добавить: 1) e^{x} базис в $L_2 C[0,1]$ 2) всякое конечномерное пр-во можно пр. в евклидово

Гильбертовы пространства

Продолжим изучение векторных пространств со скалярным произведением.

Уже известное вам понятие евклидова пространства мы обобщим в двух направлениях: во-первых пространство может быть не только вещественным, но и комплексным, во-вторых — оно может быть бесконечномерным.

__Определение__ Отображение $f: E_1 \to E_2$ комплексных векторных пространств называется антилинейным если

а) f аддитивно, т.е. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

б) $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Примеры антилинейных отображений

1. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$

2. $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z_1, \dots, z_n) = (\mu_1 \bar{z}_1, \dots, \mu_n \bar{z}_n)$, где μ_i - заданные комплексные числа.

3. Отображение пространства комплексных функций на отрезке $[-1, 1]$ в себя, заданное формулой $(f\varphi)(t) = \overline{\varphi(-t)}$

__Замечание__. Всякое комплексное пространство V можно рассматривать и как вещественное (обозначаемое $V_{\mathbb{R}}$), если ограничиться умножением только на вещественные числа. Антилинейное отображение комплексных пространств является __линейным__ отображением соответствующих вещественных пространств.

~~Определение. Скалярным произведением на комплексном пространстве V называется комплексная функция на V×V~~

Определение Эрмитовой формой на комплексном пространстве V называется числовая функция на $V \times V$ линейная по первому аргументу (при фиксированном втором) и антилинейная по второму.

Пример. Функция $(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \longmapsto \alpha_1 z_1 \overline{w_1} + \dots + \alpha_n z_n \overline{w_n}$ суть эрмитова форма на $\mathbb{C}^n$.

Замечание. Если B - эрмитова форма на V, то функция $x, y \longmapsto \operatorname{Re} B(x,y)$ билинейная
~~Определение Скалярным произведением называ~~
форма на $V_{\mathbb{R}}$.

Определение Скалярным произведением на комплексном пространстве, называется эрмитова форма $x, y \longmapsto (x,y)$ удовлетворяющая условиям

i) $(y, x) = \overline{(x, y)}$

ii) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

Замечание 1) Нельзя требовать билинейности скалярного произведения, как это делалось в вещественном случае т.к. иначе (x,x) и (ix, ix) имели бы разные знаки.

2) Интересно отметить, что условие i) можно вывести из ii) (в вещественном случае это не так). Пусть B - эрмитова форма, удовлетворяющая ii), тогда форма $\langle x, y \rangle = B(x,y) - \overline{B(y,x)}$ тоже эрмитова причем а) $\langle y, x \rangle = -\overline{\langle x, y \rangle}$ и б) $\langle x, x \rangle = 0$. Покажем, что форма $\langle\ \rangle$ равна 0 (в вещественном случае условия а) и б) равносильны и означают антисимметричность формы. Ясно, что антисимметричная форма не обязана быть нулевой). Из тождества $\langle x+y, x+y \rangle = \langle x\, x \rangle + \langle x\, y \rangle + \langle y\, x \rangle + \langle y\, y \rangle$ и условия б) следует $\langle x\, y \rangle + \langle y\, x \rangle = 0$. Или учитывая а), $\operatorname{im} \langle x, y \rangle = 0$. Заменяя x на ix получаем $0 = \operatorname{im} \langle ix, y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$. Т.о. $\langle x, x \rangle = 0$.

Примеры

1. Стандартное скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$

$$(\xi, \eta) = \xi_1\overline{\eta_1} + \ldots + \xi_n\overline{\eta_n}, \quad \text{здесь } \xi = (\xi_1, \ldots \xi_n),\ \eta = (\eta_1, \ldots \eta_n)$$

2. В пространстве $C_{\mathbb{C}}[a,b]$ комплексных ~~…~~ непрерывных функций на $[a, b]$:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

3. Скалярное произведение на комплексном пространстве V определяет вещественное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}}$ на $V_{\mathbb{R}}$ по формуле

$$(x, y)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\,(x, y)$$

Заметим, что $(x, x)_{\mathbb{R}} = (x, x)$, поэтому функция $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x, x)}$ есть норма в вещественном пространстве $V_{\mathbb{R}}$. Она связана с комплексной структурой соотношением

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|, \qquad (*)$$

показывающим, что оператор умножения на i есть изометрия $V_{\mathbb{R}}$. (Вообще, нормой на комплексном пространстве V называется норма на $V_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющая $(*)$). ~~Это условие эквивалентно тому, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}$: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$~~

Наоборот, если дано вещественное евклидово пространство V, то на его комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ можно определить скалярное произведение $(x+iy, u+iv)_{\mathbb{C}} = (x, u) + (y, v) + i(y, u) - i(x, v)$, превращающее $V_{\mathbb{C}}$ в комплексное евклидово пространство.

На комплексные евклидовы пространства переносятся все свойства вещественных пространств. Напомним их.

Неравенство Коши-Буняковского $|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\|$. (3а)

Док-во. Из нер-ва Коши-Буняковского в $V_{\mathbb{R}}$ получаем

$|\mathrm{Re}\,(a,y)| \le \|a\|\cdot\|y\|$. ~~Пусть θ Подберем θ комплексное число, равное по модулю 1 так, чтобы $\theta\cdot(x,y)$ было вещественным. Подставляя Полагая в "вещественном" неравенстве $x = \theta\cdot a$, имеем $|(a,y)| = |(\theta x, y)| = |\theta (x,y)| = |\mathrm{Re}$~~ этого, однако недостаточно, т.к. $|\mathrm{Re}(a,y)| \le |(a,y)|$. Пусть $\theta \in \mathbb{C}$ произвольное число, равное по модулю 1. ~~Полагая~~ Подставляя ~~a~~ θx вместо a, находим

$\mathrm{Re}\,[\theta\cdot(x,y)] \le |\theta x|\cdot|y| = |x||y|$. Осталось подобрать θ так, чтобы $\theta\cdot(x,y)$ было вещественным числом, тогда левая часть нер-ва превратится в $|(x,y)|$.

Обозначим через l_2 множество всех последовательностей $z_1, z_2, \dots$ комплексных чисел для которых ряд $\sum^\infty |z_i|^2$ сходится. ~~l_2 двумерное векторное~~ Это векторное пр-во относительно покоординатного сложения и умножения на числа. Действительно, если $\xi = (z_1 \dots)$, $\eta = (w_1, \dots) \in l_2$ то неравенство треугольника в $\mathbb{C}^n$ показывает, что суммы $|z_1+w_1|^2+\dots+|z_n+w_n|^2$ ограничены числом $\left(\sqrt{\sum^\infty |z_i|^2}+\sqrt{\sum^\infty |w_i|^2}\right)^2$ не зависящим от n. Следовательно ряд $\sum^\infty |z_i+w_i|^2$ сходится и $\xi+\eta\in l_2$.

Если $\xi, \eta \in l_2$ то ряд $\sum^\infty z_i \bar{w}_i$ сходится по критерию Коши. Действительно, из неравенства Коши-Буняковского

$$\sum_n^m \left| z_n \bar{w}_n + \dots + z_m \bar{w}_m \right| \le \sqrt{|z_n|^2+\dots+|z_m|^2}\cdot\sqrt{|w_n|^2+\dots+|w_m|^2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Задача. Используя метод доказательства комплексного неравенства К-Б докажите, что ряд $\sum^\infty z_i \bar{w}_i$ сходится абсолютно.

В частности, для стандартного скалярного произведения в $\mathbb{C}^n$ имеем

$$|z_1\bar{w}_1+\dots+z_n\bar{w}_n| \le \sqrt{|z_1|^2+\dots+|z_n|^2}\cdot\sqrt{|w_1|^2+\dots+|w_n|^2}$$

Формула $(\xi, \eta) = \sum^{\infty} z_i \overline{w_i}$ задает скалярное произведение в ℓ_2.

