрытия (α_x, β_x)/.

Вернёмся к доказательству сформулированного факта. Поделим отрезок $[0,1]$ точками $0=t_0, \dots, t_n=1$ на отрезки длины меньше ε. Цилиндр $U\times[t_0,t_1]$ регулярен и образ его содержится в регулярном открытом множестве. Уменьшая U, если надо, можно считать, что $U\times\{t_0\}$ попадает при отображении g в одну из гомеоморфных частей прообраза этого регулярного множества в E. Поэтому на $U\times[t_0,t_1]$ существует непрерывное поднятие. Цилиндр $U\times[t_1,t_2]$ тоже регулярен, а уже построенное поднятие непрерывно на верхней крышке $U\times\{t_1\}$, поэтому, сужая U, если надо, можно считать, что образ $U\times\{t_1\}$ в E при уже построенном поднятии целиком лежит в одной из гомеоморфных частей прообраза регулярного множества, содержащего $F(U\times[t_1,t_2])$. Это позволяет продолжить поднятие. Так мы достроим поднятие доверху и построим F_V. Доказательство непрерывности закончено. Итак, теорема о накрывающей гомотопии доказана.



Пусть в условиях этой теоремы $X=[0,1]$. В этом случае теорема утверждает, что если в базе есть гомотопия - семейство путей γ_t - и мы поднимаем все их, причём начало поднятия непрерывно зависит от t, то получается гомотопия в накрывающем пространстве. /В частности, отсюда следует, что конец поднятия пути γ_t также непрерывно зависит от t./

Следствие I. Если γ_t - семейство путей в T, образующее гомотопию, то функция $/ t \mapsto$ угол поворота пути γ_t / непрерывна.

В самом деле, подняв сначала функцию $/ t \mapsto$ начало γ_t /, (*) получим гомотопию в $\mathbb{R}$, являющуюся поднятием гомотопии γ_t.

Следствие 2. Если $p: E\to B$ - накрытие и пути γ_1 и γ_2 /в B/ гомотопны с фиксированным началом и концом, а их поднятия $\tilde\gamma_1$ и $\tilde\gamma_2$ имеют общее начало, то и конец у $\tilde\gamma_1$ и $\tilde\gamma_2$ общий.

(В самом деле, пусть γ_t - гомотопия; поднимаем все пути γ_t, взяв в качестве начала одну и ту же точку; конец поднятий будет непрерывно зависеть от t и проектироваться в одну и ту же точку в B - поэтому будет постоянным./

Из следствия 2 вытекает одна из обратных импликаций в п.II: если два пути в S^1 гомотопны с фиксированными началом и концом, то их углы поворота равны.

Вторую импликацию: гомотопные отображения $S^1\to S^1$ имеют одинаковые степени - можно вывести из следствия I: угол поворота соответствующей петли непрерывно зависит от параметра гомотопии и кратен 2π - следовательно, постоянен.

Т е о р е м а. Степень композиции двух отображений S^1 в S^1 равна произведению степеней:

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если заменить f и g на гомотопные отображения, то композиция тоже заменится на гомотопную, поэтому степени не изменятся. С другой стороны, $\deg(z\mapsto z^k)=k$ /задача 35/, поэтому степени отображений $z\mapsto f(z)$ и $z\mapsto z^{\deg f}$ равны, следовательно, эти отображения гомотопны. Итак, $(f\circ g)$ гомотопно композиции $z\mapsto z^{\deg f}$ и $z\mapsto z^{\deg g}$, т.е. $z\mapsto z^{\deg f\cdot\deg g}$. Следовательно, $\deg(f\circ g) = \deg(z^{\deg f\cdot \deg g}) = \deg f\cdot\deg g$. ▨

Аналогичное рассуждение показывает, что степень произведения двух отображений f и g /т.е. отображения $t\mapsto f(t)\cdot g(t)$/ равна $\deg f + \deg g$.

I3. Угол поворота пути в $\mathbb{R}^2$.

Пусть γ - путь в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Определим угол поворота пути γ вокруг 0 как угол поворота пути $\pi\circ\gamma$ в T, где π - центральная проекция $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ на T: $\pi(x)=x/\|x\|$. Угол поворота пути γ в $\mathbb{R}^2$ вокруг произвольной точки a, не принадлежащей образу γ, определяется как угол поворота пути $\gamma(t)-a$ вокруг 0. Из доказанного выше вытекают следующие свойства:

(*) вставка: и используя полученную функцию для выбора начала при поднятии γ_t, I/ Угол поворота петли есть $2\pi k$ при целом k, которое называется числом оборотов.

2/ Пути гомотопные в $\mathbb{R}^2\setminus\{a\}$ с фиксированным началом и концом, имеют равные углы поворота вокруг точки a.

3/ Если γ_t – семейство путей, не проходящих через точку a и непрерывно зависящих от t /т.е. гомотопия/, то функция /$t\mapsto$ угол поворота пути γ_t вокруг a/ непрерывна.

I4. Геометрические следствия.

I. T не односвязно /тождественное отображение имеет степень I/.

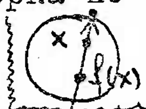
2. Тождественное отображение T в себя не продолжается до непрерывного отображения круга.

3. $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ не односвязно. /Поэтому оно не гомеоморфно $\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ при $k>2$, которое односвязно, см. п.8./

4. $\mathbb{R}^k$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, если $n\neq k$ и одно из чисел n или k не больше 3. /Из гомеоморфности $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ следовала бы гомеоморфность $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ и $\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$/. На самом деле это верно при любых различных n и k.

5. Теорема Брауэра. Всякое непрерывное отображение $\mathcal{D}^2$ в себя имеет неподвижную точку.

Первое доказательство. Если отображение f не имеет неподвижной точки, то тождественное отображение T в себя продолжается до непрерывного отображения $\mathcal{D}^2$ в T: точке $x\in\mathcal{D}^2$ сопоставляется точка пересечения луча $\langle f(x), x\rangle$ с окружностью. /Однако проверка непрерывности этого отображения утомительна/. ▨



Второе доказательство. /набросок/. Заметим, что если $\varphi: T\to T$ – непрерывное отображение и $\varphi(x)\neq x$ при всех x, то $x\mapsto \varphi(x)/x$ никогда не равно I, поэтому имеет степень 0 /задача 4I/, поэтому φ имеет степень I /$\varphi(x)=x\cdot(\varphi(x)/x)$ см. п.I2./ и не продолжается на круг. Если f не имеет неподвижной точки, то $\tau: x\mapsto (f(x)-x)/\|f(x)-x\|$ – непрерывное отображение $\mathcal{D}^2$ в T, причём при $x\in T$ не может быть верно $\tau(x)=x$, /в этом случае было бы $f(x)-x=\lambda x$ при $\lambda>0$, и, следовательно, $f(x)\notin\mathcal{D}^2$/. Получаем противоречие. ▨

6. /Основная теорема алгебры/. Всякий многочлен положительной степени из $\mathbb{C}[z]$ имеет комплексный корень.

Доказательство. Пусть $P(z)$ – многочлен с комплексными коэффициентами, не имеющий корня. Через γ_R обозначим петлю в $\mathbb{C}$, обходящую в положительном направлении окружность радиуса R: $\gamma_R(t)=R\cdot\exp(2\pi i t)$. Так как по нашему предположению P не имеет корня, то ни одна из петель $P\circ\gamma$ не проходит через 0. Семейство $P\circ\gamma_t$ при $0\le t\le R$ образует гомотопию в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ петли $P\circ\gamma_R$ и постоянной петли. Поэтому желаемое противоречие будет получено, если мы докажем, что

при достаточно большом R число оборотов петли $P\circ\gamma_R$ вокруг 0 равно степени многочлена P. Если $P(z)=a_n z^n$ /содержит только член старшей степени/, то это очевидно. Если же это не так, рассмотрим многочлен $\tilde P$, получающийся из P выбрасыванием всех членов, кроме старшего. Требуемое утверждение будет доказано, если мы установим, что

при достаточно больших R петли $P\circ\gamma_R$ и $\tilde P\circ\gamma_R$ гомотопны.

Это доказывается так: при больших значениях $|z|$ расстояние между точками $P(z)$ и $\tilde P(z)$ много меньше расстояния их до 0 /т.к. $|P(z)-\tilde P(z)|/|\tilde P(z)| = |\text{многочлен степени} <n|/|a\cdot z^n|\to 0$ при $|z|\to\infty$/, следовательно, отрезок $[P(z),\tilde P(z)]$ не содержит 0 и семейство $F_t(\tau)=P\circ\gamma_R(\tau)+t\cdot(\tilde P\circ\gamma_R(\tau)-P\circ\gamma_R(\tau))$ является гомотопией. ▨

I5. Теорема о монодромии.

Это теорема обобщает теорему о накрывающем пути и накрывающей гомотопии и даёт условия, при которых отображение из некоторого пространства X в базу накрытия можно поднять до отображения в накрывающее пространство.

Теорема. Пусть $p: E\to B$ – накрытие, X – односвязное связное локально линейно связное /и, следовательно, линейно связное/ пространство, $f: X\to B$ – непрерывное отображение. Тогда существует такое непрерывное отображение $F: X\to E$, что $p\circ F=f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Если потребовать, чтобы заданная точка $x_0 \in X$ переходила в заданный прообраз e_0 точки $f(x_0)$, то такое F существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как пространство X линейно связно /напомним, что локально линейно связное и связное пространство линейно связно/, то точку x_0 можно соединить путями с любой точкой $x \in X$; в силу односвязности все эти пути гомотопны. Применяя к этим путям f , получаем гомотопные пути в B , соединяющие $f(x_0)$ и $f(x)$. Если искомая функция F существует, то она переводит рассмотренные пути в X в пути в E , являющиеся поднятиями путей в B . Отсюда следует единственность. Кроме того, видно, как определить $F(x)$: надо поднять пути в B , соединяющие $f(x_0)$ и $f(x)$, в E , начиная с e_0 . У них будет общий конец /следствие 2, п.I2/, который и надо взять в качестве $F(x)$. Таким образом, F корректно определено - не зависит от выбора пути. Непрерывность построенной функции F вытекает из локальной линейной связности X : из-за нее значение F в близкой к x точке x' можно вычислять, рассматривая путь из x_0 в x' , идущий сперва из x_0 в x, а затем из x в x'; образ при f второй части пути лежит в регулярной окрестности точки $f(x)$.

Пример применения теоремы о монодромии.

Теорема /Борсук - Улам/. Для всякого непрерывного отображения $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ /S^2 -сфера $\|x\|=1$ в $\mathbb{R}^3$ / существует такая точка x , что $f(x)=f(-x)$ /f склеивает противоположные точки/.

Доказательство. Пусть при всех x $f(x)\neq f(-x)$. Тогда функция $\varphi(x)= f(x)-f(-x)$ отображает S^2 в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ и $\varphi(-x)=-\varphi(x)$. Переходя к $\varphi(x)/\|\varphi(x)\|$, мы можем считать, что φ - отображение S^2 в T с тем же свойством. Так как S^2 односвязна, это отображение поднимается до отображения $\psi: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; при этом $\psi(x)-\psi(-x)=(2K+1)\pi$, так как $\psi(x)$ и $\psi(-x)$ попадают в противоположные точки окружности. Число K непрерывно зависит от x , будучи целым; следовательно, постоянно. А это невозможно: подставляя $-x$ вместо x , получаем, что $2K+1=0$. ▨

A36

Задачи по курсу "Элементы топологии"

I. В пространстве всех ф-ий из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ с топологией поточечной сходимости функция $f(x) \equiv I$ является предельной для множества F всех функций отличающихся от 0 лишь на конечном множестве, однако не существует последовательности точек F, сходящейся к f. (Ср. задачи 3 б), в).)

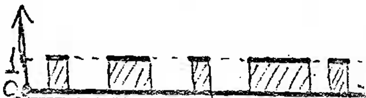
2*. Докажите, что: а) произведение счетного числа метризуемых пространств метризуемо; б) если каждое из них компактно, то и произведение компактно. (Ср. с теоремой Тихонова, см. также задачу I2.)

Указание к п. б): при выборе сходящейся последовательности используйте диагональный процесс /ввиду а) рассуждения с последовательностями достаточно!/

3*. Пусть X – пространство функций на $[0,I]$ с топологией поточечной сходимости. Докажите, что:

а) подмножество непрерывных функций плотно в X;

б) не существует последовательности непрерывных функций, сходящейся к функции Дирихле $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ – иррац.} \\ I, & \text{если } x \text{ – рац.} \end{cases}$

в) Множество функций из "конечного числа ступенек" вида  с суммарным интегралом, равным 1/2, плотно в пространстве функций из R в {0,1}, однако не существует последовательности таких функций, сходящейся к 0 или к I.

4. Двойственность – один из важнейших математических принципов. Пусть X – множество, а FX некоторое множество числовых ф-ий на X. Тогда, сопоставляя точке $x \in X$ и функции $f \in FX$ число $f(x)$, мы получим отображение $\mathcal{D}: X \times FX \to$ (числа). Говорят, что $\mathcal{D}$ осуществляет двойственность между X и FX. С помощью $\mathcal{D}$ можно отобразить X в пространство FFX функций на FX: точке x сопоставляется функция на FX, переводящая f в $f(x)$. Если множество FX разделяет точки X (т.е. для любых $x, y \in X$ и $x \neq y$ найдется такое $f \in FX$, что $f(x) \neq f(y)$), то это отображение X в FFX является вложением. Выбор множества функций FX зависит от рассматриваемой математической "категории". Например, если X – векторное пространство, FX – мн-во линейных ф-ий на X, то мы получаем вложение пространства во второе сопряженное.

а)* Пусть X – натуральные числа, FX – отображения X в двухэлементное множество $\{0,I\}$ /т.е. FX состоит из последовательностей единиц и нулей/. Наделим множество FFX отображений FX в $\{0,I\}$ топологией поточечной сходимости. По теореме Тихонова FFX компактно /ср. п.3 и задачу I2 б)/, однако в FFX есть последовательность, не содержашая сходящихся подпоследовательностей.

б) Отделимое топологическое пространство X называется нормальным, если для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B существует непрерывная ф-ия на X, равная 0 на A и I на B. Метрическое пространство всегда нормально.

в) Пусть X – нормально, FX – мн-во непрерывных отображений X в отрезок $[0,I]$ и пространство $\underbrace{\text{всех отображений}}_{FFX}$ из FX в $[0,I]$ наделено топологией поточечной сходимости. Тогда отображение $X \to FFX$ является гомеоморфизмом X на его образ.

г) Всякое нормальное пространство можно гомеоморфно вложить в компактное

д)* Нормальное пространство со счетной базой метризуемо (Урысон). /Используйте вложение $X \to FFX$ для подходящего FX

е)* Непрерывную функцию на замкнутом подмножестве нормального пространства X можно продолжить до непрерывной функции на X (теорема Титце-Урысона о продолжении).

ж)** Пусть G – конечная абелева группа; множество FG всех гомоморфизмов G в мультипликативную группу $\mathbb{C}^{*}$ является группой относительно умножения. Докажите, что G и FG имеют равное число элементов и отображение $G \to FFG$ является изоморфизмом групп./Двойственность Понтрягина/.

5. Приведите пример такого X и такого отношения эквивалентности, чтобы один из классов эквивалентности был незамкнут. В этом случае соответствующая точка факторпространства не замкнута, и поэтому оно не может быть отделимым.

6. Отображение $[0,1] \xrightarrow{p} T$ (T есть окружность $|z|=1$ в $\mathbb{C}$), определенное формулой $p(t) = \exp(2\pi i t)$, есть факторотображение, и, следовательно, факторпространство отрезка по отношению эквивалентности: $x \sim y$, если $x=y$ или $x,y \in \{0,1\}$ (отрезок со склеенными концами) гомеоморфно T.

7*. а) Числа x и y эквивалентны, если $x-y$ – целое число. Докажите, что соответствующее факторпространство гомеоморфно T (окружности $|z|=1$ в $\mathbb{C}$).

Введем теперь на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ отношение эквивалентности: $x \sim y$, если x и y пропорциональны(над $\mathbb{R}$). Тогда соответствующее факторпространство изоморфно T.

б) Матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $b>0$, $a \in \mathbb{R}$, образуют группу G преобразований $\mathbb{R}^2$. Введем на $\mathbb{R}^2$ отношение эквивалентности: $x \sim y$, если существует преобразование из группы G, переводящее x в y. Исследуйте факторпространство и его топологию.

8. Проекция $X \times Y \to X$ является факторотображением.

9. Теорема Линделефа: в пространстве со счётной базой всякое открытое покрытие содержит счетное подпокрытие.

10. В пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ с топологией поточечной сходимости (счетное) множество полиномов с рациональными коэффициентами пересекается с любым открытым множеством, но счетной базы в этом пространстве нет.

11. Произведение конечного числа компактных пространств компактно.

12. а) Сходимость последовательности в тихоновском произведении бесконечного числа пространств равносильна сходимости по каждой координате в отдельности.

б)**Произведение любого числа компактных пространств компактно /т.Тихонова/.

13. Докажите упомянутые в п. 4 факты, в частности, то, что взаимно однозначное непрерывное отображение компакта на отделимое пространство – гомеоморфизм.

I4. Множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся объединением прямой $x=0$ и графика функции $\sin(\frac{1}{x})$, связно, но не линейно связно.

I5. а/ Описать все связные множества на прямой /см. п.5, теорема I/.

б/ Если $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset X$ связны /линейно связны/ и $E_k \cap E_{k+1} \neq \emptyset$, то $E_1 \cup \ldots \cup E_n$ связно /линейно связно/.

в/ Замыкание связного множества связно.

I6. Рассмотрим множество обратимых $n \times n$ матриц как подмножество n^2-мерного векторного пространства. Исследовать его на связность в вещественном и комплексном случае.

I7. а/ Приведите пример локально связного, но не связного подмножества $\mathbb{R}^2$.

б/* Приведите пример связного, но не локально связного подмножества $\mathbb{R}^2$.

I8. В линейно связном пространстве любые два пути гомотопны.

I9.* При $n > 2$ $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ односвязно.

20. Пусть X – произвольное пространство. Между множествами $[X, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}]$ и $[X, S^{n-1}]$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

2I.* Доказать, что $z \to z^n$, $z \to e^z$, $G \to G/_H$, где H – дискретная подгруппа G /подробнее см. п.9 /в/ – /д/ /. суть накрытия.

22. Отображение $t \longmapsto \exp(it)$ как отобржение $]0, +\infty[$ на T /окружность/ является локальным гомеоморфизмом, но не является накрытием.

23. Если две петли с общим началом гомотопны в классе петель, то они гомотопны с фиксированным началом и концом.

24. Любые две точки связного открытого множества A в нормированном пространстве можно соединить ломаной, лежащей в A.

25. Пусть G – отделимая топологическая группа.

а/ Если H – дискретная подгруппа, то G/H отделимо.

б/* Если G связна, то любой дискретный нормальный делитель в G лежит в центре группы G (в подгруппе элементов, коммутирующих со всеми).

в/ Если G связна и U – окрестность I, то всякий элемент $g \in G$ представляется в виде $g = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, где $u_i \in U$.

г/** Пусть G односвязна, U-окрестность I в G, G_1 топологическая группа и $\varphi: U \to G_1$ – непрерывное отображение, являющееся гомоморфизмом в следующем смысле: если $g, g_1, g_2 \in U$ и $g = g_1 \cdot g_2$, то $\varphi(g) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$. Доказать, что φ продолжается до гомоморфизма всей группы G в G_1.

26. Если база накрытия связна, то число прообразов точки базы не зависит от точки.

27.** Пусть $E \to G$ – накрытие, причем G – связная топологическая группа. Определить на E структуру топологической группы.

28. Пусть $p: E \to B$ – накрытие, b_1 и $b_2 \in B$ и существует путь γ из b_1 в b_2. Установить с его помощью взаимно однозначное соответствие между $p^{-1}(b_1)$ и $p^{-1}(b_2)$.

29. Пусть $\xi: [0,1] \to [0,1]$ – непрерывное отображение; $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = 1$. Пусть γ – путь в произвольном пространстве X. Доказать, что он гомотопен пути $t \mapsto \gamma(\xi(t))$.

30. Односвязен ли тор $T^2 = T \times T$?

31. Сфера в нормированном пространстве линейно связна.

32.* Если в теореме о поднятии пути накрытие заменить локальным гомеоморфизмом, то существование может нарушиться, а единственность сохранится.

33.* Если в теореме о накрывающей гомотопии заменить накрытие на локальный гомеоморфизм, то существование может нарушиться, а единственность и непрерывность сохранятся.

34. Два отображения γ_1 и γ_2: $T \to X$ гомотопны тогда и только тогда, когда петли $\gamma_1(\exp 2\pi i t)$ и $\gamma_2(\exp 2\pi i t)$ гомотопны в классе петель.

35. Найти степень отображения $T \to T$, переводящего z в z^k.

36. Выведите п.3 следствия из п.II из п. 2. того же следствия (ср. задачу 34).

37.* На пространстве путей $C(I,X)$ можно ввести топологию так, что определение гомотопии как семейства γ_t путей, непрерывно зависящего от параметра t, можно будет понимать буквально: для любого топологического пространства U функция $\Gamma(t,x): U \times I \to X$ непрерывна в обычном смысле тогда и только тогда, когда функция $t \mapsto \gamma_t$, где $\gamma_t: x \mapsto \Gamma(t,x)$, непрерывна как отображение U в $C(I,X)$. С помощью этой топологии теорему о накрывающей гомотопии можно сформулировать так: отображение: (путь в базе, прообраз начала) $\to$ (поднятие пути) является непрерывным. Докажите это.

38.* Докажите, что топология на $C(I,X)$, описанная в задаче 37, существует. Указание. Базой этой топологии будут множества, получаемые так: пусть $K_1, \dots, K_n$ – замкнутые подмножества I, $U_1, \dots U_n$ – открытые подмножества X; рассматриваются все те $f \in C(I,X)$, что $f(K_i) \subset U_i$. (Теорема Бурбаки.)

39.* Исследуйте на односвязность множества невырожденных $n \times n$ матриц в вещественном и комплексном случаях;

б) то же для матриц с определителем, равным I.

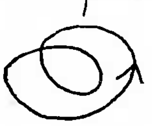
Указание. Рассмотреть сперва случай 1×1- и 2×2-матриц.

40. Докажите равносильность следующих свойств непрерывного отображения $f: T \to T$:

1) f гомотопно постоянному;
2) f продолжается до непрерывного отображения в T;
3) существует непрерывное отображение $g: T \to \mathbb{R}$, для которого $f(x) = \exp(2\pi i g(x))$

41. Доказать, что непрерывное отображение $T \to T$, не являющееся наложением, гомотопно постоянному.

42. Если $f, g: T \to T$ "близки", например, $|f(x) - g(x)| < 1$ (достаточно, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ ни при каких x не были диаметрально противоположными), то f гомотопно g.

43.  Чему равны числа оборотов для этой петли в трех связных областях дополнения к ее образу?

44. Теорема о монодромии для случая $X = [0,1] \times [0,1]$ является тривиальным следствием теоремы о накрывающей гомотопии.

45.* Дайте другое доказательство того, что всякое отображение $S^2 \to T$ поднимается до отображения $S^2 \to \mathbb{R}$ (не использующее односвязности S^2).
Указание. Отображение S^2 куда-то есть просто отображение $\mathcal{D}^2$, переводящее край $\mathcal{D}^2$ в одну точку.

46. Верно ли, что: а) пересечение убывающей последовательности связных компактных множеств связно? б) пересечение убывающей последовательности открытых связных множеств связно?

47. Верно ли, что: а)* пересечение убывающей последовательности односвязных компактных множеств односвязно? б) пересечение убывающей последовательности открытых односвязных множеств односвязно?

48. а) Пусть U – топологическое пространство; $\gamma_a (a \in U)$ – семейство путей в T, непрерывно зависящее от a (в смысле непрерывности на $U \times [0,1]$ функции $(a,t) \mapsto \gamma_a(t)$). Доказать с помощью теоремы о накрывающей гомотопии, что функция $a \longmapsto$ (угол поворота пути γ_a) непрерывна.
Указание. Для $U = [0,1]$ это уже сделано в тексте; в общем случае потребуется поднять некоторое отображение из U в T до отображения из U в $\mathbb{R}$ (что, вообще говоря, невозможно); но это достаточно сделать локально, а локально это возможно в силу определения накрытия.

б) Если γ – путь в $\mathbb{R}^2$, то функция $a \longmapsto$ (угол поворота пути γ вокруг a), определенная на открытом множестве $(\mathbb{R}^2 \setminus \text{образ } \gamma)$, непрерывна.

в) Если γ – петля в $\mathbb{R}^2$, то упомянутая функция локально постоянна, и, следовательно, постоянна на связных компонентах дополнения к образу γ.

49. Плоскость без m точек и плоскость без n точек не гомеоморфны, если $m \neq n$.

50. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение и $f(f(x)) = x$ для всех x. Доказать, что f имеет неподвижную точку (то есть существует такое x, что $f(x) = x$), если:

а) $n = 1$ (это почти очевидно)

б) $n = 2$

При $n > 2$ это утверждение также верно, но доказательство его требует довольно сложных методов, нами не рассматривавшихся.

51. Пусть G – топологическая группа, γ_1 и γ_2 – две петли, начинающиеся в единице. Тогда петли $\gamma_1 \cup \gamma_2$, $\gamma_2 \cup \gamma_1$ и $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ попарно гомотопны. (Через $\gamma_1 \cup \gamma_2$ обозначается петля, которая сначала идет по γ_1, затем по γ_2: $\gamma_1 \cup \gamma_2 : t \mapsto \gamma_1(2t)$ при $t \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_2(2t-1)$, $t \geq \frac{1}{2}$; через $\gamma_2 \cup \gamma_1$ обозначается петля, построенная аналогичным образом с заменой γ_1 на γ_2 и наоборот; через $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ обозначается петля $t \mapsto \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$.)

Примечание. Звездочкой помечены более трудные задачи, двумя – еще более трудные.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

1. Пусть $\mathcal{U}$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Дифференциальной формой/первой степени/ называется отображение ω, сопоставляющее каждой точке $x \in \mathcal{U}$ линейный функционал на $\mathbb{R}^n$: $\omega: \mathcal{U} \to (\mathbb{R}^n)'$. Мы будем рассматривать только непрерывные дифференциальные формы /первой степени/, не оговаривая это особо.

Примеры и замечания.

I/ Если f – непрерывно дифференцируемая функция, то её производная является дифференциальной формой; эта форма обозначается df.

2/ Введём в $(\mathbb{R}^n)'$ базис $e^1, \ldots, e^n$, сопряжённый к стандартному базису в $\mathbb{R}^n$. Каждая дифференциальная форма ω однозначно представляется в виде $\omega_1(x)e^1 + \ldots + \omega_n(x)e^n$. Иногда вместо e^i пишут dx_i, так как производная функции $x \mapsto x_i$ всюду равна e^i. /Так мы и поступим в дальнейшем/.

2. Пусть ω – дифференциальная форма в $\mathcal{U}$, γ – C^1-путь, $\gamma:[a,b] \to \mathcal{U}$. Определим интеграл формы ω по пути γ формулой $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$. Если φ – диффеоморфизм отрезков $[a,b]$ и $[a',b']$ /точнее, их открытых окрестностей, при котором $[a,b]$ переходит в $[a',b']$/, сохраняющий ориентацию /переводящий a в a' и b в b'/, пути $\gamma:[a,b] \to \mathcal{U}$ и $\gamma':[a',b'] \to \mathcal{U}$ переходят друг в друга при этом изоморфизме $(\gamma = \gamma'\circ\varphi)$, то $\int_{\gamma'}\omega = \int_\gamma \omega$. Если γ обращает ориентацию, то интегралы отличаются знаком /проверьте!/.

Можно определить интеграл по кусочно-гладкому пути, разбив его на гладкие части. /Способ разбиения безразличен./ Следующий факт почти очевиден:

Теорема. Интеграл формы df по пути γ равен разности значений функции f в конце и в начале пути.

Доказательство. Применим формулу Ньютона-Лейбница к функции $t \mapsto f(\gamma(t))$. ∎

3. Нас будет интересовать возможность представления формы в виде df.

Определение. Форма ω, заданная в области $\mathcal{U}$, называется кограницей, если существует её первообразная, то есть непрерывно дифференцируемая функция $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, для которой $\omega = df$. Найти первообразную у формы $\omega = P_1\,dx_1 + \ldots + P_n\,dx_n$ означает решить систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$f'_{x_1} = P_1, \ldots, f'_{x_n} = P_n.$$

Теорема. Следующие условия равносильны:

/I/ ω – кограница;

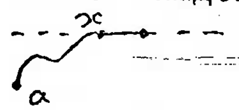
/2/ интеграл формы ω по любым кусочно-гладким путям с общим началом и концом одинаков;

/3/ интеграл формы ω по любой кусочно-гладкой петле равен 0.