Векторы x и y в (комплексном) пространстве называются ортогональными если $(x, y) = 0$. ~~Система векторов назыв~~

Пример а) векторы $(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots)$ в $C[0, 2\pi]$ попарно ортогональны;

б) Векторы e^{ikt} $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ имеют длину $\sqrt{2\pi}$ и попарно ортогональны в $C_{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$. (Действительно, $(e^{int}, e^{imt}) =$

$$= \int_0^{2\pi} e^{int}\,\overline{e^{imt}}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \frac{1}{n-m}\, e^{i(n-m)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 \Big)$$

Доказательства следующих утверждений дословно повторяют вещественный случай.

Теорема 1 (Пифагор) Если x и y ортогональны, то $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$

Теорема 2 Конечномерное комплексное евклидово пространство имеет ортогональный базис.

Теорема 3 Если W - конечномерное подпространство евклидова (комплексного) пространства V то $W \oplus W^{\perp} = V$

(напомним, что $W^{\perp}$ есть подпространство векторов ортогональных всем векторам из W)

Теорема 4 Конечномерные ~~Комплексные~~ евклидовы пространства одинаковой размерности изометричны

Теорема 5 (Рисс) Пусть φ линейный функционал на конечномерном комплексном пространстве. Тогда существует (и единственный) вектор a такой, что $\varphi(x) = (x, a)$ для всех x.

Замечание Теорема Рисса утверждает, что отображение $V \longrightarrow V^*$, сопоставляющее вектору a функционал $\varphi_a = (\cdot, a)$ взаимно однозначно. Однако, в отличие от вещественного случая, это отображение не линейно, а антилинейно и потому не является изоморфизмом пространств V и V^*. Заметим, кстати, что в формулировке теоремы нельзя переставить вектор a на первое место, т.к. функционал $x \longmapsto (a, x)$ не линеен.

Доказательство. Тождество

$$\left|\sum_{i=1}^{N}(x e_i)e_i - x\right|^2 = |x|^2 - \sum^{N} |(x e_i)|^2 \quad (*)$$

показывает, что все конечные суммы ряда не превосходят $|x|^2$, т.к. левая часть (*) неотрицательна. ■

(Вообще: $\sum_{i=1}^{N}(x e_i)e_i$ есть проекция x на [illegible] (e₁…) [illegible] $\left(\sum (x \bar{e}_i)\right)$ [illegible] .)

Мы хотим обобщить теоремы 2–5 на случай бесконечномерных пространств. Наиболее просто это сделать в случае сепарабельного пространства (т.е. имеющего счетное всюду плотное подмножество). Все встречающиеся в приложениях гильбертовы пр-ва сепараб. Условие сепарабельности не является необходимым и позже мы от него освободимся.

Определение Ортонормированная система векторов $e_1, e_2, \ldots$ называется гильбертовым базисом если для каждого вектора x существует такая ~~единственная~~ последовательность чисел $x_i \in \mathbb{C}$, что ряд $\sum^{\infty} x_i e_i$ сходится к x.

базис ⇕ орт. ...

Замечание Если гильбертов базис e_i существует, то числа x_i называются координатами вектора x в базисе e_i и их можно находить по обычной формуле $x_i = (x, e_i)$, причем верна равенство

$$|x|^2 = \sum^{\infty} x_i^2$$

Действительно, функция $x \mapsto (a, x)$ непрерывна (нер-во

~~Следствие~~ Приложение (лемма Римана) Пусть $f(t)$ непрерывная функция на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда при целом $k \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}\,dt \to 0$$

(вместо e^{ikt} можно взять $\sin kt$ или $\cos kt$)

Док-во. Положим $g(t) = \overline{f(t)}$, тогда скалярное произведение e^{ikt} и g в $C_{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$ совпадает с $\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}\,dt$. Мы покажем, что все суммы $\sum\limits_{|k|\le N} |(e^{ikt}, g)|^2$ ограничены числом $2\pi\cdot(g,g)$, поэтому ряд $\sum |(e^{ikt}, g)|^2$ сходится и его общий член $|(e^{ikt}, g)|^2 \to 0$. Остается доказать что верна (Бессель) Т.к. векторы $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$ имеют единичную длину и ортогональны то

Лемма. Пусть $e_1, e_2, \dots$ ортонормированная система векторов в евклидовом пространстве. Тогда для всякого вектора x:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, x)|^2 \le \cancel{(x,x)}\ |x|^2$$

К. Б), поэтому при фиксированном к ~~последовательность~~ $\left(\sum^{N} a_i e_i, e_k\right)$

сходится к (a, e_k). Но при $N > k$ она все члены равны a_k.

Далее, последовательность $\left(\sum^{N} a_i e_i, a\right)$ сходится к $|a|^2$,

а её общий член есть $\sum^{N} a_i (e_i a) = \sum^{N} a_i \overline{a_i} = \sum^{N} |a_i|^2$

Верно и обратное:

<u>Лемма</u> Пусть e_i такая ортонормированная система векторов ~~евклидова~~ пространства H, что $\forall x \in H$

$$\sum |(x, e_i)|^2 = |x|^2 \quad (\text{ср. с леммой Бесселя})$$

Тогда $\{e_i\}$ - гильбертов базис.

Теорема 2'. Сепарабельное ~~гильбертово~~ евклидово пространство H имеет гильбертов базис.

Док-во. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — счетная плотная ~~подмножеств~~ система векторов. Применив к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта (см. „евкл. пр-ва" стр. 3) мы можем получить ортонормированную систему векторов $e_1, e_2, \dots$, не обязат. [illegible] ненулевыми, такую, что $\langle \xi_1 \dots \xi_n \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ при всех n. Покажем, что $\{e_i\}$ гильбертов базис. Т.к. мн-во $\{\xi_i\}$ плотно в ~~пространстве~~ H, то объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle e_1 \dots e_n \rangle$ растущей последовательности конечномерных подпространств плотно в H. Поэтому для каждого вектора x и $\varepsilon > 0$ ~~существует~~ найдется подпространство $\langle e_1 \dots e_N \rangle$ от которого x отстоит не далее чем на ε. Рассмотрим конечномерное подпространство V, порожденное x и $e_1, \dots e_N$. Т.к. кратчайшее расстояние в V от x до $\langle e_1 \dots e_N \rangle$ есть ~~проекция~~ длина вектора $x - \text{Пр}_{\langle e_1 \dots e_N \rangle} x$ (см. евклидовы пр-ва стр 3, лемма 1) то $\left| x - \sum^{N} (x\, e_i)\, e_i \right| < \varepsilon$

Из тождества (*) находим $|x|^2 - \sum^{N} |(x e_i)|^2 < \varepsilon^2$.
В сочетании с неравенством Бесселя это дает, что ряд $\sum^{\infty} |(x e_i)|^2$ сходится к $|x|^2$. Остается применить лемму. ■

Зачем лемма? Ведь сразу уже есть $\sum (x, e_i) e_i \to x$ (см. нер-во ... ср.)

Лемма 2 Пусть e_i – ортонормированная система векторов полного евклидова пространства и c_i – числовая последовательность. Ряд $\sum c_i e_i$ сходится iff $\sum |c_i|^2 < \infty$

Док-во. Проверим критерий Коши: $|c_n e_n + \ldots + c_m e_m|^2 = |c_n|^2 + \ldots + |c_m|^2 \longrightarrow 0$ при $n, m \to \infty$. Обратно, если ряд сходится к вектору a, то $\sum |c_i|^2 = |a|^2$ (см док-во сходится (нер-во Бесселя) ■

Определение Гильбертовым пространством называется (комплексное или вещественное) евклидово пространство полное относительно метрики, порождаемой нормой.

Замечания. 1 Конечномерное евклидово пространство всегда гильбертово.

2. Пространство $C[a, b]$ не является гильбертовым. Построение гильбертова пространства, ~~содержащего~~ состоящего из функций на $[a, b]$ и содержащего $C[a, b]$ в качестве плотного подмножества — важнейший стимул для развития теории интеграла Лебега.

Предложение 1 Если W - замкнутое подпространство сепарабельного гильбертова пространства H то любой вектор x имеет ортогональную проекцию на W.

Док-во. Подпространство сепарабельного пр-ва сепарабельно, поэтому W имеет гильбертов базис $\{e_i\}$. Для каждого вектора $x \in H$ определим его проекцию на W обычной формулой $пр_W x = \sum (x e_i) e_i$. Этот ряд сходится в силу леммы 2 и нер-ва Бесселя. Ясно, что вектор $x - \Pi p_W x$ ортогонален всем e_i. Т.к. $\{e_i\}$ базис, то он ортогонален всем векторам из W ■

Теорема 3' ~~Пусть~~ W замкнутое подпространство сепараб. гильбертова пр-ва H, тогда $W^\perp$ замкнуто и $H = W \oplus W^\perp$

Это утверждение выводится из предложения 1 обычным образом

Теорема 4' Каждое ~~Все~~ сепарабельное (бесконечномерное) гильбертово пространство изометрично l_2. В частности, все они изометричны

Док-во Выберем гильбертов базис $\{e_i\}$ в пр-ве H и определим отображение $\varphi : l_2 \to H$, полагая $\varphi(\{c_i\}) = \sum c_i e_i$. Этот ряд сходится по лемме 2 ~~критерию Коши~~. Ясно, что φ - вложение, оно наложение, т.к. $\{e_i\}$ базис H.

Замечание Из теоремы 4' вытекает, что если существует хоть одно бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, то пр-во l_2 полно. (Для тех кто знаком с конструкцией пополнения существование такого пр-ва очевидно) Прямое док-во полноты l_2 см. ниже.

Теорема 5' (Рисс) Пусть φ линейный непрерывный функционал на сепарабельном гильбертовом пр-ве. Найдется такой вектор a, что $\varphi(x) = (x, a)$ для всех x.

Док-во копирует 2е док-во конечномерного её варианта: ~~мы~~ выберем гильбертов базис $\{e_i\}$.

~~положим $a = \sum \varphi(e_i) e_i$ вектор a в виде $\sum_i c_i e_i$~~

Разложив произвольный вектор x по базису: $x = \sum x_i e_i$ и, используя непрерывность φ, получаем

$\varphi(\sum^{\infty} x_i e_i) = \sum x_i \varphi(e_i) = (x, a)$ где $a = \sum \overline{\varphi}(e_i) e_i$.

~~Ост~~ Нужно лишь доказать, что ряд, задающий вектор a, действительно сходится. Для этого мы покажем, что $\sum |\varphi(e_i)|^2 \leq \|\varphi\|^2$. Заметим, что этого и следовало ожидать, т.к. норма функционала $x \to (x, b)$ равна $|b|$. (~~[illegible]~~ В силу нер-ва К-Б ~~[illegible]~~ $\sup \frac{|(x,b)|}{|x|} \leq$
$\leq |b|$ причем правая часть ~~[illegible]~~ достигается при $x = b$)

Пусть φ_n - ограничение φ на конечномерное подпространство $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Ясно, что $\|\varphi_n\| \le \|\varphi\|$. Но $\varphi_n(x) = (x, a_n)$, где $a_n = \overline{\varphi(e_1)}e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)}e_n$, и предыдущее замечание показывает, что $\|\varphi_n\| = |a_n| = \sqrt{\sum^n |\varphi(e_i)|^2}$. Отсюда при всех n $\sum^N |\varphi(e_i)|^2 = \|\varphi_N\|^2 \le \|\varphi\|^2$. ■

Замечания о базисах. 1. Легко показать, что в несепарабельном ~~...~~ евклидовом пространстве гильбертов базис не может существовать. В таких пространствах ~~...~~ однако можно построить несчетные ортонормированные системы векторов, заменяющие базис.

2. Можно показать, что в гильбертовом пространстве не может ~~существовать счетный базис~~ как векторное пространство иметь счетный базис (используйте теорему Бэра.)

3. Если $\{e_i\}$ ортонормированная система в гильбертовом пространстве, причем любой вектор, ортогональный всем e_i — нулевой, то $\{e_i\}$ - гильбертов базис.

Доказать теоремы 3' и 5' для любых (не обязательно сепарабельных) гильбертовых пространств помогает

Предложение 2 ~~Лемма~~. Пусть K - непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства. Тогда функция "норма" достигает на K своего минимума, причем в единственной точке.

Док-во. Пусть $c = \inf\limits_{x\in K} |x|$ и $\{x_n\}$ - такая последовательность точек из K, что $|x_n| \to c$. Покажем, что она фундаментальна. Запишем тождество параллелограмма:

$$\left|\frac{x_m - x_n}{2}\right|^2 + \left|\frac{x_m + x_n}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(|x_m|^2 + |x_n|^2\right)$$

Его правая часть стремится к c^2 (при $m, n \to \infty$), левая же часть не меньше c^2 т.к. $\frac{x_m + x_n}{2} \in K$ и ~~следовательно~~ значит, $\left|\frac{x_m + x_n}{2}\right| \geq c$.

Следовательно, $\left|\frac{x_m - x_n}{2}\right| \to 0$. ■

3а) Из предложения 2 вытекает предложение 1 о существовании ортогональной проекции произвольного вектора a на замкнутое подпространство W. Действительно, возьмем в качестве K замкнутое выпуклое мн-во $a + W$. Если $a + w_0$ вектор наименьшей нормы, то w_0 - ближайший к a вектор из W, ~~а~~ являющийся, следовательно, проекцией a на W (евкл. пр-ва стр 4. лемма 2) ~~Про~~

$\mathrm{Re}(a,h) = 0$ ...

Теорема 3' вытекает теперь из предложения 1 (см. выше), а теорема 5' выводится из теоремы 3' (см. 3е (геометрическое))

Док-во теоремы Рисса в евкл. пр-вах стр 5.

~~В заключение докаж.~~

Теорема 6 ~~Про~~ Пространство l_2 полно.

Эта теорема является частным случаем общей теоремы Рисса - Фишера о полноте пространства $L^p(X, \mu)$ функций интегрируемых в p-й степени по Лебегу, относительно меры μ. В нашем случае

X ~~[зачёркнуто]~~ мн-во натуральных чисел, $p=2$, а мера μ ~~[зачёркнуто]~~ определяется на конечных подмножествах как число их элементов.

Док-во. Пусть $\xi_k^{(i)}$ фундаментальная последовательность в l_2. Ясно, что k-ые координаты элементов $\xi^{(i)}$ образуют ~~последов~~ фундаментальную числовую последовательность, сходящуюся к некоторому числу a_k. Мы покажем, что а) ряд $\sum |a_k|^2$ сходится, т.е. значит, последовательность $\{a_k\}$ определяет элемент $\xi \in l_2$.

б) Последовательность $\xi^{(i)}$ сходится к ξ в l_2.

Докажем а) Т.к. последовательность $\xi^{(i)}$ фундаментальна, она ограничена по норме, т.е. $|\xi^{(i)}| \leq M$ для всех i. Следовательно, для каждого n элемент евклидова пр-ва $\mathbb{C}^n$, ~~получающийся из элементов~~ составленный из первых n координат вектора $\xi^{(i)}$ по норме не превосходит M. Т.к. это верно для всех i и последовательность $\xi^{(i)}$ покоординатно сходится к ξ, то норма вектора $(a_1, \dots, a_n)$ составленного из первых n координат ~~[зачёркнуто]~~ ξ тоже не превосходит M. Итак ~~сумма~~ $\sum_1^n |a_i|^2 \leq M$ для всех n, т.е. ряд $\sum_1^\infty |a_i|^2$ сходится.

Докажем б) Выберем $\varepsilon > 0$. Начиная с некоторого номера ~~N~~ i_0 ~~элементы~~ векторы $\xi^{(i)}$ отстоят друг от друга не более чем на ε. ~~Вычеркнем в элементе $\xi^{(i_0)}$ Будем вычеркивать координаты, начиная с первой, пока (до тех пор) оставшиеся координаты не составляют $N+1, N+2$~~

Вычеркнем в элементе $\xi^{(i_0)}$ координаты с первой по N-ю так, чтобы "хвост" из ~~оставшихся~~ ~~коорд~~ $N+1$-й, $N+2$-й, ... координат ~~образовывал вектор~~ имел длину $\leq \varepsilon$.