Доказательство. /2/⇒/3/ Сравниваем любую петлю с постоянной. /3/⇒/2/. Если γ_1 и γ_2 имеют общее начало и конец, то путь $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ /сначала γ_1, а затем γ_2 в обратном направлении/ является петлёй.

/I/⇒/2/ Следует из теоремы преднидущего пункта.

/2/⇒/I/. Пусть ω обладает свойством /2/. Нам надо найти функцию f, для которой $df=\omega$. Для этого зафиксируем точку $a\in\mathcal{U}$ и положим $f(x)$ равным интегралу формы ω по /любому/ пути, соединяющему a и x. /Если $\mathcal{U}$ не связна, то делаем так в каждой связной компоненте/. Рассматривая пути вида



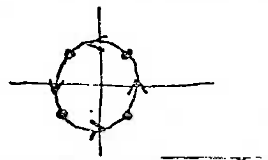
идущие сначала из a в x, а затем вдоль i-ой координаты, можно легко увидеть, что $f'_{x_i}=i$-ой компоненте формы ω и $df=\omega$ ∎

4. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2\setminus 0$ многозначную "функцию" φ /угол/, определённую с точностью до $2\pi k$. Тем не менее её дифференциал определён однозначно, так как разные ветви отличаются на константу. Записывая $\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)+C$, видим, что в области $x\neq0$ форма $d\varphi$ равна $(x\,dy-y\,dx)/(x^2+y^2)$; в области $y\neq0$ можно воспользоваться формулой $\varphi=-\operatorname{arctg}(x/y)+C$ и получить тот же ответ.

Лемма. I/ Форма $d\varphi$, рассматриваемая в любой из областей $x\neq0$ или $y\neq0$, является кограницей.

2/ Форма $d\varphi$ не является кограницей в $\mathbb{R}^2\setminus 0$.

Доказательство. Пункт I/ вытекает из определения. Для доказательства 2/ отметим, что интеграл формы $d\varphi$ по окружности с центром в 0 равен 2π. Это можно выяснить, используя определение интеграла, а можно разбить окружность на четыре части, лежащие в областях $x\neq0$ или $y\neq0$ и к каждой из них применить теорему п.2 /в этих областях мы знаем первообразные!/ ∎

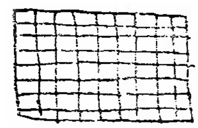


5. Форма $d\varphi$ является примером коцикла. Коциклом называется форма, локально являющаяся кограницей, то есть такая форма ω в области $\mathcal{U}$, что для всякой точки $x\in\mathcal{U}$ существует окрестность $\mathcal{O}$, содержащая x, и функция $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$, для которой $d\varphi=\omega$.

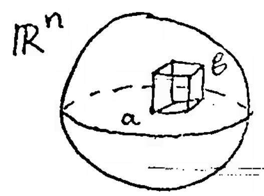
Теорема. I/ Форма ω в области $\mathcal{U}$ является коциклом тогда и только тогда, когда интеграл от ω по любому /двумерному/ прямоугольнику со сторонами, параллельными координатным осям и целиком лежащему /вместе со внутренностью/ в области $\mathcal{U}$, равен 0.

2/ Если $\omega\in C^1$, $\omega=P_1dx_1+\ldots+P_ndx_n$, то ω является коциклом тогда и только тогда, когда $\frac{\partial P_i}{\partial x_j}=\frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ для всех i и j.

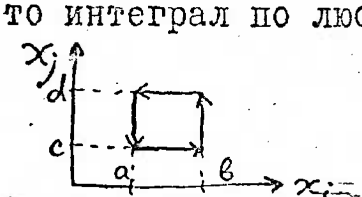
Доказательство. I/ /а/ Пусть ω – коцикл. Разобьём наш прямоугольник на настолько малые прямоугольники, чтобы каждый из них содержался в области, где ω - когранична /компактность!/. Тогда интеграл по каждому из них будет равен 0, а, значит, и сумма - интеграл по всему прямоугольнику - равна 0.



/б/ Докажем, что если условие равенства 0 интегралов по прямоугольникам выполнено для формы ω, определённой в шаре, то эта форма - когранична. В самом деле, определим функцию f, положив её значение в точке b равным интегралу формы ω по любому /из $n!$ / путей, идущих из a в b параллельно осям координат. Интегралы по ним равны, так как от любого из них можно перейти к другому по шагам, на каждом из которых добавляется интеграл по прямоугольнику. Соображение, аналогичное примененному в доказательстве теоремы п.3, показывает, что $df = \omega$.



2/ /а/ Если $\omega = df$, то $P_i = \partial f/\partial x_i$ и требуемое равенство вытекает из равенства смешанных производных. /б/ Если $\partial P_i/\partial x_j \equiv \partial P_j/\partial x_i$, то интеграл по любому прямоугольнику равен 0*).



$$\int_{\square} = \int_a^b [P_i(x,c) - P_i(x,d)]\,dx + \int_c^d [P_j(b,y) - P_j(a,y)]\,dy =$$
$$= \int_a^b \int_c^d \left[-\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(x,y) + \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(x,y)\right] dx\,dy = 0.$$

6. Основная теорема такова:

<u>Теорема.</u> Если ω - коцикл, то:

1/ интегралы ω по гомотопным путям с фиксированными началом и концом равны;

2/ интегралы ω по петлям, гомотопным в классе петель, равны.

Прежде, чем доказывать её отметим такие

<u>Следствия.</u> 1. Коцикл в односвязной области есть когранична.

2. $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ не односвязна.

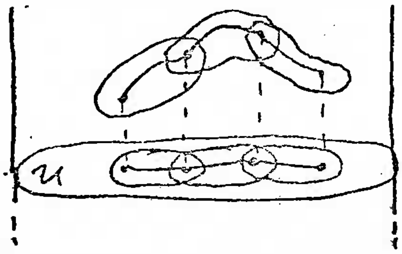
Из этой теоремы выводится также теорема Коши в ТФКП. Надо заметить лишь, что интеграл $\int_\gamma f(z)\,dz$ можно трактовать как интеграл в нашем смысле от формы $f(z)\,dz$, которая, правда, принимает комплексные значения : в точке z имеем линейный функционал из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C}$, который есть /при отождествлении $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ / умножение на $f(z)$. /Вообще можно без всяких изменений рассматривать формы с векторными значениями/. В ТФКП доказывается, что интегралы по прямоугольнику равны 0 /разрезаем на четыре части, потом одну из них снова и т.д./, значит, форма $f(z)\,dz$ - коцикл, и, следовательно, интегралы по гомотопным путям и петлям равны.

7. Доказательство основной теоремы будет использовать теорию накрытий. Итак, пусть ω - форма в $\mathcal{U}$. Введём особую топологию в $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{O}$ - открытое подмножество $\mathcal{U}$, f -

---

*) Все координаты, кроме i-ой и j-ой, фиксированы и в записи не указываются.

функция из $C^1(\mathcal{O})$, $df = \omega$. Графики таких функций f назовём росток. Множество $X \subset \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ объявим слабо открытым, если оно вместе с каждой своей точкой содержит росток, содержащий эту точку. Получится топология. Легко проверить, что это – отделимое топологическое пространство, что всякий росток слабо открыт, что топология, индуцированная на вертикалях $\{u\} \times \mathbb{R}$, дискретна и т.д. Отображение проекции $\mathcal{U} \times \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ является накрытием. А именно, если x – точка $\mathcal{U}$, $\mathcal{O}$ – открытая окрестность x, в которой ω является кограницей, $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ – первообразная ω в $\mathcal{O}$, то прообраз $\mathcal{O}$ распадается в объединение ростков, являющихся графиками $f + C$ при всевозможных C, и на каждом из них проекция является гомеоморфизмом.



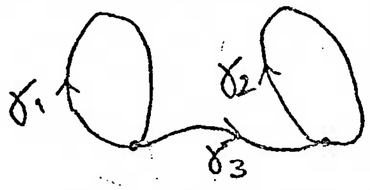
Покажем теперь, как связано это накрытие с интегрированием.

Лемма. Если $\gamma: [a, b] \to \mathcal{U}$ – путь в $\mathcal{U}$, $t \mapsto (\gamma(t), \varphi(t))$ – его поднятие, то

$$\int_\gamma \omega = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Доказательство. Для пути, лежащего целиком в области, где ω – кограница, это очевидно, а любой путь можно разрезать на такие. ∎

Теперь утверждение о равенстве интегралов коцикла по гомотопным с фиксированным началом и концом путям вытекает из теоремы о поднятии гомотопных путей. Для гомотопных петель γ_1 и γ_2 рассуждаем так:



обозначим через γ_3 путь, проходимый началом петли при гомотопии; γ_1 гомотопно $\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}$ с фиксированным началом и концом, а интеграл по $\gamma_3\gamma_2\gamma_3^{-1}$ равен интегралу по γ_2, так как интеграл по γ_3 сокращается. Основная теорема доказана. ∎

8. Упражнения.

1/ Пусть $\mathcal{U}$ – область, ω – дифференциальная форма в $\mathcal{U}$, $F: \mathcal{U} \to \mathcal{U}_1$ – диффеоморфизм. Какую форму ω_1 надо взять в $\mathcal{U}_1$, чтобы интегралы $\int_\gamma \omega$ и $\int_{F \circ \gamma} \omega_1$ были равны для любого пути γ?

2/ Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – область. Через $H(\mathcal{U})$ обозначим фактор-пространство пространства коциклов в $\mathcal{U}$ по пространству кограниц. Найти размерность $H(\mathcal{U})$, если $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus 0$. / $H(\mathcal{U})$ – пространство одномерных когомологий области $\mathcal{U}$ /.

3/ Найти размерность $H(\mathcal{U})$, если $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$

4/. Доказать, что если $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ диффеоморфны, то $H(\mathcal{U}_1)$ и $H(\mathcal{U}_2)$ изоморфны.

5/. Развить теорию дифференциальных форм первой степени на многообразиях. Найти $H(T^1)$, $H(S^2)$, $H(T^2)$ / $T^2 = T^1 \times T^1$ – тор/.

A45

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.

I. Пространства с мерой.
Пусть задано множество X, σ-алгебра подмножеств X /"измеримых" подмножеств/ и мера μ, сопоставляющая каждому измеримому множеству некоторое неотрицательное число, возможно, $+\infty$, удовлетворяющая условиям: а/ $\mu(\varnothing)=0$; б/ $\mu(\sum X_i)=\sum\mu(X_i)$, где $\sum X_i$ – объединение непересекающихся измеримых множеств X_i; если в $\sum\mu(X_i)$ один из членов равен $+\infty$, то и вся сумма равна $+\infty$; в/ любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль. Будем говорить, что в этом случае задано пространство с мерой $\langle X,\mu\rangle$.
Для нас будут важны случаи пространств конечной меры $/\mu(X)$ и, следовательно, меры всех измеримых подмножеств конечны/ и пространств σ-конечной меры / X есть объединение счётного числа множеств конечной меры/. Если $\mu(X)<\infty$, то мера обладает свойством непрерывности: если $X_1\supset X_2\supset\cdots$, $\cap X_i=\varnothing$, то $\mu(X_i)\to 0$.
2. Примеры. $\langle\mathbb{R}^n$, мера Лебега$\rangle$, $\langle\mathbb{R}$, мера Стилтьеса$\rangle$, произведение мер, $\langle N$, $\mu: X\mapsto$ число элементов $X\rangle$. Если Y – измеримое подмножество пространства с мерой, на Y возникает мера (ограничение)
3. Измеримые функции.
Функция $f: X\to\mathbb{R}$ измерима, если прообраз всякого интервала /вариант: открытого множества, замкнутого множества, борелевского множества/ измерим. Если $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрерывна, /или борелевская, т.е. прообраз открытого борелевский/ а $g_1,\cdots g_n$ измеримы, то $x\mapsto f(g_1(x),\cdots g_n(x))$ измерима. Измеримые функции образуют алгебру. Предел поточечно сходящейся последовательности измеримых функций измерим.
4. Интеграл от измеримой функции на пространстве конечной меры.
Пусть X – пространство конечной меры. Функция $f: X\to\mathbb{R}$ простая, если она измерима и принимает конечное число значений, т.е. если существует разбиение X на конечное число непересекающихся измеримых множеств $X_1,\cdots X_n$, на которых f постоянна. Простые функции образуют линейное пространство. Интегралом простой функции f, принимающей значения c_i на множествах X_i, назовем число $\int f=\sum\mu(X_i)\cdot c_i$. Это число не меняется при измельчении разбиения и, следовательно, определено корректно. Интеграл является линейным функционалом на пространстве простых функций. Он является непрерывным в смысле равномерной сходимости: $|\int f|\leq\sup_{x\in X}|f(x)|\cdot\mu(X)$. Простые функции плотны в ограниченных измеримых (всякая ограниченная измеримая функция есть предел равномерно сходящейся последовательности простых функций), поэтому интеграл может быть продолжен на класс ограниченных измеримых функций. Интеграл измеримой ограниченной функции f есть $\lim\int f_n$, где f_n – равномерно сходящаяся к f последовательность простых функций. Это определение корректно в силу написанного неравенства; для простых функций оно совпадает со старым.
5. Свойства интеграла.
I. Интеграл является линейным функционалом на пространстве ограниченных измеримых функций.
2. $\int f\leq\sup_{x\in X}|f(x)|\cdot\mu(X)$. Более того, $|\int f|\leq\int|f|$ /это следует из свойства 3 и неравенства $-|f|\leq f\leq|f|$ /.
3. $f\geqslant 0\Rightarrow\int f\geqslant 0$. /следствие: $f\geqslant g\Rightarrow\int f\geqslant\int g$ /.
4. Пусть X – пространство с мерой, A – измеримое подмножество, f – ограниченная измеримая функция на X. Тогда $\int f\cdot\chi_A=\int_A f|_A$, где $f|_A$ – ограничение f на A, а χ_A – характеристическая функция множества A, равная I на A и 0 вне A.
5. /Теорема Лебега об ограниченной сходимости/. Если f_n – измеримые функции, $|f_n(x)|\leq C$ для всех n и x, f_n поточечно сходятся к функции f /необходимо ограниченной и измеримой/, то $\int f_n\to\int f$.
/Доказательство см. далее./
Тривиальное обобщение на случай пространства бесконечной меры: Будем говорить, что ограниченная измеримая функция имеет носитель конечной меры, если она равна 0 вне некоторого множества конечной меры. Для таких функций интеграл можно корректно определить как интеграл по любому множеству конечной меры, вне которого функция равна нулю.