~~Т.к.~~ "Хвосты" близких векторов близки, поэтому "хвосты" векторов с номерами $\geq i_0$ по длине не превосходят 2ε. Можно считать, что это же верно для "хвоста" предельного вектора ξ (увеличив число вычеркнутых координат). Итак расстояние между хвостами векторов $\xi^{(i)}$ и хвостом ξ не более 4ε. Теперь мы можем ограничиться первыми N координатами и перейти в пространство $\mathbb{C}^N$. Но в нем координатная сходимость влечет сходимость по норме, поэтому ~~начиная~~ с некоторого момента первые N координат вектора ξ и всех векторов ξ^i отстоят ~~друг от~~ не более чем на ε. С этого момента $|\xi - \xi^{(i)}| < 5\varepsilon$. ∎

Сочи, 354015,
ул. Красноармейская, д. 39 А,
кв. 6
Корепанову И.Г.

---

§ 2 Изометрии ~~унитарных пространств~~

Определение Линейное отображение $U: H_1 \to H_2$ евклидовых пр-в называется изометрией если для всех $x, y \in H_1$

$$(Ux, Uy)_2 = (x, y) \qquad (1)$$

Предложение 1 Для того, чтобы линейное преобразование U было изометрией необх. и дост. чтобы оно сохраняло норму: $|Ux| = |x|$

Действительно, изометрия сохраняет квадрат нормы, обратное утверждение вытекает из равенства: $(x,y) = \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$, выражающего скалярное произв. через нормы.

Примеры ① скалярный оператор $x \mapsto \lambda x$ - изометрия iff $|\lambda| = 1$

② Оператор отражения относительно гиперплоскости W в пространстве V (векторы из W остаются на месте а вектор $u \perp W$ переходит в $(-u)$)

③ ~~Оператор~~ Вращение плоскости $\mathbb{R}^2$, на угол φ, задаваемой матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

④ Комплексная диагональная матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ у которой $|\lambda_i| = 1$ определяет изометрию $\mathbb{C}^n$.

⑤ Оператор $(x_1, x_2, x_3 \ldots) \longrightarrow (0, x_1, x_2, \ldots)$ в l_2

Замечание 1 Т.к. изометрия сохраняет норму она является вложением. Следовательно, изометрия конечномерного пространства в себя - обратимый оператор. Пример ⑤ показывает, что в бесконечномерном случае это вообще говоря не так.

(е) Пусть X - пр-во с мерой μ, φ - измеримая функция на X, равная по модулю 1. Умножение на φ есть изометрия $L^2(X,\mu)$ в себя.

Замечание В случае, когда X — множество из n точек, $L^2(X,\mu)=\mathbb{C}^n$ и пример (е) переходит в (г)

(ж) Пусть $X=\mathbb{R}$, dx - мера Лебега; оператор "сдвига на 1", переводящий функцию $f(x)$ в функцию $x \mapsto f(x+1)$ есть изометрия $L^2(\mathbb{R}, dx)$ в себя.

(з) Более общим образом: пусть X-пр-во с мерой μ и $\varphi: X \to X$ отображение, сохраняющее меру (т.е. для $\forall$ измеримого A $\mu(\varphi(A))=\mu(A)$). ~~Отображение~~ Замена переменной при помощи φ т.е. отображение $L^2(X,\mu)$ в $L^2(X,\mu)$ переводящее функцию $f(x)$ в функцию $x \mapsto f(\varphi(x))$ - изометрия.

Пусть e_i базис в V. Изометричность оператора $U: V \to V$ равносильна выполнению $\forall\, i,j$ равенств

$$(Ue_i, Ue_j)=(e_i, e_j) \qquad (2)$$

Действительно, обе части (1) - билинейные формы на V, их равенство ~~равносильно~~ совпадению их значений на базисных векторах. ~~Пусть~~ Если базис $\{e_i\}$ ортонормированный, то условие (2) означает, что матрица u_{ij} оператора U удовлетворяет условию $(e_i, e_j) = (\sum u_{ik} e_k, \sum u_{jl} e_l) =$

$= \sum u_{ik} \overline{u_{je}} (e_k e_e) =$

$= \sum_k u_{ik} \overline{u}_{jk}$, ~~...~~ т.е. что столбцы матрицы U как элементы $\mathbb{C}^n$ ~~образуют~~ ортогональны и имеют единичную длину. Выведите отсюда такое

<u>Предложение 2</u> Всякая изометрия $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ есть либо ~~поворот~~ вращение (пример 5) либо композиция вращения и отражения относительно прямой (пример 6)

Пусть $U: V \to V$ изометрия, $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис в V. Ясно, что $Ue_1, \dots, Ue_n$ тоже ортонормированный базис. Обратно, пусть $f_1, \dots, f_n$ еще один ортонормированный базис в V, тогда линейное отображение U, переводящее e_i в f_i – изометрия. Это вытекает из равенства $(Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j)$. Говорят, что на множестве ортонормированных базисов изометрии действуют транзитивно (т.е. любые 2 базиса переводятся один в другой изометрией) Верна также

<u>Лемма 1</u> На мн-ве k-мерных подпр-в изометрии действуют транзитивно.

Действительно, в двух k-мерных подпр-вах можно выбрать ортонормированные базисы, дополнить их до ортонормированных базисов во всем пространстве и перевести один в другой.

Рассмотрим два вектора $x, y \in V$. Существует ли изометрия, переводящая x в y? Очевидным препятствием является сохранение длин при изометрии. Оказывается, что это единственное препятствие:

<u>Лемма 2</u> Изометрии транзитивно действуют на сфере $S_r = \{x \in V \mid |x| = r\}$.

Действительно, ~~нужно~~ $|x| = |y|$. ~~Пере~~ Переведем прямые, содержащие x и y друг в друга (лемма 1). Умножая на ~~...~~ число, равное по модулю 1, можно добиться, чтобы x перешел в y. (4)

Пусть теперь даны 2 пары векторов x_1, x_2 и y_1, y_2. Существует ли изометрия, переводящая x_1 в y_1

Здесь появляется новое препятствие: скалярное произведение (x_1, x_2) должно сохраняться. Этого уже достаточно, что соответствует "школьному" признаку конгруэнтности треугольников "по двум сторонам и углу между ними":

~~...~~ Если тройка числа $(x_1, x_1), (x_1 x_2), (x_2 x_2)$ и $(y_1 y_1), (y_1 y_2), (y_2 y_2)$ совпадают, то найдется изометрия, переводящая x_1 в y_1 и x_2 в y_2. Обобщим это утверждение ~~...~~ на случай n векторов $x_1, \ldots, x_n$. ~~Матрица~~ Симметрическая матрица

$$\begin{pmatrix} (x_1 x_1) & (x_1 x_2) & \ldots \\ & & \\ (x_n x_1) & & (x_n x_n) \end{pmatrix}$$

называется матрицей Грама скалярных произведений.

Теорема Грама

~~Теорема~~ ~~Пусть~~ Если системы векторов $x_1 \ldots x_n$ и $y_1 \ldots y_n$ имеют равные матрицы Грама то существует изометрия, переводящая x_i в y_i.

(4a)

~~Док-во Выберем максимальную независимую систему векторов среди X~~

Док-во

Очевидно, можно считать, что $\dim\langle x_1 \dots x_n\rangle \geqslant \dim\langle y_1 \dots y_n\rangle$ и что векторы $x_1, \dots, x_k$ независимы, а $x_{k+1}, \dots, x_n$ через них выражаются. Отображение $U: \langle x_1 \dots x_n\rangle \to \langle y_1, \dots, y_n\rangle$, переводящее x_1 в $y_1, \dots$ x_k в y_k есть изометрия т.к. $(Ux_i, Ux_j) = (x_i\, x_j)$ при $i, j \leq k$. Но $\dim\langle x_1 \dots x_n\rangle \geqslant \dim\langle y_1 \dots y_n\rangle$ и U - вложение, следовательно U - изоморфизм. Покажем, что $Ux_j = y_j$ $\forall$ при $j > k$. В самом деле Скалярные произведения векторов Ux_j и y_j с каждым из векторов $y_1 \dots y_k$ совпадают. Следовательно, вектор $Ux_j - y_j$ ортогонален базису $y_1,\dots,y_k$ и поэтому равен 0. Остается продолжить U до изометрии всего пространства. Для этого достаточно выбрать ортонормированные базисы в ортогональных дополнениях соответственно к $\langle x_1 \dots x_n \rangle$ и к $\langle y_1 \dots y_n \rangle$ ~~соответственно~~ и перевести ~~их друг в друга~~ один в другой. ■

Докажите индукцией по числу векторов, что верно

Предложение 3 Определитель матрицы грамма (определитель грамма) равен квадрату объема параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1 \dots x_n$.

Следствие 1 Определитель грамма всегда неотрицателен ~~положителен~~.

(объем параллелепипеда определяется индуктивно, как произведение объема его основания на высоту)

Пусть $A: V \to V$ линейный оператор, имеющий в базисе $e_1 \dots e_n$ матрицу $\|a_{ij}\|$. Сравним объемы параллелепипеда натянутого на $e_1, \dots e_n$ и его образа — параллелепипеда, натянутого на $Ae_1, \dots, Ae_n$.

Пусть $\Gamma(e_1 \dots e_n)$ - матрица грамма векторов $e_1, \dots e_n$. Равенство $(Ae_i, Ae_j) = (\sum a_{ik} e_k, \sum a_{jl} e_l) =$

$$= \sum_{k,l} a_{ik} (e_k e_l) \overline{a_{jl}}$$

показывает, что

$$\Gamma(Ae_1, \dots, Ae_n) = a \cdot \Gamma(e_1 \dots e_n) \cdot \overline{a}^T \text{ и } \det\Gamma(e_1 \dots e_n) = |\det A|^2 \cdot \det\Gamma(e_1 \dots e_n)$$

Т.е. объем параллелепипеда изменяется под действием оператора A в $|\det A|$ раз. (3)

Итак модуль определителя оператора имеет геометрический смысл коэффициента изменения объема. Т.к. при ортогональных преобразованиях объем не меняется, то мы получаем

Следствие 2 Если U изометрия то $|\det U| = 1$.

В частности, в вещественном случае определитель равен ± 1.

§ 3 [illegible] **Спектральная теория** [illegible]

Пусть V нормированное пространство. Пр-во V' всех непрерывных линейных функционалов называется сопряженным к V. (Если V конечномерно то $\forall$ ф-л непрерывен и норма [illegible]) Это тоже нормированное пространство (напомним, что для $f \in V'$ норма определяется как $|f| = \sup\limits_{x\in V} \frac{|f(x)|}{|x|}$).

Каждому подпр-ву $W \subset V$ соответствует подпр-во $W^{\perp} \subset V'$ всех функционалов, равных 0 на W. Если V конечномерно, то каждому базису e_i в V соответствует двойственный базис e_i' в V'. Функционал e_k' определяется условием

$$e_k'(e_i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

Каждому непрерывному линейному оператору $A : V_1 \to V_2$ отвечает сопряженный оператор $A' : V_1' \leftarrow V_2'$, определяемый равенством $(A'f)(x) = f(Ax)$. Он тоже непрерывен т.к.

$$\underset{x}{|A'f|} = \sup \frac{|A'f(x)|}{|x|} = \sup \frac{|f(Ax)|}{|x|} \leq \sup \frac{|f|\cdot|Ax|}{|x|} \leq |A|\,|f|.$$

Мы получим, что $\|A'\| \leq \|A\|$. В конечномерном случае, если a - матрица оператора $A : V \to V$ в базисе e_i то оператор A' имеет в двойственном базисе матрицу a^T. Ясно также, что если подпр-во W инвариантно относительно A, то подпр-во $W^{\perp} \subset V'$ инвариантно относительно A'.

Пусть теперь V ~~[illegible]~~ гильбертово пр-во. Теорема Рисса устанавливает изометрическое взаимнооднозначное соответствие $\Phi : V \to V'$, сопоставляющее вектору a функционал $\Phi_a : x \mapsto (x, a)$. Если $A : V \to V$ непрерывный оператор, то при помощи этого соответствия сопряженный оператор $A' : V' \to V'$ можно "перенести" на V т.е. рассмотреть композицию $V \xrightarrow{\Phi} V^* \xrightarrow{A^*} V^* \xrightarrow{\Phi^{-1}} V$. Заметим, что хотя в комплексном случае отображение Φ не линейно, вся композиция целиком — уже линейный оператор, называемый гильбертовым сопряженным к V и обозначается A^*. Т.о. имеем коммутативную диаграмму. Двигаясь из левого верхнего угла двумя путями мы получаем $\forall x, y \in V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A^*"] \arrow[d, "\Phi"'] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ V^* \arrow[r, "A'"] & V' \end{tikzcd}$$

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \qquad (1)$$

Это равенство можно принять за определение A^*, однако тогда нужно доказывать его существование. ~~Если~~ e_i — ортонормированный базис в V отображение Φ переводит ~~[illegible]~~ в сопряженный к нему базис в V^*. Отсюда нетрудно получить, что матрица a^* оператора A^* в ортонормированном базисе получается из матрицы a оператора A по правилу

$$a^* = \bar{a}^T \qquad (2)$$

Лемма 1. Если U обратимая изометрия, то $U^* = U^{-1}$.

Действительно, имеем $(x, U^{-1}y) = (Ux, UU^{-1}y) = (Ux, y)$. Сравнивая с (1) находим $U^* = U^{-1}$.

Из равенства 2 вытекает

Лемма 2. $\det(A^*) = \overline{\det A}$

Из лемм 1 и 2 получаем уже известное нам

Следствие. Определитель изометрии равен по модулю 1.

Определение. Непрерывный оператор $A: V \to V$ называется эрмитовым если $A = A^*$ и антиэрмитовым (или косоэрмитовым) если $A^* = -A$.

В ортонормированном базисе матрица эрмитова оператора удовлетворяет условию $\bar{a}^T = a$ (в вещественном случае это значит просто, что a симметрична).

Примеры 1. Оператор в $\mathbb{R}^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ косоэрмитов

2. Диагональный оператор в $\mathbb{C}^n$ с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ эрмитов iff все λ_i вещественные и косоэрмитов если λ_i мнимые.

3. Оператор в $L^2(X, \mu)$ умножения на функцию φ эрмитов если φ принимает вещественные значения и косоэрмитов, если

φ принимает минимые значения · пример 3 когда X - конечное мн-во

Замечание Пример 2 - частный случай примера на отрезке $[a, b]$

4. В пространстве многочленов ~~на~~, ~~обращающихся в~~ ~~в концах~~ a и b со скалярным произведением $(P, Q) = \int_a^b P(t)\overline{Q(t)}\,dt$ оператор $\frac{d}{dt}$ не эрмитов и не косоэрмитов. ~~косоэрмитов~~

~~7~~ (Пространство Фока) Определим на пространстве многочленов от ~~двух~~ комплексного переменного z скалярное произведение

$$(P, Q) = \int_{\mathbb{R}^2} P(x,y)\,\overline{Q(x,y)}\,e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Оператор умножения на z имеет своим сопряженным $\frac{d}{dz}$

6. (Оператор Лиувилля) В том же пространстве оператор $-\frac{d^2}{dt^2} + q(t)$ (где $q(t)$ - вещественный тригонометр. многочлен) эрмитов

5. В пространстве тригонометрических многочленов ~~[illegible]~~ $\sum a_k e^{ikt}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ со скалярным произведением $\int_0^{2\pi} P(t)\overline{Q(t)}$ оператор $\frac{d}{dt}$ косоэрмитов.