6. Док-во теоремы Лебега. Можно считать, что $f=0$. Пусть $\varepsilon>0$. Интеграл от функции f_n разбивается на два интеграла: по множеству $A_{n,\varepsilon}$ тех точек, где $|f_n|>\varepsilon$, и по множеству $X\setminus A_{n,\varepsilon}$ тех точек, где $|f_n|\le\varepsilon$. Первый из них не превосходит $C\cdot\mu(A_{n,\varepsilon})$, а второй — $\varepsilon\cdot\mu(X)$. Осталось доказать, что при любом фиксированном ε последовательность $n\mapsto\mu(A_{n,\varepsilon})$ стремится к 0. Это следует из того, что последовательность множеств $B_{n,\varepsilon}=A_{n,\varepsilon}\cup A_{n+1,\varepsilon}\cup\ldots$ — убывающая последовательность с пустым пересечением.

7. Критерий Лебега интегрируемости по Риману.

Назовем ограниченную функцию f на отрезке $[a,b]$ интегрируемой по Риману, если $\forall\varepsilon>0$ существуют такие непрерывные функции f_m и f_M, что $f_m\le f\le f_M$ и $\int_{[a,b]}(f_M-f_m)\le\varepsilon$.

Теорема. Ограниченная функция интегрируема по Риману тттк множество ее точек разрыва имеет меру 0. В этом случае она интегрируема и по Лебегу /и интегралы совпадают/.

Доказательство.

С каждой ограниченной функцией f свяжем функции $f_*(x)=\sup\{g(x)\mid g$ — непрерывная на $[a,b]$ функция, всюду $\le f\}$ и $f^*(x)=\inf\{g(x)\mid g$ — непр. на $[a,b]$ функция, всюду $\ge f\}$. Очевидно, что $f_*(x)\le f(x)\le f^*(x)$. Пространство $C[a,b]$ сепарабельно, поэтому при вычислении $\sup$ в определении f_* можно ограничиться счётным множеством функций g_i, и, следовательно, f_* есть поточечный предел возрастающей последовательности непрерывных функций $g_1, \max(g_1,g_2), \ldots$ Поэтому f_* измерима и $\int f_*=\sup\{\int g\mid g\in C[a,b], g\le f\}$. Аналогичное соотношение верно и для f^*. Отсюда следует, что f инт. по Риману тттк $\int f_*=\int f^*$, т.е. $\int f^*-f_*=0$. Интеграл неотр. функции равен 0 тттк она равна 0 почти всюду /множество точек, в которых она $\ge\varepsilon$ имеет меру 0 при любом $\varepsilon>0$/. Поэтому f интегрируема по Риману тттк $f_*=f^*$ почти всюду. Остаётся заметить, что $f_*(x)=f^*(x)\Leftrightarrow f$ непрерывна в x, т.к. $f_*(x)=\varliminf_{y\to x}f(y)$, $f^*(x)=\varlimsup_{y\to x}f(y)$. Измеримость интегрируемой по Риману функции вытекает из того, что она совпадает почти всюду с измеримой функцией f_*.

8. Интеграл неотрицательных функций.

Мы отказываемся от предположения конечности меры пространства X и ограниченности измеримой функции f, зато предполагаем её неотрицательность.

Пусть f — неотрицательная измеримая функция на пространстве с мерой X, возможно, принимающей бесконечные значения. Определим интеграл функции f как точную верхнюю грань интегралов функций с носителями конечной меры, не превосходящих f, или, другими словами, точную верхнюю грань чисел $\int_A g$, где $A\subset X$, $\mu(A)<\infty$, g ограничена на A и $g\le f$. Этот интеграл, обозначаемый $\int^* f$, может быть равен $+\infty$. Очевидно, что если $f_1\le f_2$, то $\int^* f_1\le\int^* f_2$ и что интегралы совпадающих почти всюду функций равны. Для неотрицательных ограниченных измеримых функций с носителем конечной меры этот интеграл совпадает со старым (п.5). Имеют место свойства:

(а) $\int^*(f_1+f_2)=\int^* f_1+\int^* f_2$

(б) $\int^*\sum f_i=\sum\int^* f_i$ $\quad (f_i\ge 0)$

(при определении суммы мы считаем, что $x+(+\infty)=(+\infty)$).

9. Доказательства.

/а/ если $g_1\le f_1$, $g_2\le f_2$ и имеют носитель конечной меры, то $g_1+g_2\le f_1+f_2$ и имеет носитель конечной меры, поэтому $\int g_1+\int g_2\le\int f_1+f_2$. Наоборот, если g — ограниченная числом N функция с конечным носителем A, g меньше f_1+f_2, то $g\le f_1^N|_A+f_2^N|_A$ / $f_i^N|_A$ — функция f_i, ограниченная на A и „срезанная" числом N, т.е. равная N там, где $f_i\ge N$ /, поэтому $\int g\le\int_A f_1^N+\int_A f_2^N\le\int f_1+\int f_2$.

/б/ Из /а/ следует, что $\sum_{i=1}\int f_i\le\int(\sum_{i=1}^{\infty}f_i)$; пусть теперь ограниченная числом N функция g с конечным носителем A не превосходит $\sum_{i=1}^{\infty}f_i$; рассмотрим возрастающую последовательность функций $h_k=(\sum_{i=1}^{k}f_i)^N|_A$; для неё $g\le\lim h_k$, поэтому в силу теоремы Лебега $\int g\le\lim\int h_k\le\sum\int f_i$.

10. Лемма. Если неотрицательная измеримая функция f почти всюду

конечна, то $\int^* f = \sup\{\int_A f \mid A$ - измеримое множество, на котором f ограничена$\}$. Неравенство $\geq$ очевидно. Пусть теперь g - ограниченная функция с носителем B конечной меры, меньшая f. Рассмотрим множества $B_n = \{x \in B \mid n \leq f(x) < n+1\}$ и функции $f_n = / f$ на B_n и 0 вне B_n /. Тогда $f = \sum f_n$ почти всюду /т.к. f почти всюду конечна/ и поэтому $\int g \leq \int^* \sum f_n \leq \sum \int f_n = \sup \int \sum_{i=1}^{n} f_i = \sup_n \int_{B_0 \cup \dots \cup B_n} f$.

II. Общее определение интеграла.

Пусть X - пространство с мерой /не обязательно конечной/, f - измеримая функция на X /не обязательно неотрицательная/. Функция f называется интегрируемой, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует ограниченная измеримая функция g с носителем конечной меры /равна 0 вне множества конечной меры/, для которой $\int^* |f-g| \leq \varepsilon$. Если $\varepsilon_n \to 0$, g_n - последовательность приближающая f функций, то последовательность $\int g_n$ фундаментальна $/ |\int g_n - \int g_m| \leq \int |g_n - g_m| \leq \int^* |g_n - f| + |g_m - f| \leq \varepsilon_n + \varepsilon_m$ /; её предел и называется интегралом функции f. /Это определение корректно/.

I2. Свойства интеграла.

Имеют место следующие простые свойства:

I/Интегрируемые функции образуют линейное пространство.

2/На этом пространстве интеграл является линейным функционалом.

3/Интеграл неотрицательной функции неотрицателен /монотонность/.

4/Интеграл ограниченной/измеримой/функции с носителем конечной меры совпадает с ранее определённым.

Менее очевидно следующее свойство 5/:

5/Измеримая функция f интегрируема тттк $\int^* |f|$ конечен.

Отсюда, очевидно, следует, что верны следующие свойства:

6/Функция f интегрируема тттк интегрируема функция $|f|$.

7/Если f измерима, g интегрируема и $|f| \leq g$, то f интегрируема. Неотрицательная ф-ия f интегрируема тттк $\int^* f < +\infty$.

8/Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $f^+ = \max(f, 0)$ и $f^- = \max(-f, 0)$, при этом $\int f = \int f^+ - \int f^-$.

Докажем свойство 5/. Если f интегрируема, g - приближающая её ограниченная функция с носителем конечной меры, то $\int^* |f| \leq \int^* |g| + \int^* |f-g| < \infty$. Наоборот, пусть $\int^* |f| < \infty$ и A - множество конечной меры, на котором $|f|$ ограничена и для которого $\int_X^* |f| \setminus \int_A |f| < \varepsilon$. Тогда сужение f на A и будет искомым приближением для f.

I3. Теоремы о предельном переходе.

Теорема Лебега /о мажорируемой сходимости/. Пусть f_n - последовательность измеримых функций, поточечно сходящихся к функции f /которая поэтому измерима/, φ - интегрируемая функция, $|f_n| \leq \varphi$ /следовательно, $|f| \leq \varphi$ и все функции f_n и f интегрируемы/. Тогда $\int f_n \to \int f$.

Доказательство. Переходя к $f_n - f$, считаем $f = 0$. Выбрав $\varepsilon > 0$, найдем множество A конечной меры, на котором φ ограничена и такое, что $\int_{X \setminus A} \varphi \leq \varepsilon$. Осталось заметить, что $|\int f_n| \leq |\int_A f_n| + |\int_{X \setminus A} \varphi| \leq |\int_A f_n| + \varepsilon$, а $\int_A f_n \to 0$ в силу теоремы Лебега для ограниченных функций на множестве конечной меры.

Теорема Беппо Леви /о монотонной сходимости/. Пусть $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ - последовательность измеримых функций, интегралы которых ограничены сверху: $\int f_i \leq C$ для всех i. Тогда последовательность $f_i(x)$ сходится для почти всех x, предельная функция $f(x)$ интегрируема и $\int f_i \to \int f$.

Доказательство. Вычитая f_1 можно считать, что $f_1 = 0$, f_i неотрицательны. Переходя к $\varphi_i = f_{i+1} - f_i$, сводим дело к счётной аддитивности $\int^*$.

Теорема Фату. Пусть f_i - неотрицательные интегрируемые функции, $\forall x$ $f_i(x) \to f(x)$, интегралы их ограничены: $\int f_i \leq C$. Тогда f интегрируема и $\int f \leq C$. /сходимость $\int f_i$ к $\int f$ не утверждается/.

Доказывается путём перехода к монотонной последовательности $g_i = \min(f_j \mid j \geq i)$ и применения теоремы Б.Леви. Подробнее см.у Кириллова и Гвишиани, стр. 45,46.

Замечание. Так как интеграл не изменяется при замене функции на равную ей почти всюду, то в формулировках теорем можно заменить сходимость и ограниченность на сходимость и ограниченность почти всюду.

14. Пространство L_1.

Определим на интегрируемых функциях норму по формуле $\|f\| = {}_X\!\int |f|$. Точнее, её нужно определять на классах функций с точностью до равенства почти всюду, ибо $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ почти всюду. Выполнение свойств нормы очевидно. Докажем, что получающееся пространство /оно обозначается $L_1(X, \mu)$ / полно. Для этого достаточно проверить сходимость последовательности f_i, для которых $\|f_{i+1} - f_i\| \leq 2^{-i}$ Пусть f_i такова.

Лемма. При почти всех x существует $\lim_{i\to\infty} f_i(x)$.

Доказательство. Нужно доказать, что ряд $\sum (f_{i+1}(x) - f_i(x))$ сходится; в силу теоремы Б.Леви и неравенства $\|f_{i+1} - f_i\| \leq 2^{-i}$ он абсолютно сходится при почти всех X, т.к. последовательность $\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|$ возрастает и имеет ограниченные интегралы.

Из доказательства видно, что все f_i ограничены интегрируемой функцией $\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(x)$ и поэтому $|f_i - f|$ поточечно сходится к 0 и ограничено 2φ, поэтому $f_i \to f$ в L_1.

15. Пространство L_2.

Рассмотрим измеримые функции с интегрируемым квадратом /т.е. такие, что $\int |f|^2 < \infty$ /. Эти функции образуют линейное пространство, т.к. $|f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$. На нём определено скалярное произведение: $\langle f, g \rangle = \int fg$ /в комплексном случае $\int fg$ заменяется на $\int f\bar{g}$ /. Интеграл в правой части существует, т.к. fg – измеримая функция и $|fg| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$. Все свойства скалярного произведения выполнены, кроме того, что $(f, f) > 0$ при $f \neq 0$; последнее станет верным, если перейти /как и в случае L_1 / к классам эквивалентности. После этого мы получаем евклидово пространство $L_2(X, \mu)$; в нём определена норма $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, удовлетворяющая неравенству треугольника. Заметим, что, вообще говоря, $L_2 \not\subset L_1$ и $L_1 \not\subset L_2$ /примеры: $1/(1+|x|)$ на $\mathbb{R}$ и $1/\sqrt{x}$ на $[0,1]$/; если мера пространства X конечна, то $L_2 \subset L_1$ и $\|f\|_{L_1} \leq \sqrt{\mu(X)}\, \|f\|_{L_2}$; это вытекает из соотношения $\langle f, 1 \rangle \leq \sqrt{\int |f|^2} \cdot \sqrt{\int 1^2}$.

Теорема. Если мера σ-конечна /т.е. X есть объединение счётного числа множеств $X_1, \dots X_n, \dots$ конечной меры/, то пр-во $L_2(X, \mu)$ полно.

Доказательство. Пусть, как и раньше, f_i – последовательность функций и $\|f_{i+1} - f_i\| \leq 2^{-i}$.

Лемма. При почти всех x существует $\lim_{i\to\infty} f_i(x)$.

Док-во леммы. Достаточно доказать, что для любого N множество тех $x \in X_N$, для которых предел не существует, имеет меру 0. Это следует из леммы предыдущего пункта и неравенства $\|f_{i+1} - f_i\|_{L_1(X_N, \mu)} \leq \sqrt{\mu(X_N)} \cdot \|f_{i+1} - f_i\|_{L_2(X_N, \mu)} \leq \sqrt{\mu(X_N)}\, \|f_{i+1} - f_i\|_{L_2(X, \mu)}$. Лемма доказана.

Обозначим предел через f. Докажем, что $f \in L_2$. В силу фундаментальности нормы всех f_i ограничены: $\int f_i^2(x)\,dx \leq C$. Переходя к пределу при $i \to \infty$ по лемме Фату, получаем, что $\int f^2(x)\,dx \leq C$, т.е. $f \in L_2$. Докажем, что $f_i \to f$ в L_2, т.е. что $\int |f(x) - f_i(x)|^2 dx$ мало. В силу предположения при $p \geq 0$ выполнено $\|f_{i+p} - f_i\| \leq 2 \cdot 2^{-i}$, т.е. $\int (f_{i+p}(x) - f_i(x))^2 dx \leq (2 \cdot 2^{-i})^2$. Переходя к пределу при $p \to \infty$ по теореме Фату, имеем, что $\|f - f_i\| \leq 2 \cdot 2^{-i}$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $X = \mathbb{N}$, $\mu(A)$ = число элементов в A. Получающиеся пространства $L_1(X, \mu)$ и $L_2(X, \mu)$ состоят из последовательностей a_i, для которых $\sum |a_i|$ /$\sum |a_i|^2$ соответственно/ конечны; нормы имеют вид $\sum |a_i|$ и $\sqrt{\sum |a_i|^2}$. Эти/полные/пространства обозначаются l_1 и l_2.

I. Произведение мер.

Пусть (E,μ), (F,ν) – пространства с мерой /счётно-аддитивной, возможно, с бесконечными значениями/. Мы хотим определить меру $\mu\times\nu$ на $E\times F$. Для этого рассмотрим полукольцо множеств вида $A\times B$, где $A\subset E$, $B\subset F$, $\mu(A)$ и $\nu(B)$ конечны. Мерой такого множества объявим произведение $\mu(A)\cdot\nu(B)$. Чтобы продолжить эту меру на σ-алгебру, надо установить её счётную аддитивность. Её гарантирует следующая

Лемма. Если $A\times B=\bigcup A_i\times B_i$, $A_i\times B_i$ попарно не пересекаются, меры A_i, B_i, A и B конечны, то $\mu(A)\cdot\nu(B)=\sum\mu(A_i)\cdot\nu(B_i)$

Д-во. Каждому подмножеству S вида $X\times Y$ в множестве $E\times F$ сопоставим функцию на E, определённую так: $f_S(x)=\begin{cases}0, \text{если } x\notin X\\ \nu(Y), \text{если } x\in X\end{cases}$

/ $f_S(x)$ – "мера x-ого сечения множества S "/. Это, очевидно, интегрируемая функция, и её интеграл равен мере множества A, т.е. $\mu(X)\cdot\nu(Y)$. Лемма утверждает, что $\int f_{A\times B}=\sum\int f_{A_i\times B_i}$. Это вытекает (согласно теореме Беппо Леви о монотонной сходимости) из того, что для каждого x значение $f_{A\times B}(x)$ равно $\sum f_{A_i\times B_i}(x)$. А это верно потому, что из равенства $A\times B=\bigsqcup A_i\times B_i$ вытекает аналогичное равенство для x-ых сечений этих множеств.

Теперь продолжаем меру с полукольца на σ-алгебру и получаем пространство с мерой $\langle E\times F, \mu\times\nu\rangle$. Эта мера, возможно, принимает бесконечные значения.

Замечание I. Доказательство леммы наводит на мысль определить меру в $E\times F$ по формуле $\mu(A)=\int_E \nu(\{y \mid \langle x,y\rangle\in A\})\,d\mu$. Хотя это равенство и справедливо /об этом см. дальше/, но определением оно служить не может, т.к. измеримость сечений и интегрируемость полученной функции ниоткуда не следуют.

Замечание 2. Равенство $\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\times\nu(B)$ верно и для множеств A и B бесконечной меры, при этом $0\times\infty$ можно считать равным 0, если мера в пространствах E и F является σ-конечной /проверьте!/.

Замечание 3. Если в E и F меры μ и ν получены путём лебеговского продолжения с некоторых полуколец $\mathcal{R}_E$ и $\mathcal{R}_F$, то при определении меры в $E\times F$ можно рассматривать полукольцо множеств вида $A\times B$, $A\in\mathcal{R}_E$, $B\in\mathcal{R}_F$, и получится то же самое.

Замечание 4. Операция произведения нескольких пространств с мерой ассоциативна /проверьте!/, поэтому можно говорить о произведении любого конечного числа пр-в.

Замечание 5. Легко видеть, что произведение σ-конечных мер является σ-конечным.

2. <u>Теорема Фубини.</u> Начнём с формулировок.

Пусть заданы пространства с мерой (E,μ) и (F,ν) ; меры предполагаются σ-конечными и полными/любое подмножество множества меры 0 измеримо/

<u>Теорема Фубини для множеств.</u>

Пусть $A \subset E\times F$ - измеримое /по мере $\mu\times\nu$ / множество. Тогда для почти всех /по мере μ / элементов $x\in E$ множество $A_x=\{y \mid \langle x,y\rangle\in A\}$ измеримо, неотрицательная функция $x\mapsto \nu(A_x)$ измерима и $\mu(A)=\int^*\nu(A_x)\,d\mu(x)$.

<u>Теорема Фубини для функций.</u>

Пусть $f: E\times F\to\mathbb{R}$ - измеримая /по мере $\mu\times\nu$ / функция. Тогда

I/ для почти всех /по мере μ / элементов $x\in E$ функция $f_x: y\mapsto f(x,y)$ измерима;

2/ если f интегрируема по мере $\mu\times\nu$, то при почти всех x функция f_x интегрируема по мере ν , /определённая почти всюду/ функция $x\mapsto \int_F f_x$ интегрируема по мере μ и $\int_E(\int_F f_x\,d\nu)\,d\mu = \int_{E\times F} f$.

3/ если f неотрицательна /не обязательно конечна/, то /определённая почти всюду/ функция $x\mapsto \int^* f_x$ измерима и

$$\int^*_E\Big(\int^*_F f_x\,d\nu\Big)d\mu=\int^*_{E\times F} f.$$

Прежде чем доказывать эти теоремы, сделаем разные замечания.

I. Сечение измеримого множества может быть неизмеримым; любое множество на прямой $x=0$, лежащей в плоскости, измеримо. Поэтому оговорка "почти все" существенна.

Отметим, кстати, что сечение борелевского множества в произведении топологических пространств является борелевским, т.к. семейство борелевских множеств, все сечения которых борелевские, образует σ-алгебру, содержащую открытые множества.

2. Теорема Фубини для множеств вытекает из теоремы для функций /можно применить к характеристическим функциям утверждение /3//.

3. Утверждение /I/ теоремы для функций вытекает из теоремы для множеств: для каждого $r\in\mathbb{Q}$ выберем множество $A_r\subset E$ тех $x\in E$, для которых x-ое сечение множества $\{\langle x,y\rangle \mid f(x,y)<r\}$ измеримо; тогда для $x\in\bigcap\{A_r \mid r\in\mathbb{Q}\}$ функция f_x будет измеримой.

4. Из теоремы для множеств вытекает, что если $f: X\to\mathbb{R}$ - измеримая неотрицательная функция, то мера её подграфика $\{\langle x,y\rangle \mid 0\le y\le f(x)\}$ в пространства $X\times\mathbb{R}$ равна её интегралу $\int^* f$. Требуется проверить лишь измеримость подграфика. Если f принимает счётное число значений $\{x_i\}$, то подграфик является счётным объединением множеств $f^{-1}(\{x_i\})\times[0,x_i]$. Для произвольной f рассмотрим сходящуюся к ней монотонно убывающую последовательность функций f_i со счётным числом значений ; подграфики f_i измери-

мы и в пересечении дают подграфик f.

5. Предыдущее замечание позволяет вывести пункт /3/для функций из теоремы для множеств. В самом деле, пусть $f: E\times F\to\mathbb{R}$ измерима и неотрицательна. Её подграфик Π – измеримое подмножество $E\times F\times\mathbb{R}$; применяя теорему для множеств /и ассоциативность произведения мер/, мы видим, что мера подграфика /равная $\int^* f$ / равна $\int_E^*$(мера x-ого сечения $\Pi)d\mu$. А x-ое сечение Π есть подграфик функции $f_x: y\mapsto f(x,y)$, поэтому подынтегральное выражение почти всюду существует и равно $\int_F^* f(x,y)\,d\nu(y)$.

6. Представляя произвольную интегрируемую на $E\times F$ функцию в виде разности двух неотрицательных функций с конечными интегралами, мы легко выводим утверждение /2/ теоремы для функций из утверждения /3/. /Один из шагов этого рассуждения: если f неотрицательна и интеграл f конечен, то $\int^*(\int^* f(x,y)d\nu(y))d\mu(x)<\infty$ и, следовательно, $\int_F^* f(x,y)\,d\nu(y)$ конечен почти всюду./

Итак, осталось доказать теорему для множеств. Назовём измеримое множество $A\subset E\times F$ хорошим, если для него выполнены утверждения теоремы, то есть:

I/ при почти всех x сечение A_x измеримо;

2/ /определённая почти всюду/ функция $x\mapsto\nu(A_x)$ измерима;

3/ $\int^*\nu(A_x)\,d\mu(x)=\mu\times\nu(A)$

Нам надо доказать, что все измеримые множества хорошие.

А. Всякое множество вида $X\times Y$, где $X\subset E$, $Y\subset F$ – множества конечной меры, хорошее. /Очевидно/.

Б. Объединение конечного числа непересекающихся хороших множеств – хорошее. Если $A\subset B$, A, B – хорошие, мера B конечна, то $B\setminus A$ хорошее /очевидно/.

В. Если $X_1\subset X_2\subset\ldots$ – возрастающая последовательность хороших множеств, то $\bigcup X_i$ – хорошее. /Следует из теоремы о монотонной сходимости/.

Г. Если $X_1\supset X_2\supset\ldots$ – убывающая последовательность хороших множеств и мера X_1 конечна, то $\bigcap X_i$ – хорошее. /Переходя к дополнению до X_1, применяем Б и В/.

Д. Назовём Σ-множествами счётные объединения множеств вида $X\times Y$. Конечные пересечения и счётные объединения Σ-множеств являются Σ-множествами /в силу равенства $(\bigcup A_i)\cap(\bigcup B_j)=\bigcup_{i,j}(A_i\cap B_j)$/. Из А и В следует, что все Σ-множества хорошие.

Е. Назовём $\Pi\Sigma$-множествами счётные пересечения Σ-множеств, одно из которых имеет конечную меру. Вспоминая, что конечное пересечение Σ-множеств является Σ-множеством, видим, что всякое $\Pi\Sigma$-множество есть пересечение убывающей последовательности Σ-множеств, одно из которых имеет конечную меру, и, следовательно, всякое $\Pi\Sigma$-

множество хорошее.
Ж. Всякое подмножество B хорошего множества A меры 0 хорошее. /В самом деле, почти все сечения A имеют меру 0 и, следовательно, почти все сечения B измеримы и имеют меру 0. Здесь мы пользуемся полнотой меры в F !/.
З. Всякое множество меры 0 хорошее. /Пусть мера A равна 0. Существуют Σ-множества сколь угодно малой меры, содержащие A, их пересечение является $\Pi\Sigma$-множеством меры 0, содержащим A. Остаётся применить Е и Ж/.
И. Всякое множество A конечной меры хорошее. /В самом деле, существуют Σ-множества, содержащие A, мера которых сколь угодно мало превосходит меру A, их пересечение есть объединение A и некоторого множества меры 0. Остаётся применить Б и З/.
К. Всякое измеримое множество хорошее. /В самом деле, в силу σ-конечности меры в $E\times F$ всякое измеримое множество является объединением возрастающей последовательности измеримых множеств конечной меры. Остаётся применить В/.

Теорема Фубини доказана. Сделаем ещё несколько замечаний.
/I/. На одной из олимпиад предлагалась такая задача: назовём прямоугольник <u>полуцелым</u>, если одна из его сторон целая. Доказать, что если прямоугольник можно разрезать на несколько полуцелых /с параллельными сторонами/, то он сам полуцелый.

Решение. Назовем функцию $f(x,y)$ регулярной, если она представима в виде произведения $f(x,y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$, где φ и ψ - функции с нулевым интегралом по любому отрезку длиной I. Назовём прямоугольник /со сторонами, параллельными осям координат/ регулярным, если интеграл по нему от любой регулярной функции равен 0. Очевидно, что: I/ прямоугольник является регулярным тогда и только тогда, когда он является полуцелым /теорема Фубини/, 2/ если прямоугольник разрезан на регулярные, то он сам регулярен.
/2/ Применяя теорему Фубини к непрерывным функциям на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, мы получаем, в частности, что $\int_a^b(\int_c^d f(x,y)\,dy)\,dx = \int_c^d(\int_a^b f(x,y)\,dx)\,dy$. Эти интегралы можно понимать и в смысле Римана, так как интегрируются непрерывные функции /это следует из равномерной непрерывности f /. Это равенство можно доказать и иначе: оно очевидно для функций вида $\varphi(x)\cdot\psi(y)$ и их сумм, а такие суммы плотны /по теореме Стоуна-Вейерштрасса/ в $C([a,b]\times[c,d])$.

3. Объём в $\mathbb{R}^n$.

Определим параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, натянутый на вектора $x_1,\dots,x_n$ как множество $\{\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n \mid 0\le\lambda_1,\dots,\lambda_n\le 1\}$ или, иными словами, как образ куба $0\le\lambda_1,\dots,\lambda_n\le 1$ при линейном отображении, переводящем i-ый вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^n$ в x_i.

Теорема I. Для любых векторов $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^n$ следующие величины совпадают:

I/ мера параллелепипеда, натянутого на $x_1,\dots,x_n$;

2/ $|\omega(x_1,\dots,x_n)|$, где ω – антисимметрическая полилинейная форма на $\mathbb{R}^n$, равная I на стандартном базисе $e_1,\dots,e_n$ /напомним, что такая функция единственна, см. "Определители"/;

3/ модуль определителя линейного оператора, переводящего $e_1,\dots,e_n$ в $x_1,\dots,x_n$;

4/ квадратный корень из определителя матрицы Грама

$$\begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \dots & (x_n,x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1,x_n) & \dots & (x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

Эта теорема состоит из двух частей: равенство величин 2-4 относится целиком к линейной алгебре, и о нём позже; равенство /I/=/3/ очевидно витекает из следующей основной теоремы о мере в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Если μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – линейный оператор, $E\subset\mathbb{R}^n$ – измеримое множество, то $A(E)$ измеримо, $\mu(A(E))=\mu(E)\cdot|\det A|$ /При этом полагаем $\infty\cdot 0=0$ /.

Первое доказательство теоремы 2.