8. (Интегральный оператор) в пространстве $C_{\mathbb{C}}[a, b]$ заданный формулой ~~$A\varphi$~~ ~~$\to A\varphi$~~ $A\varphi(t) = \int_a^b K(t, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$, где K - фиксированная непрерывная ф-я на $[a, b] \times [a, b]$ эрмитов iff $K(\xi, t) = \overline{K(t, \xi)}$

~~Теорема Пусть A^* ...~~

Замечание. В комплексном случае оператор A эрмитов iff оператор iA косоэрмитов. В вещественном случае прямой связи между эрмитовостью и косоэрмитовостью нет (ср. пример 2)

Пусть V ~~вложено~~ гильбертово пр-во. Отображение, сопоставляющее оператору A эрмитову форму $x, y \mapsto (Ax, y)$, устанавливает изоморфизм пр-ва непрерывных операторов в V ~~на~~ на пр-ва непрерывных (на $V \times V$) эрмитовых форм. В самом деле, ~~это~~ это отображение — вложение. Если конечномерно, то из соображений размерности следует, что оно является изоморфизмом (всякая форма непрерывна). Покажем, что и в бесконечномерном случае это отображение "на". Пусть B непрерывная эрмитова форма. ~~Так же как и для линейных операторов из непрерывности B следует её ограниченность, т.е. существования такой константы C, что $|B(x, y)| \leq C|x||y|$.~~

тогда при каждом x отображение $y \mapsto \overline{B(x, y)}$ есть непрерывный линейный функционал. По теореме Рисса он имеет вид $y \mapsto (y, a_x)$ где a_x некоторый вектор из V. Т.о. $B(x, y) = \overline{(y\, a_x)} = (a_x, y)$. Ясно, что соответствие $x \mapsto a_x$ линейно. Осталось показать, что определенный т.о. оператор A непрерывен. Для этого заметим, что так же как и для линейных операторов из непрерывности B следует её ограниченность, т.е. существование такой константы C, что $|B(x,y)| \le C|x||y|$. Отсюда $|(Ax,y)| \le C|x||y|$

~~[illegible]~~ Рассуждение завершает

Лемма Для всякого оператора A верно рав-во $\|A\| = \sup \frac{|(Ax,y)|}{|x||y|}$

Док-во. Ясно, что правая часть не превосходит $\|A\|$. Пусть последовательность $\frac{|Ax_n|}{|x_n|}$ сходится к $\|A\|$. Полагая $y_n = Ax_n$, получим $\frac{|(Ax_n, y_n)|}{|x_n||y_n|} \to \|A\|$, т.о. правая часть достигает значения $\|A\|$ ■

Замечание Число $\sup \frac{|B(x,y)|}{|x||y|}$ можно назвать нормой эрмитовой формы B. Лемма т.о. утверждает, что соответствие между операторами и формами сохраняет норму.

Легко видеть, что форма, соответствующая оператору A симметрична iff ~~[illegible]~~ A - эрмитов (поэтому эрмитовы операторы называют также симметрическими) и кососимметрична (т.е. $B(y,x) = -\overline{B(x,y)}$) iff A - косоэрмитов.

>

Теорема 1 Пусть оператор $A: V \to V$ эрмитов, косоэрмитов или унитарен. Если подпространство W инвариантно относительно A, то его ортогональное дополнение $W^\perp$ также инвариантно относительно A.

Док-во. Пусть $x \in W^{\perp}$. Если A эрмитов или косоэрмитов то $\forall y \in W$ $(Ax, y) = \pm(x, Ay) = 0$ т.к. $Ay \in W$. Если A унитарен, то $0 = (x, W) = (Ax, AW)$. Остается заметить, что $AW = W$.

<u>Замечание</u> Утверждение теоремы вытекает из более общего факта: если W инвариантно относительно A то $W^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Этот факт нетрудно вывести из инвариантности аннулятора W в V' относительно A'.

<u>Спектральная теорема 2</u> (комплексный случай) Пусть V - конечномерное комплексное евклидово пр-во, A - эрмитов, косоэрмитов или унитарный оператор в V. Тогда существует ортонормированный базис V из собственных векторов A. Собственные значения A вещественны в эрмитовом, мнимы - в косоэрмитовом и равны по модулю 1 - в унитарном случаях.

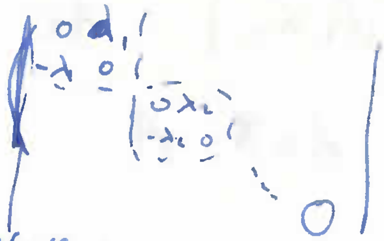
<u>Следствие</u> В комплексном случае эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы диагонализируемы.

Док-во теоремы проведем индукцией по $\dim V$. Пусть W - одномерное подпространство натянутое на собственный вектор e_1 оператора A. Тогда W, а стало быть и $W^{\perp}$ - инвариантны относительно A. Т.к. $\dim W^{\perp} < \dim V$, то в $W^{\perp}$ существует по предположению индукции ортонормированный собственный базис $e_2, \dots, e_n$. Если нормировать вектор e_1, то базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ - искомый. ∎

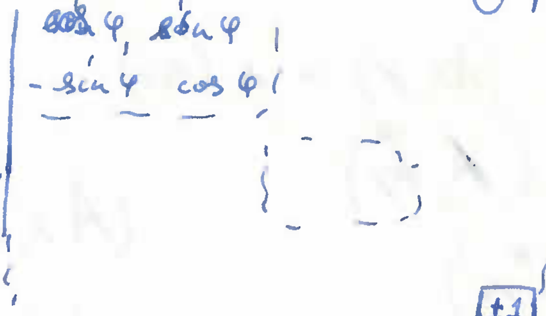
Спектральная теорема 3 (вещественный случай) Пусть V конечномерное евклидово пр-во, A оператор в V. Существует ортонормированный базис в котором матрица A

а) диагональна если A эрмитов

б) блочно диагональна если A косоэрмитов



в) блочно диагональна вида (если $\dim V$ нечетно то последний блок состоит из ± 1) если A ортогонален.



блоки $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}$

Док-во. Оператор A имеет одномерное или двумерное инвариантное подпр-во W, ортогональное дополнение $W^\perp$ которого тоже инвариантно. Повторяя рассуждение с заменой V на $W^\perp$, получаем ~~что матрица A блочно-диагональна и состоит из 2×2 и 1×1 блоков.~~

~~а) Одномерному блоку уже отвечает собственный вектор.~~

Симметрич. что V распадается в прямую сумму инвариантных одномерных и двумерных подпр-в.

а) A — эрмитов. Одномерное подпространство порождается собственным вектором, который можно нормировать. Покажем что и двумерное подпр-во содержит 2 ортогональных собственных вектора. Выберем в 2-мерном подпр-ве ортогональный базис. Матрица A имеет вид $\begin{pmatrix}a & b \\ b & c\end{pmatrix}$. Её собственные значения — корни квадратного ур-ия

$$0=(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2, \text{ т.е. } \lambda_{1,2}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}.$$

Видно, что $\lambda_{1,2}$ всегда вещественны (т.е. собственные векторы действительно есть) причем (если $b\neq 0$) они различны. (при $b=0$ матрица уже диагональна.) Осталось доказать, что собственные векторы соответствующие λ_1 и λ_2 ортогональны. Справедливо

~~Лемма. Пусть x, y собственные векторы эрмитова или унитарного оператора A (в комплексном или вещественном пространстве)~~ с различными собственными значениями ортогональны.

Если A эрмитов, то собственные

Предложение 2 ~~собственные векторы, ... собств~~

а) Собственные значения эрмитова оператора вещественны, а у унитарного — равны по модулю 1. б) Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям эрмитова или унитарного оператора ортогональны.

Док-во. а) Пусть $Ax = \lambda x$. Если A эрмитов, то равенство

$\lambda(x,x) = (Ax,x) = (x\ Ax) = \bar{\lambda}(x,x)$ показывает, что λ - вещественно. Если A - унитарен то $|x| = |Ax| = |\lambda||x|$, поэтому $|\lambda| = 1$.

б) Пусть теперь $Ay = \mu y$ и $\mu \neq \lambda$. Если A эрмитов, то

$\lambda(x,y) = (Ax,y) = (x\ Ay) = \bar{\mu}(x,y) = \mu(x,y)$ т.к. $\mu = \bar{\mu}$.

Отсюда $(\lambda-\mu)(x,y) = 0$ т.е. x и y ортогональны. Если A унитарен, то ~~$\lambda(x,y)$~~ $(x,y) = (Ax,Ay) = \lambda\bar{\mu}(x,y)$. ~~Но ...~~

т.е. $(1-\lambda\bar{\mu})(x,y) = 0$. Но $\bar{\mu} = \mu^{-1}$ и т.к. $\lambda\mu^{-1} \neq 1$ то x и y ортогональны.

Продолжение док-ва теоремы. б) A - кососэрмитов. ~~Т.к.~~ всякий кососэрмитов оператор в одномерном пр-ве - нулевой, а в двумерном подпр-ве в любом ортогональном базисе имеет кососимметричную матрицу

$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ то все доказано.

б) A - ортогонален. Ортогональный оператор в одномерном пр-ве равен ± 1, а в двумерном в силу леммы имеет указанные матрицы. Остается заметить, что две 1 или -1 можно объединить в один блок $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ с φ равным 0 или π. ▨

Для эрмитовых операторов спектральную теорему вещественный случай ~~в вещественном случае~~ можно свести к комплексному при помощи приема комплексификации. Легко видеть, что комплексификация эрмитова оператора A в вещественном пр-ве V есть эрмитовый оператор в пр-ве $V_{\mathbb{C}}$. Пусть $z_j = x_j + i y_j$ - его собственный базис: $A x_j + i A y_j = \lambda_j (x_j + i y_j)$ (предложение 2а). Т.к. λ_j вещественны, то все x_j и y_j - собственные векторы оператора A. С другой стороны в силу предложения 2 б) достаточно доказать, что A диагонализируем. Но это вытекает из того, что семейство $\{x_j, y_j\}$ его собственных векторов порождает все пространство V.

~~Следующий способ доказательства спектральной теоремы для эрмитовых операторов применим как в вещественном так и в комплексном случае: он имеет и другие приложения.~~

Из спектральной теоремы вытекает

Теорема 4 (о каноническом виде эрмитовой (симметрической) формы.)

Всякая эрмитова (симметричная) форма B имеет ортогональный базис т.е. такой базис $e_1,\dots,e_n$, что при $i \neq j$

$B(e_i, e_j) = 0.$

Док-во. Рассмотрим на пространстве V какое-нибудь скалярное произведение (см). Тогда форма B отвечает некоторому эрмитову оператору: $B(x,y) = (Ax, y)$. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — ортонормированный собственный базис оператора A, $B(e_i, e_j) = (Ae_i, e_j) = (\lambda_i e_i, e_j) = \lambda_i (e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Замечание. Вообще говоря базис нельзя сделать нормированным относительно формы B т.е. потребовать, чтобы $B(e_i, e_i) = 1$. Действительно, $B(e_i, e_i) = (Ae_i, e_i) = \lambda_i$, и собственное значение λ_i может быть равно 0, и никакой нормировкой вектора e_i нельзя добиться чтобы $B(e_i, e_i) = 1$. Если же $\lambda_i \neq 0$ то нормируя e_i можно получить $B(e_i, e_i) = \pm 1$. Как мы увидим позже знака "−" избежать нельзя.

~~Пример (Гауссовы интегралы). Хорошо известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}$. Обобщением этого интеграла на многомерный случай являются гауссовы интегралы~~

В вещественном случае форма, соответствующая оператору A антисимметрична (билинейная) iff оператор A косоэрмитов. Из спектральной теоремы для косоэрмитовых операторов аналогично выводится

Теорема 5. Пусть B антисимметрическая форма в пр-ве V. Существует такой базис $e_1,\dots,e_k, f_1,\dots,f_k, u_1,\dots,u_r$ в пр-ве V, что

$B(e_i, f_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad B(x, u_i) = 0 \ \forall x \in V.$

Замечание. Эта теорема справедлива и для комплексных антисимметрических форм, однако доказывается это по-другому.

Приведём ещё один способ доказательства спектральной теоремы для эрмитовых операторов пригодный как в комплексном, так и в вещественном случаях:

~~Предложение. Пусть A эрмитовый оператор в (возможно бесконечномерном) евклидовом пр-ве V. Тогда $\|A\| = \sup_{|x|=1} |(Ax, x)|$.~~

~~Док-во. Во-первых, если $|x| = 1$ то для всякого оператора $|(Ax, x)| \le |Ax||x| \le \|A\|$.~~

Этот способ не опирается на теорему о существовании собственных векторов, а наоборот доказывает её заново для эрмитовых операторов. В некоторых случаях он применим даже в бесконечномерной ситуации.

Предложение 3. Пусть A эрмитовый ограниченный оператор в (возможно бесконечномерном) евклидовом пр-ве V. Тогда функция $\phi: x \to (Ax, x)$ ограничена на единичной сфере. Если она достигает максимума в точке e, то e — собственный вектор A с вещественным собств. значением.

Док-во. Из неравенства $|(Ax, x)| \le |Ax||x| \le \|A\||x|^2$ следует ограниченность. Производная функции в точке её максимума равна 0 поэтому $\phi'(e) = 0$.

Вычислим производную $\phi'(x) = \dfrac{(x,x)(Ax, x)' - (Ax, x)(x, x)'}{(x, x)^2}$

При вычислении производной мы рассматриваем пр-во V как вещественное, потому формы (Ax, x) и (x, x) превращаются в билинейные и производные в чём-то легко вычисляются. Окончательно получаем $\phi'(e)h =$

$$= \frac{(Ae, h) + (Ah, e)}{(ee)} - \frac{(Ae, e)[(he) + (eh)]}{(ee)^2}$$

Пусть h единичный вектор, ортогональный e. ~~Тогда~~ Кривая $\gamma: t \mapsto e\cos t + h\sin t$ лежит на единичной сфере (её образ есть окружность — пересечение единичной сферы с плоскостью порожденной e и h). Т.к. $\gamma(0)=e$ то функция $\Phi(\gamma(t))$ достигает максимума при $t=0$. Следовательно её производная в этой точке равна 0. По теореме о сложной функции $\Phi'(e)\circ\gamma'(0)=0$. Но $\gamma'(0)=h$, а производная функции Φ легко вычисляется: $\Phi'(e): x \mapsto (Ae,x)+(Ax,e)$. Используя эрмитовость A имеем $(Ax,e)=(Ae,x)$ т.е. $\Phi'(e)h = 2(Ae,h)$. Итак для всякого h, ортогонального e выполняется $(Ae,h)=0$. Т.е. Ae ортогонален всем векторам, ортогональным e; значит Ae пропорционален e. ∎

Спектральная теорема выводится теперь из существования одномерного инвариантного подпр-ва и теоремы 1 индукцией по размерности.