Докажем теорему при дополнительном предположении: A обратим, E – борелевское. В этом случае $A(E)=(A^{-1})^{-1}(E)$ также борелевское и вопрос о его измеримости не встаёт. Если теорема верна для операторов A и B, то она верна и для их композиции. Она верна для диагональных операторов: в самом деле, оператор с матрицей $\begin{vmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{vmatrix}$ осуществляет изоморфизм между полукольцом параллелепипедов с обычной мерой и тем же полукольцом с уменьшенной в $|\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n|$ раз мерой, поэтому и между их лебеговскими продолжениями. Она верна и для операторов вида $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ \cdot\lambda & & 1\end{pmatrix}$ / λ в i -ом столбце и j -ой строке, $i\neq j$ /, так как при применении этого оператора к любому множеству A сечения его прямыми, параллельными x_j , сдвигаются вдоль этих прямых; осталось сослаться на теорему Фубини. Но любая обратимая матрица представляется в виде произведения диагональных /достаточно одной/ и матриц указанного вида /умножение справа и слева на них приводит к вычитанию из одной строки /или столбца/ другой строки /другого столбца/ с коэффициентом, а такими преобразованиями лбая матрица приводится к диагональному виду/. Рассмотрим теперь случай измеримого, но не борелевского E и обратимого A . Если $\mu(E)=0$, то E содержится в борелевском множестве нулевой меры, откуда всё следует; любой измеримое E конечной меры можно, добавив множество меры 0, сделать борелевским; множество бесконечной меры содержит множества сколь угодно большой конечной меры, и их образы также имеют сколь угодно большую меру. Если же A необратим, то $A(E)$ содержится в некоторой гиперплоскости, которая, как легко убедиться, имеет меру 0. Теорема 2 доказана.

Второе доказательство теоремы 2 предварим следующей важной леммой:

Лемма. Всякая инвариантная относительно сдвигов борелевская мера ν в $\mathbb{R}^n$ /т.е. мера, определённая на σ-алгебре борелевских подмножеств в $\mathbb{R}^n$ /, конечная на ограниченных множествах, пропорциональна стандартной лебеговской мере μ.

Док-во. Рассмотрим случай $n=1$. В $\mathbb{R}^2$ введём меру $\mu\times\nu$. Операторы вида $\begin{pmatrix}1&0\\ \lambda&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&\lambda\\ 0&1\end{pmatrix}$ сохраняют меру борелевских множеств /это следует из теоремы Фубини: сечения сдвигаются/, поэтому таковы и их произведения, в частности, таков оператор

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

/это разложение легко получить, приводя его к диагональному виду преобразованием строк и столбцов/. Этот оператор сохраняет меру множеств $X\times Y$ где X, Y – борелевские подмножества $\mathbb{R}$; т.к. он переводит $X\times Y$ в $Y\times(-X)$, $\mu(X)\cdot\nu(Y)=\mu(Y)\cdot\nu(-X)$. Выбирая в качестве X ограниченное борелевское множество, лебеговская мера которого не равна 0, мы видим, что $\nu(Y)=\frac{\nu(-X)}{\mu(X)}\cdot\mu(Y)$ что и требовалось. Лемма доказана.

Если $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – обратимый линейный оператор, то формула $\nu_A(X)=\mu(AX)$, где μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, задаёт борелевскую меру, инвариантнтную относительно сдвигов; по лемме $\nu_A=C_A\cdot\mu$, где C_A – некоторая константа. Отображение $A\longmapsto C_A$ является гомоморфизмом группы $GL(n,\mathbb{R})$ обратимых операторов в мультипликативную группу $\mathbb{R}^+$ вещественных чисел. Нам надо доказать, что он совпадает с модулем определителя. Это следует из того, что: /I/ он совпадает с ним на диагональных,

/2/ он совпадает с ним на ортогональных /т.е. $C_A=1$ для ортогонального A /

/3/ всякий оператор представляется в виде произведения диагонального и ортогональных.

Утверждение /I/ уже обсуждалось. Утверждение /2/ следует из того, что шар при ортогональном преобразовании переходит в себя. Утверждение /3/ вытекает из того, что всякий оператор есть произведение положительного P и ортогонального A; приводя P к диагональному виду, мы представляем его в виде произведения диагонального и двух /взаимно обратных/ ортогональных операторов.

Второе доказательство теоремы 2 окончено.

Осталось доказать алгебраическую часть теоремы I. Выражения /2/ и /3/ из этой теоремы, очевидно, совпадают /см. "Определители"/. Докажем, что они равны /4/. Для этого рассмотрим функцию

$$f(x_1 \dots x_n) = \det \begin{vmatrix} (x_1, y_1) & \dots & (x_n, y_1) \\ (x_1, y_n) & \dots & (x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

При каждых $x_1 \dots x_n$ она является антисимметричной функцией от $y_1 \dots y_n$, поэтому $f(x_1 \dots x_n) = c(x_1 \dots x_n)\, \omega(y_1 \dots y_n)$ где ω – антисимметричная форма от $y_1 \dots y_n$, равная I на $e_1 \dots e_n$ Функция c также полилинейна и антисимметрична, поэтому $c(x_1 \dots x_n) = c_0 \cdot \omega(x_1 \dots x_n)$ и, таким образом, $f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = c \cdot \omega(x_1 \dots x_n) \cdot \omega(y_1 \dots y_n)$. Тем самым определитель матрицы Грама пропорционален $\omega^2(x_1 \dots x_n)$. Коэффициент пропорциональности равен I (подставим $e_1 \dots e_n$). Требуемое равенство доказано. Другое доказательство того же может быть получено на основе следующего замечания: определитель матрицы Грама не изменится, если к x_n прибавить некоторую линейную комбинацию $x_1 \dots x_{n-1}$ (для двух векторов:

$$\det \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y)+\lambda(x,x) \\ (x,y)+\lambda(x,x) & (y,y)+2\lambda(x,y)+\lambda^2(x,x) \end{vmatrix} = \text{(вычитаем из 2-ой строки первую} \times \lambda)$$

$$= \det \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y)+\lambda(x,x) \\ (x,y) & (y,y)+\lambda(x,y) \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} (x,x), & (x,y) \\ (x,y), & (y,y) \end{vmatrix} \;)$$

Не меняется при этом и объём, т.к. "высота" и "основание" (натянутое на $x_1 \dots x_{n-1}$) остались прежними. Поэтому можно считать x_n ортогональным $x_1 \dots x_{n-1}$; при этом определитель окажется равным произведению квадрата объёма основания (рассуждаем по индукции) и квадрата высоты. Теорема I доказана.

Согласно теореме I, в любом евклидовом пространстве возникает мера; значение этой меры на любом параллелепипеде равно квадратному корню из определителя матрицы Грама его рёбер.

4. Замена переменной

Теорема о замене переменной. Пусть U, V – два открытых множества в $\mathbb{R}^n$, $F: U \to V$ – –диффеоморфизм (это означает, что F – взаимно-однозначное и F и F^{-1} непрерывно дифференцируемы). Тогда:

I) $A \subset U$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримо $F(A)$;

2) для измеримых A верно равенство $\mu(F(A)) = \int_A^* |\det F'(x)|\, d\mu(x)$

3) если $f: V \to \mathbb{R}$ – измеримая неотрицательная функция, то функция $x \mapsto f(F(x)) \cdot |\det F'(x)|$ измерима и

$$\int_V^* f = \int_U f(F(x))\, |\det F'(x)|\, d\mu(x)$$

4) если $f: V \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция, то функция $x \mapsto f(F(x)) \cdot \det |F'(x)|$ интегрируема и $\int_V f = \int_U f(F(x)) \cdot |\det F'(x)|\, d\mu(x)$

Формулировка этой теоремы важнее её доказательства. Приведем пример её применения: вычисление интеграла в полярных координатах. Пусть $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, $V = \mathbb{R}^2 - [0, +\infty[$

$F: (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Имеем: $\int_V f =$

$= \int_V e^{-r^2} \det \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$ /теорема Фубини/ $= 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr =$ $= \pi \int_0^\infty e^{-r^2} d(r^2) = \pi$. С другой стороны $\int_V f = \int_{\mathbb{R}^2} f = (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx)^2$, откуда $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем некоторые замечания.

1. Пункт 4/ следует из пункта 3/ /интегрируемая функция есть разность двух неотрицательных измеримых с конечными интегралами/.

2. Пункты 1/ и 2/ следуют из 3/ : если в качестве f взять характеристическую функцию множества $F(A)$, то видно, что из измеримости $F(A)$ следует измеримость A и равенство п. 2/, чтобы вывести измеримость $F(A)$ из измеримости A, то же рассуждение следует применить к F^{-1}.

3. Мы начнём доказательство теоремы со следующей леммы:

Лемма 1. Если $A \subset V$ измеримо, то $F(A)$ измеримо и

$$\mu(F(A)) \le \int_A |\det F'(x)|\,d\mu(x).$$

Затем из этого выведем такое утверждение:

Лемма 2. Если f - неотрицательная измеримая функция на V, то функция $x \mapsto f(F(x))\cdot|\det F'(x)|$ измерима и

$$\int_V^* f \le \int_U^* f(F(x))\cdot|\det F'(x)|\,d\mu(x).$$

4. Из леммы 2 легко следует пункт 3/ теоремы: применяя лемму 2 к F^{-1}, легко получаем обратное неравенство. Итак, надо доказать лемму 2.

5. Будем выводить лемму 2 из леммы 1. Прообразы любого множества при f и $f\circ F$ связаны отображением F, поэтому из леммы 1 и измеримости функции f следует измеримость функции $f\circ F$. Умножив её на непрерывную функцию $x \mapsto |\det F'(x)|$, мы не теряем измеримости. Остаётся доказать неравенство. Если $F \in C^2$ /дважды непрерывно дифференцируема/, это легко. Рассмотрим отображение $F_1 : U\times\mathbb{R} \to V\times\mathbb{R}$, определённое так: $F_1(x,t) = \langle F(x), |\det F'(x)|^{-1}\cdot t\rangle$. Если $F\in C^2$, то $F_1 \in C^1$ и $F_1'(x) = \begin{vmatrix} F'(x) & 0 \\ * & |\det F'(x)|^{-1} \end{vmatrix}$ поэтому $|\det F_1'(x)| = 1$

Если f - измеримая неотрицательная функция, то её подграфик и подграфик функции $x \mapsto f(F(x))\cdot|\det F'(x)|$ переходят друг в друга при F_1 и остаётся сослаться на лемму 1 и теорему Фубини. Если же $F \notin C^2$, можно рассуждать так. Если f - функция с конечным числом значений, то f есть сумма характеристических функций измеримых множеств, и для неё верно требуемое неравенство. Если f - произвольная, то мы воспользуемся равенством $\int^* f = \sup\{\int g \mid g$ - измеримая функция с конечным числом значений и конечным носителем, $g \le f\}$ /докажите его/ и соответствующим неравенством для $\int g$.

6. Итак, осталось доказать лемму 1. Для этого зафиксируем константу $C > 1$ и докажем, что $\mu(F(A)) \le C\cdot\int_A^* |\det F'(x)|\,d\mu(x)$. Мы докажем это, начав с простых A и переходя к более сложным. Измеримые мно-

жества A , для которых $F(A)$ измеримо и выполнено требуемое неравенство, назовём хорошими.

7. У всякой точки $x \in U$ существует такая окрестность W , что любой кубик, содержащийся в W , хорош. Докажем это. Его образ измерим, так как является прообразом борелевского множества при непрерывном отображении F^{-1}/вообще говоря, образ борелевского множества при непрерывном отображении не обязан быть борелевским/

Отложив пока выбор W , рассмотрим какой-нибудь кубик K . Пусть x – его центр. Рассмотрим наряду с $F(K)$ образ K' кубика K при функции $F_0(u) = F(x) + F'(x)\,(u-x)$. Мера K' равна $|\det F'(x)| \cdot \mu(K)$. Покажем, что мера $F(K)$ не может сильно превосходить меру K' . Рассмотрим K'' – прообраз $F(K)$ при отображении F_0 . Посмотрим, насколько K'' может выступать за пределы K . Если $u \in K''$, то $u = F_0^{-1}(F(t))$ для некоторого $t \in K$ и $\|u-t\| = \|F_0^{-1}(F(t)) - F_0^{-1}(F_0(t))\| \le \|F'(x)^{-1}\| \cdot \|F(t) - F_0(t)\| \le$ $\le \|F'(x)^{-1}\| \cdot \|t-x\| \cdot \sup_{z \in [x,t]} \|F'(z) - F'(x)\| \le \|F'(x)^{-1}\| \cdot$ (размер кубика K) $\cdot$ (колебание F' на кубике). Поэтому K'' содержится в кубике с тем же центром, что и K , но чуть большего размера /увеличенного в $1 + \|F'(x)^{-1}\| \cdot$ (колебание F' на K) раз/, и $F(K)$ содержится в образе этого кубика, имеющего меру $|\det F'(x)| \cdot \mu(K) \cdot (1 + \|F'(x)^{-1}\| \cdot$ (колебание F' на $K))^n$ /n – размерность пространства/. А нам надо, чтобы мера $F(K)$ не более чем в C раз превосходила $\int_K |\det F'(z)|\,dz$ что отличается от величины $\mu(K) \cdot |\det F'(x)|$ не более чем на величину $\mu(K) \cdot$ (колебание $\det F'$ на K) . Теперь ясно, как нужно выбрать W – надо, чтобы в W колебание F' /и $\det F'$/ было мало, а функция $\|F'(x)^{-1}\|$ ограничена. Это можно сделать, так как $F \in C^1$. (Заметим, что в этом пункте неважно, входит ли граница в кубик.)

8. Объединение конечного числа непересекающихся хороших множеств хорошее. Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ – возрастающая последовательность хороших множеств, то $\bigcup A_i$ – хорошее. Первое очевидно, второе следует из того, что $\mu(\bigcup F(A_i)) \le \sup \mu(F(A_i))$

9. Любое элементарное множество /произведение отрезков/, содержащееся в U вместе с некоторой ε – окрестностью, хорошее.

В самом деле, его замыкание – содержащийся в U компакт – можно покрыть такими окрестностями, что любой содержащийся в них кубик хорош /п.7/. По лемме Лебега существует такое δ , что всякое подмножество диаметра не более δ содержится в одной из них. Остаётся разрезать наше элементарное множество на кубики /если его стороны соизмеримы, иначе представляем его как объединение возрастающей последовательности элементарных множеств с соизмеримыми сторонами./ После этого мы выходим на привычный путь рассуждений.

I0. Назовём Σ-множеств м объединени счётного числа элементарных множеств, каждое из которых содержится в U вместе с некоторой окрестностью. В силу 8 и 9 всякое Σ -множество хорошее. Пересечение двух Σ -множеств есть Σ -множество.

II. Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ - хорошие и $\int^*_{A_1} |\det F'(x)|\, d\mu(x) < \infty$, то $\bigcap A_i$ хорошее. /Это следует из того, что в этом случае $\int_{\bigcap A_i} \dots = \inf_i \int_{A_i} \dots$ /

I2. Назовём $\Pi\Sigma$ -множеством пересечение счётного числа Σ -множеств A_i, для одного из которых $\int^*_{A_i} |\det F'(x)|\, d\mu(x)$ конечен. Из I0 и II следует, что всякое $\Pi\Sigma$ -множество хорошее.

I3. Всякое измеримое подмножество B хорошего множества A, для которого $\int_A \dots = 0$, хорошее.

I4. Всякое ограниченное множество A меры 0, содержащееся в U вместе с ε-окрестностью, хорошее. В самом деле, рассмотрим его $\varepsilon/2$-окрестность; её замыкание - компакт, лежащий в U, поэтому $\det F'(x)$ ограничено. Теперь покроем A с помощью Σ -множеств убывающей меры, содержащейся в этой $\varepsilon/2$ - окрестности; их пересечение будет хорошим множеством меры 0 и интеграл по нему /в силу ограниченности $\det F'$ / будет равен 0; осталось применить I3.

I5. Всякое множество меры 0 хорошее. В самом деле, пересекая его с множествами $\mathcal{D}_n = \{x \mid \|x\| \le n$ и шар с центром x радиуса $1/n$ содержится в $U\}$, представляем его в виде объединения возрастающей последовательности множеств, к которым применяем I4.

I6. Всякое ограниченное измеримое множество A, содержащееся в U вместе с ε -окрестностью, хорошее; в самом деле, оно содержится в $\Pi\Sigma$ -множестве B, для которого $\mu(B \setminus A) = 0$, тогда

$$\mu(F(A)) \le \mu(F(B)) \le C \int^*_B \dots = C \cdot \int^*_A \dots$$

I7. Всякое измеримое множество, содержащееся в U, хорошее. /Представляем его в виде объединения ограниченных измеримых множеств, содержащихся в U вместе с окрестностями, как в I5/.

Доказательство теоремы о замене переменной закончено.

Другое доказательство /см. "Основы мат. анализа" Рудина, там оно для непрерывных функций/ использует такие соображения:

а/ достаточно доказать для малых областей /большую разбиваем на малые/

б/ локально любой диффеоморфизм есть композиция простых диффеоморфизмов /затрагивающих только одну координату/ и перестановок координат

в/ для простых диффеоморфизмов теорема сводится к одномерному случаю /где она доказывается с помощью неопределённого интеграла/. Представление в виде композиции простых делается так: если $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\partial F_1/\partial x_1 \neq 0$, то отображение $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ - простой диффеоморфизм /локально, по теореме о неявной функции/, оставшийся диффеоморфизм затрагивает $n-1$ координат; с ним поступаем аналогично и т. д.

Утверждение, аналогичное лемме I, верно и без предположения о взаимной однозначности F; в этом случае измеримость $F(A)$ не утверждается, а мера $F(A)$ заменяется на внешнюю меру. А именно, верна

<u>Лемма 3</u>. Пусть $F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - отображение класса C^1, A - измеримое подмножество $\mathcal{U}$. Тогда

$$\mu^*(F(A)) \leq \int_A^* |\det F'(x)| \, d\mu(x)$$

<u>Доказательство</u> проходит аналогично доказательству леммы I. При этом используется то, что образ компакта при непрерывном отображении - компакт и поэтому измерим, что Σ-множество есть объединение компактов и, поскольку образ объединения равен объединению образов, образ Σ-множества измерим. Про $\Pi\Sigma$-множества этого утверждать нельзя (образ пересечения не есть пересечение образов), но неравенство с внешней мерой его образа получается. (Подробное рассуждение проведите сами!)

Из леммы 3 вытекает

<u>Теорема Сарда</u> (случай равных размерностей).

Если $F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - отображение класса C, то образ множества $A = \{x \mid F'(x) - \text{не наложение}\}$ критических точек функции F имеет меру 0.

<u>Доказательство</u>. В самом деле, $\int_A |\det F'(x)| = 0$.

Аналогичное утверждение верно и для функций из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ при $m \neq n$. При $m < n$ его легко можно вывести из доказанного утверждения, распространив F на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ постоянно вдоль $\mathbb{R}^{n-m}$. При $m > n$ доказательство гораздо более трудно, и, кроме того, требуется большая гладкость (например, бесконечная дифференцируемость), а наличия непрерывной первой производной недостаточно.

Р Я Д Ы   Ф У Р Ь Е   A60

1. Постановка задачи. Мы хотим представить 2π -периодическую функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в виде суммы ряда из экспонент $t \mapsto e^{int}$:

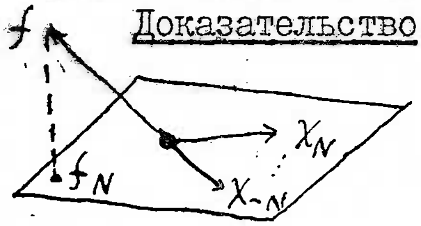
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$$

(Равносильная задача: представить ее в виде суммы $\sum b_n \cos nt + c_n \sin nt$.) Как найти a_n? Можно воспользоваться ортогональностью в $L_2([0,2\pi])$ (пространстве интегрируемых с квадратом комплексных функций на $[0,2\pi]$) функций $\chi_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$. (Множитель $1/\sqrt{2\pi}$ обеспечивает единичную норму функции χ_n .) Если f в каком-то смысле равно $\sum a_n \chi_n$, то, наверное, $(f, \chi_m) = \sum a_n (\chi_n, \chi_m) = a_m \cdot 1$ и $a_m = \langle f, \chi_m \rangle$. Что получится из этой идеи, мы увидим дальше.

2. Определения. Пусть f – периодическая функция с периодом 2π , интегрируемая на $[0, 2\pi]$. Ее коэффициентами Фурье называются числа $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{int}\, dt$. Ряд $\sum a_n \chi_n$ называется рядом Фурье функции f . Нас будет интересовать вопрос о сходимости его частных сумм к f в разных смыслах: в L_2 , равномерно, поточечно и т. п.

3. L_2 -сходимость.

Теорема. Пусть $f \in L_2[0,2\pi]$. Тогда частные суммы ее ряда Фурье сходятся к ней по L_2 -норме.



Доказательство. Заметим, что N -ая частная сумма $f_N = \sum_{k=-N}^{N} a_k \chi_k$ ряда Фурье есть ортогональная проекция f на подпространство, порожденное $\{\chi_{-N}, \dots, \chi_N\}$. Поэтому $\| f - f_N \|$ – кратчайшее расстояние от f до этого подпространства. Согласно теореме Стоуна – Вейерштрасса тригонометрические полиномы вида $\sum_{k=-N}^{N} b_k \chi_k$ плотны в непрерывных функциях (по равномерной, и, следовательно, по L_2-норме); непрерывные функции плотны в L_2 (по L_2 -норме). Поэтому любая функция из L_2 может с любой заданной точностью быть приближена некоторым тригонометрическим полиномом $\sum_{k=-N}^{N} b_k \chi_k$ и еще лучше приближается N -ой частной суммой ряда Фурье (а также всеми следующими). ∎

4. Убывание коэффициентов Фурье.

Теорема. 1. Для любой интегрируемой функции f ее коэффициенты Фурье a_n стремятся к 0 при $n \to \infty$.

2. Если $f \in L_2$, то ее коэффициенты Фурье лежат в ℓ_2 : $\sum |a_n|^2 < \infty$.

3. Если f – гладкая функция ($f \in C^\infty$), то ее коэффициенты Фурье убывают быстрее любой степени n : для всякого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $a_n \cdot |n|^k$ ограничена.

Доказательство. Начнем с 2: если f_N - частная сумма ряда Фурье, то (в силу ортонормированности χ_k) $\|f_N\|_{L_2} = \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2$. Но это не превосходит $\|f\|_{L_2}$ (проекция вектора не длиннее его самого). Теперь мы видим, что утверждение I теоремы доказано для функций из L_2. Заметим, что если f и g близки в L_1, то их коэффициенты Фурье равномерно близки (одинаковые коэффициенты отличаются не более чем на $\sqrt{2\pi}\cdot\|f-g\|_{L_1}$). Поэтому, приближая данную функцию из L_1 функциями из L_2 (например, непрерывными), мы видим, что ее коэффициенты Фурье равномерно приближаются стремящимися к 0 последовательностями и, значит, сами стремятся к 0. Для доказательства 3-го утверждения применим следующую лемму.

Лемма. Если $f \in C^1$, то n-ый коэффициент Фурье функции f' получается из n-го коэффициента f умножением на in. (В самом деле, интегрируем $\int f'(t)\, e^{int}\, dt$ по частям.)
Из леммы следует, что $|a_n \cdot n^k|$ являются модулями n-ых коэффициентов Фурье функции $f^{(k)}$ и поэтому ограничены (и даже стремятся к 0). ▨

5. Изоморфизм между $L_2[0,2\pi]$ и ℓ_2. Рассмотрим отображение F сопоставляющее каждой функции $f \in L_2[0,2\pi]$ (двустороннюю) последовательность ее коэффициентов Фурье. (Раньше мы рассматривали 2π-периодические функции и должны формально потребовать $f(0)=f(2\pi)$, но так как f определена с точностью до множества меры 0, то это несущественно.) Мы получаем отображение из $L_2[0,\pi]$ в ℓ_2.

Теорема. Отображение F является изоморфизмом евклидовых пространств $L_2[0,2\pi]$ и ℓ_2. Обратное отображение сопоставляет последовательности $\{a_n\}$ функцию $\sum a_n \chi_n$ (сумма ряда вычисляется в L_2).

Доказательство. Прежде всего поймем, что обратное отображение G корректно определено сказанным. В самом деле, если $\{a_n\} \in \ell_2$ то ряд $\sum a_n \chi_n$ сходится в L_2 по критерию Коши ($\|\sum_{N_1 \le |n| \le N_2} a_n \chi_n\| = \sum_{N_1 \le |n| \le N_2} |a_n|^2$ по теореме Пифагора). Теорема пункта 2 говорит, что композиция $G \circ F$ тождественна. Проверим, что тождественна и вторая композиция $F \circ G$. В самом деле, если $f = \sum a_n \chi_n$ в L_2, то в силу непрерывности скалярного произведения $\langle f, \chi_m \rangle = \sum a_n \langle \chi_n, \chi_m \rangle = a_m$. Осталось доказать, что $\|f\| = \sum |a_n|^2$. Это следует из того, что нормы частных сумм ряда Фурье по теореме Пифагора равны частным суммам ряда $\sum |a_n|^2$. Написанное равенство называется равенством Парсеваля. ▨

6. Поточечная и равномерная сходимости.

Теорема. Если f - гладкая функция, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно и, следовательно, поточечно.

A62

Доказательство. Так как f гладкая, то $a_n \cdot n^2$ ограничено и $\sum |a_n| < \infty$. Поэтому ряд Фурье сходится равномерно к некоторой непрерывной функции g . Но в L_2 он сходится к f . Значит, f и g совпадают почти всюду и, в силу непрерывности, всюду.

Задача. Доказать, что в условии теоремы достаточно предполагать $f \in C^1$.

Указание. Если $\{a_n\} \in l_2$, то $\{a_n/n\} \in l_1$

Отметим (без доказательства), что непрерывности функции f далеко не достаточно для того, чтобы ее ряд Фурье сходился хотя бы поточечно.

Мы рассказали о самых основных фактах (весьма обширной) теории рядов Фурье. Для более подробного ознакомления с ней рекомендуем обратиться к книге Г.Е.Шилова "Математический анализ. Функции одного переменного. Часть третья", М. Наука, 1970, гл. 14 "Ортогональные разложения", с. 205 - 260.

A63

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1. Постановка задачи. Ряд Фурье есть разложение периодической функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, то есть функции на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, по функциям $t\mapsto e^{int}$, являющимся характерами группы $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, то есть ее непрерывными гомоморфизмами в мультипликативную группу $\mathbb{T}$ комплексных чисел, равных по модулю I. Подобным образом преобразование Фурье разлагает функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ по характерам аддитивной группы $\mathbb{R}$, то есть по функциям $\chi_\lambda(t)=e^{2\pi i\lambda t}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$, множитель 2π добавлен для удобства.)

2. Определения. Пусть f – интегрируемая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. Ее преобразованием Фурье называется функция

$$\tilde f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{\chi_\lambda(t)}\,dt=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-2\pi i\lambda t}dt$$

Впоследствии мы будем рассматривать также функцию $\check f(\lambda)=\tilde f(-\lambda)=$ $=\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{+2\pi i\lambda t}dt$, называя ее (почему – будет видно) обратным преобразованием Фурье функции f.

3. Непрерывность и убывание преобразования Фурье.

Теорема. Если f – интегрируемая функция, то ее преобразование Фурье есть ограниченная непрерывная функция, стремящаяся к 0 при $x\to\infty$.

Доказательство. Заметим, что $|\tilde f(\lambda)|$ при всех λ ограничено числом $\|f\|_{L_1}$. Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть сначала f равна 0 вне некоторого отрезка I. Если λ' близко к λ, то $\chi_{\lambda'}$ и χ_λ равномерно близки на I и поэтому $\int_I f\overline{\chi_{\lambda'}}=\tilde f(\lambda')$ и $\int_I f\overline{\chi_\lambda}=\tilde f(\lambda)$ близки. Пусть f еще и гладкая. Тогда $\widetilde{(f')}(\lambda)=\int f'(t)e^{-2\pi i\lambda t}dt=2\pi i\lambda\int f(t)e^{-2\pi i\lambda t}=2\pi i\lambda\tilde f(\lambda)$ (интегрирование по частям). Так как преобразование Фурье функции f' ограничено (по доказанному), то преобразование функции f стремится к 0. Итак, для гладких функций с компактным носителем (равных 0 вне некоторого отрезка) утверждение доказано. Из неравенства $|\tilde f(\lambda)|\le\|f\|_{L_1}$ вытекает, что преобразования Фурье L_1-близких функций равномерно близки. Теперь утверждение теоремы для произвольных интегрируемых функций вытекает из того, что гладкие функции с компактным носителем плотны в L_1 и того, что равномерный предел непрерывных функций, стремящихся к 0, есть снова такая же функция. ▨

4. Пространство Лорана Шварца. Важную роль в дальнейшем будет играть следующее пространство функций, называемое пространством Шварца. В этом пространстве существует некоторая естественная топология (не задаваемая, впрочем, никакой нормой), но нам она не понадобится. Элементами этого пространства являются гладкие функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ убывающие вместе со своими производными быстрее любой степени x :

A64

Преобразование Фурье – 2

для каждых k и l функция $f^{(k)}(x)\cdot x^l$ должна быть ограничена (равносильное в силу произвольности l условие: должна стремиться к 0). Например, всякая финитная функция (гладкая функция, равная нулю вне некоторого отрезка) лежит в этом пространстве. В нем лежит также и функция $x \mapsto \exp(-x^2)$, которая нам еще пригодится. Это пространство обозначается S.