<u>Замечание</u> Зная спектральную теорему, можно дать простую интерпретацию предложения : при условии $x_1^2+\dots+x_n^2=1$ функция $\lambda_1 x_1^2+\dots+\lambda_n x_n^2$ достигает максимума равного $\lambda_k = \max_i\{\lambda_i\}$ в точке $x_i=0$ при $i\neq k$ и $x_k=1$.
Из спектральной теоремы легко вывести также

<u>Предложение 4</u> Если оператор A эрмитов то $\|A\| = \sup_{|x|=1}|(Ax,x)|$

~~В гильбертовом пространстве~~

~~$A \mapsto (A\cdot,\cdot)$ устанавливает изоморфизм~~

~~Определение~~ Пусть V евклидово пр-во. Числовая функция на $V\times V$ называется ... если она линейна по первому аргу-

Замечание. В бесконечномерном гильбертовом пространстве эта теорема не верна. Действительно, оператор в $L^2([0,1], dx)$ умножения на функцию $\varphi(t)=t$ эрмитов и не имеет вообще ни одного ненулевого собственного вектора, т.к. такой вектор есть функция $f\in L^2[0,1]$, удовлетворяющая ур-нию $(t-\lambda)\cdot f(t)\equiv 0$. Отсюда при всех t кроме $t=\lambda$ следует $f(t)=0$ и значит $f=0$. Этот пример подсказывает правильное обобщение спектральной теоремы на бесконечномерный случай. Сначала переформулируем конечномерную теорему в других терминах. Назовем операторы $A_1: V_1\to V_1$ и $A_2: V_2\to V_2$ унитарно эквивалентными, если существует изометрический изоморфизм $U: V_1\to V_2$ делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{A_1} & V_1 \\ U\downarrow & & \downarrow U \\ V_2 & \xrightarrow{A_2} & V_2 \end{array}$$

Ясно, что теорема 1 равносильна утверждению: Каждый эрмитов (косоэрмитов, ...) оператор унитарно эквивалентен диагональному оператору примера 2. [Заметим теперь, что как пример 2 так и разобранный выше пример оператора умножения на t в $L^2([0,1], dt)$ — оба частные случаи примера 3 (в случае примера 2 X — состоит из n точек). Правильное бесконечномерное обобщение теоремы 1 таково:

Бесконечномерная ~~Общая~~ спектральная теорема. Каждый непрерывный компактный, эрмитов, косоэрмитов или унитарный оператор A в гильбертовом пространстве H унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию; более точно, найдется такое мн-во X с мерой μ и такая ограниченная измеримая функция φ на X, что оператор A и оператор умножения на φ в $L^2(X,\mu)$ унитарно эквивалентны.

Замечание. Здесь существенно, что H - полно.

Эта теорема достаточно сложна: например, непонятно как, зная оператор, получить мн-во X с мерой. Естественное доказательство теоремы было получено на основе созданной И. М. Гельфандом теории банаховых алгебр.

Пример. В $L^2(S^1, d\varphi)$ оператор U_α поворота на угол α, переводящий функцию f в функцию $(U_\alpha f)(t) = f(t+\alpha)$, унитарен. Следовательно он унитарно эквивалентен оператору умножения. Оператор, осуществляющий унитарную эквивалентность можно указать явно. Заметим что функции $e_k = e^{ikt}$ - собственные ф-ии оператора U_α (т.к $e^{ik(t+\alpha)} = e^{ik\alpha} \cdot e^{ikt}$). Т.к. $\{e_k\}$ ортонормированный базис в $L^2(S^1, d\varphi)$ то отображение

(см. на обороте.)

Напомним, что коммутирующее семейство диагонализируемых операторов можно ~~...~~ одновременно привести к диагональному виду. Мы хотим обобщить спектральную теорему в этом же направлении.

Пусть A - комплексная алгебра (т.е. кольцо, одновременно являющееся комплексным векторным пространством)

Определение ~~...~~ Отображение $x \mapsto x^*$ алгебры A в себя называется инволюцией если:

а) оно антилинейно

б) $(x^*)^* = x \quad \forall x \in A$

в) $(xy)^* = y^* x^*$

Примеры ① Комплексные числа с инволюцией $z^* = \bar{z}$.

② Алгебра непрерывных комплексных функций на компакте ~~пространстве~~ ~~компакте~~ X с инволюцией $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x)}$

③ Алгебра ~~непрерывных функций~~ $C_{\mathbb{C}}[-1, 1]$ с инволюцией $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$

Элемент x алгебры с инволюцией называется эрмитовым если $x^* = x$. Эрмитовы элементы образуют вещественное подпр-во.

Предложение 5 а) Каждый элемент a представляется в виде $a = x+iy$, где x и y - эрмитовы

б) Для всякого a элементы aa^* и a^*a эрмитовы.

Док-во а) Легко видеть, что элементы $x = a+a^*$ и $y = -i(a-a^*)$ эрмитовы

б) имеем $(aa^*)^* = (a^*)^* a^* = aa^*$.

Имеет место замечательное

Предложение 6 Операция сопряжения ~~превращает~~ – инволюция в алгебре непрерывных линейных операторов, ~~в алгебру с инволюцией~~ удовлетворяющая условию $\|A^*\| = \|A\|$

~~Док-во. Нужно показать что $(AB)^* = B^*A^*$ и, что $(A^*)^* = A$. Первое~~ Из равенств $(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y)$, следует,

Док-во: что $(AB)^* = B^*A^*$. Формула (1) показывает, что A есть сопряженный к A^* т.е. $(A^*)^* = A$. Остальные свойства инволюции очевидны.

Равенство ~~Докажем, что~~ $\|A^*\| = \|A\|$. вытекает из формулы ~~Заметим, что~~ $\|A\| = \sup\limits_{x,y} \frac{|(Ax,y)|}{|x||y|}$ (лемма ~~правая часть~~ ~~не превосходит $\|A\|$; если последовательность x_n $\frac{|Ax_n|}{|x_n|} \to \|A\|$, то полагая $y_n = Ax_n$ получим $\frac{|(Ax_n, y_n)|}{|x_n||y_n|} \to \|A\|$~~) правая часть которой не изменится если заменить A на A^* и поменять x и y местами. ∎

Следствие Если оператор A обратим, то и A^* обратим причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Замечание свойство $\|a^*\| = |a|$ верно и для инволюций в примерах 1, 2.

~~Теорема~~ Теорема Коммутативная подалгебра алгебры операторов в комплексном евклидовом пространстве, устойчивая относительно инволюции (т.е. содержащая вместе с каждым оператором A также и A^*) диагонализируема

Назовем ~~подалгебру алгебры~~ семейство операторов инволютивным если оно устойчиво относительно инволюции (т.е. вместе с каждым оператором A содержит и A^*); назовем ~~подалгебру~~ семейство диагонализируемым если существует ~~ортонормированный~~ базис в котором все операторы ~~из подалгебры~~ диагональны.

Спектральная теорема 7 (для ~~алгебр~~ семейств.) Инволютивное ~~подалгебра~~ семейство ~~алгебры~~ операторов (в конечномерном комплексном евклидовом пространстве) диагонализируемо iff оно коммутативно.

Док-во. Ясно что ~~диагонализируемая подалгебра коммутативна~~. Пусть S – коммутативная подалгебра. ~~Все операторы из S~~ имеют общий собственный вектор e_1, т.е. одномерное подпр-во векторов ортогональных e_1 тоже инвариантно относительно

Док-во. Ясно, что диагонализуемое семейство коммутативно. Обратно, пусть S коммутативное инволютивное ~~подалгебра~~. Операторы из S коммутируют, и поэтому имеют общий собственный вектор e_1. Порожденное им подпр-во W инвариантно относительно S, поэтому и $W^\perp$ тоже инвариантно. В самом деле, пусть $A \in S$, тогда W инвариантно относительно $A^* \in S$, следовательно A, будучи сопряженным к A^*, переводит $W^\perp$ в себя (замечание к теореме 1).

Определение Оператор A называется нормальным, если он коммутирует с A^*.

~~Рассмотрим коммутативное семейство $S = \{A, A^*\}$ где~~ A нормальный оператор, получаем такое

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Следствие 1 Нормальный оператор приводится в некотором ортонормированном базисе к диагональному виду.

Легко видеть, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы – нормальны, поэтому спектральная теорема .. вытекает из следствия 1.

Следствие 2. Если подпространство W инвариантно относительно нормального оператора A то и $W^\perp$ тоже инвариантно относительно A.

Замечание Спектральная теорема для семейств тоже обобщается на бесконечномерный случай: инволютивное коммутативное семейство ограниченных операторов в гильбертовом пр-ве унитарно эквивалентно семейству операторов умножения на функции.

Пример ~~Рассмотрим~~ В $L^2(S^1, dx)$ коммутирующее семейство унитарных операторов сдвига U_α ~~$(U_\alpha f)(x) = f(x+\alpha)$~~ $\boxed{\text{Оно должно}}$ унитарно эквивалентно семейству операторов умножения. Оператор, осуществляющий унитарную эквивалентность – это ~~...~~ преобразование Фурье.