Лемма. Если $f\in S$, то $f'\in S$ и $[x\mapsto x\cdot f(x)]\in S$.

Доказательство. Убывание производных функции $[x\mapsto x\cdot f(x)]$ следует из правила дифференцирования произведения. ▨

Значение пространства S состоит в том, что, как мы увидим, преобразование Фурье осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства S на себя.

5. Преобразование Фурье на S.

Теорема. I. Прямое и обратное преобразования Фурье отображают S в себя.

2. Они взаимно обратны на S.

Доказательство этой теоремы мы разобьем на несколько этапов. Вначале мы докажем, что прямое и обратное преобразования не выводят из S. Затем мы выясним, как они связаны с операторами умножения на x и дифференцирования и из этого выведем, что их композиция есть скалярный оператор – умножение на некоторую константу. Наконец, мы докажем, что эта константа равна I, вычислив преобразование Фурье от конкретной функции.

Лемма I. Пусть $f\in S$. Тогда преобразования Фурье производной и результата умножения на $2\pi i x$ функции f вычисляются так:

а) $\widetilde{(f')}(\lambda) = 2\pi i\lambda\cdot\tilde f(\lambda)$

б) $\widetilde{(x\mapsto 2\pi i x f(x))}(\lambda) = -(\tilde f)'(\lambda)$

В частности, $(\tilde f)'$ существует.

Доказательство. а) $\widetilde{(f')}(\lambda) = \int f'(x)e^{-2\pi i\lambda x}dx = 2\pi i\lambda\cdot\int f(x)e^{-2\pi i\lambda x}dx = 2\pi i\lambda\cdot\tilde f(\lambda)$ (интегрируем по частям, внеинтегрального члена нет, так как f быстро убывает).

б) Дифференцируя равенство $\tilde f(\lambda) = \int f(x)e^{-2\pi i\lambda x}dx$ по λ, находим, что $(\tilde f)'(\lambda) = -\int 2\pi i x\cdot f(x)\,dx$.

Обоснование: $[\tilde f(\lambda+\Delta\lambda) - \tilde f(\lambda)]/\Delta\lambda = \int e^{-2\pi i\lambda x}\cdot f(x)\cdot\dfrac{e^{-2\pi i x\Delta\lambda}-1}{\Delta\lambda}dx$ можно сослаться на теорему о мажорированной сходимости, так как дробь не превосходит $2\pi i x$ (заметим, что $|e^{it}-1|\le t$), а $f\in S$. ▨

Обозначив через F преобразование Фурье (на S), через A – оператор умножения на $2\pi i x$ ($Af(x) = 2\pi i x f(x)$), а через $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, мы можем записать утверждение леммы I в виде равенств:

Преобразование Фурье – 3 A65

$$F\circ \mathcal{D} = A\circ F,\quad F\circ A = -\mathcal{D}\circ F$$

Если через F_0 обозначить обратное преобразование Фурье, то, вспоминая, что $\check{f}(\lambda)=\tilde{f}(-\lambda)$, мы видим, что

$$F_0\circ\mathcal{D} = -A\circ F_0,\quad F_0\circ A = \mathcal{D}\circ F_0$$

Из леммы следует, что преобразование Фурье любой функции f из S дифференцируемо и его производная равна преобразованию Фурье функции $-Af$ и, следовательно, сама дифференцируема. Значит, $\tilde{f}$ дифференцируемо дважды (для любой $f\in S$), а значит, и трижды (потому что $\widetilde{-Af}$ дифференцируемо дважды) и т. д. Итак, $\tilde{f}$ – гладкая. Мы знаем, что $\tilde{f}$ ограничена для любой $f\in S$, значит, и $\widetilde{(\mathcal{D}^n f)}$ ограничено для любого n, то есть $A^n\tilde{f}$ ограничена. Ограничена и функция $A^n(\widetilde{\mathcal{D}^k f})$, так как $\mathcal{D}^k\tilde{f} = \pm\widetilde{(A^k f)}$. Итак, $\tilde{f}\in S$. Мы доказали, что преобразование Фурье не выводит из класса S. Аналогично и обратное преобразование также не выводит из S.

Из леммы следует также, что композиция $F_0\circ F$ сохраняет и коммутирует с операторами A и $\mathcal{D}$: $F_0\circ F\circ A = -F_0\circ\mathcal{D}\circ F = A\circ F_0\circ F$ и аналогично для $\mathcal{D}$.

Лемма 2. Всякое линейное отображение $\Phi : S\to S$, коммутирующее с оператором A, есть умножение на гладкую функцию.

Доказательство. Докажем сначала, что если Φ коммутирует с A, $f\in S$, $f(a)=0$ для некоторого $a\in\mathbb{R}$, то и $(\Phi f)(a) = 0$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма Адамара. Если f – гладкая функция, $f(a)=0$, то f можно представить в виде $f(x)=(x-a)g(x)$, где g – гладкая.

Доказательство леммы Адамара. В одномерном случае, который мы сейчас рассматриваем, g определяется однозначно: $g(x) = f(x)/(x-a)$, $g(a)=f'(a)$. Но доказательство гладкости все равно косвенное:

$$f(x) = [t\mapsto f(tx)]\Big|_0^1 = \int_0^1 x\cdot f'(tx)\,dt = x\cdot\int_0^1 f'(tx)\,dx = x\cdot g(x)$$

(мы предполагаем $a=0$); гладкость g следует из теорем о дифференцировании под знаком интеграла. ▨

Вернемся к доказательству леммы 2. Если $f(a)=0$, то по лемме Адамара $f(x)=(x-a)\,g(x)$, то есть $f=\frac{1}{2\pi i}Ag - ag$. Отсюда $\Phi f = \frac{1}{2\pi i}\Phi A g - a\Phi g = (\text{т.к. } A\circ\Phi=\Phi\circ A) = \frac{1}{2\pi i}A\Phi(g) - a\Phi(g)$, то есть $[\Phi(f)](x) = (x-a)\cdot[\Phi(g)](x)$, и поэтому $\Phi f(a) = 0$.

Итак, мы доказали, что если $f(a)=0$, то и $\Phi f(a)=0$. Следовательно, если $f_1(a)=f_2(a)$, то $\Phi f_1(a)=\Phi f_2(a)$, поэтому значение Φf в точке a зависит только от значения f в точке a. Эта зависимость, конечно, линейна. Итак, Φ есть умножение на функцию: $[\Phi(f)](x)=\varphi(x)\cdot f(x)$. Осталось доказать гладкость φ, для чего взять в качестве f функцию из S, нигде не равную 0 (например, $f(x)=\exp(-x^2)$). ▨

Лемма 3. Всякое линейное отображение Φ пространства S в себя, коммутирующее с A и $\mathcal{D}$, есть умножение на константу.

Доказательство. Мы уже знаем, что Φ есть умножение на некоторую гладкую функцию φ. Осталось воспользоваться условием коммутирования с $\mathcal{D}$: $(x \mapsto \varphi(x) f(x))' = \varphi'(x) f(x) + f'(x)\varphi(x)$ должно равняться $\varphi(x)\cdot f'(x)$. Таким образом, $\varphi'(x)\cdot f(x) = 0$ для всех x и f и потому $\varphi = const$. ▨

Итак, $F_0 \circ F$ (и $F \circ F_0$) есть умножение на некоторую константу. Остается найти ее.

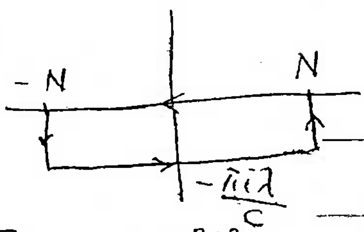
Лемма 4. При преобразовании Фурье функция $f(x) = exp(-c\, x^2)$ (при подходящем $c>0$) переходит в себя.

Доказательство. $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} exp(-2\pi i \lambda x)\, exp(-c\, x^2)\, dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}} exp-(cx^2 + 2\pi i \lambda x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} exp\left[-c\cdot\left(x - \frac{\pi i \lambda}{c}\right)^2\right] dx \cdot exp\left(-\frac{\pi^2\lambda^2}{c}\right) =$$

$$= exp\left(-\frac{\pi^2\lambda^2}{c}\right)\cdot \int_{\left(\mathbb{R} - \frac{\pi i \lambda}{c}\right)} exp(-cz^2)\, dz$$

Применение теоремы Коши к функции $z \mapsto exp(-cz^2)$ и нарисованному контуру при $N \to \infty$ показывает, что интеграл по $\mathbb{R} - \frac{\pi i \lambda}{c}$ можно заменить на интеграл по $\mathbb{R}$. При этом получим:



$$\hat{f}(\lambda) = exp\left(-\frac{\pi^2\lambda^2}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{c}} \int exp\left(-(\sqrt{c}x)^2\right) d(\sqrt{c}\,x) = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, exp\left(-\frac{\pi^2\lambda^2}{c}\right)$$

Остается положить $c = \pi$. ▨

Так как эта функция четная, она переходит в себя и при обратном преобразовании Фурье. Из сказанного следует, что $F_0 \circ F$ и $F \circ F_0$ суть единичные операторы. Теорема доказана. ▨

6. Преобразование Фурье в L_2.

Теорема. Преобразование Фурье как отображение из S в S является $L_2([0,2\pi], dx)$-изометрией:

Доказательство. Достаточно доказать $\langle f, \check{g} \rangle_{L_2} = \langle \hat{f}, g \rangle$ (при $g = \hat{f}$ получаем требуемое). А это очевидно:

$$\langle f, \check{g} \rangle = \iint f(x)\, \overline{g(\lambda)}\, e^{-2\pi i \lambda x}\, dx\, d\lambda = \langle \hat{f}, g \rangle. \text{ ▨}$$

Так как S плотно в L_2 (докажите!) и L_2 полно, то прямое и обратное преобразования Фурье могут быть продолжены на все L_2 и по-прежнему будут обратны друг другу. Эти продолжения называются прямым и обратным преобразованиями Фурье -順Планшереля. Если функция f лежит и в L_1, и в L_2, то ее преобразование Фурье (в рассмотренном нами сначала смысле) совпадает с преобразованием Фурье - Планшереля.

Задача. Докажите это.

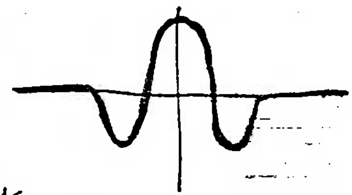
Дальнейшее расширение области определения преобразования Фурье доставляет теория обобщенных функций. (Пример: преобразование Фурье константы есть δ - функция.) Об этом подробнее см. в книге Кириллова и Гвишиани "Теоремы и задачи..."

ВОПРОСНИК - ТЕСТ "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

1. Придумать такую не всюду равную 0 гладкую функцию $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ чтобы на решениях уравнения $y'=F(y)$ функция $\Phi(x_1,x_2)=x_1+\sin x_2$ была бы постоянна.

2. Какому уравнению будет удовлетворять функция $t\mapsto\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2(t)\\x_1(t)+x_2^2(t)\end{pmatrix}$ если функция $t\to\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $x'(t)=F(t,x(t))$?

3. График функции f показан на рисунке. Имеет ли уравнение $y''(t)=-f'(y(t))$ ограниченные решения, не сохраняющие знак ?



4. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ уравнение $y'=\begin{pmatrix}a & 0.5\\0.5 & b\end{pmatrix}y$ При каких значениях параметров a и b это уравнение имеет решение, которое в 0 не превосходит 1 по норме, а в некоторой точке больше 1000 по норме ?

5. На прямой задано уравнение $y'=f(y)$ с гладкой и ограниченной f. Доказать, что всякое решение этого уравнения можно продолжить на всю прямую.

6. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'(t)=F(t,y(t))$, где F - гладкая функция на $\mathbb{R}^2$. Решения его с $y(0)=0$ и $y(0)=1$ продолжаются на $[0,+\infty[$. Будет ли продолжаться на $[0,+\infty[$ его решение с $y(0)=1/2$?

7. Построить гладкую функцию f на прямой, для которой уравнение $y'=f(y)$ имело бы определенные на $[0,+\infty[$ решения при $y(0)\geqslant 1$ и не имело бы их при $y(0)<1$. Можно ли решить задачу, если $\geqslant$ заменить на $>$, а $<$ - на $\leqslant$?

8. Уравнение $y'=F(y)$ с гладкой $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ таково, что $\langle F'(y),y\rangle<0$ для всех y, равных по норме единице. (Норма евклидова.) Доказать, что решение с начальным условием $y(0)=0$ продолжается на $[0,+\infty[$. Верно ли это, если заменить $<$ на $=$? А если заменить $<$ на $\leqslant$?

9. Функция $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению $y'(t)=t+\operatorname{arctg} y(t)$ и начальному условию $y(0)=1$. Найти $y(100)$ с точностью 10 %.

10. Рассмотрим уравнение $y'(t)=\operatorname{arctg} y(t)$. Через F обозначим функцию, сопоставляющую числу y_0 значение, принимаемое в точке 1 решением этого уравнения, равным в нуле числу y_0. Найти $F'(0)$.

Критерий оценок.

Решены все задачи - элементарный курс обыкновенных дифференциальных уравнений усвоен хорошо.

Решено не менее 7 задач - ... усвоен удовлетворительно.

Решено не менее 3 задач - от изучения курса обыкновенных дифференциальных уравнений остались следы.

Решено менее 3 задач - следов от изучения курса обыкновенных дифференциальных уравнений не осталось.