ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(I курс, I семестр, I980-I98I уч.г.)

I. Язык теории множеств. Множества, функции, отношения.

2. Мощность множеств. Теоремы Кантора-Бернштейна и Кантора. Счетные и несчетные множества.

3. Вещественные числа. Аксиомы и следствия из них. Принцип Архимеда. Теорема о вложенных отрезках.

4. Комплексные числа. Теорема единственности. Геометрическая реализация.

5. Метрические пространства. Примеры и основные конструкции. Расширенная вещественная прямая.

6. Основные понятия теории метрических пространств. Шары, сферы, диаметр, ограниченность. Открытые и замкнутые множества, окрестности, замыкание и внутренность. Точки прикосновения и предельные точки.

7. Непрерывные отображения. Различные определения. Теорема о композиции. Равномерная непрерывность. Гомеоморфизм. Эквивалентные расстояния.

8. Предел отображения по подпространству. Предел последовательности. Предельные точки последовательности.

9. Последовательности Коши. Полные пространства. Геометрическое определение полноты. Примеры.

IO. Полнота пространства ограниченных функций. Теорема о пополнении.

II. Предкомпактные пространства. Геометрическое определение. Основные свойства.

I2. Компактные пространства. Основные свойства. Эквивалентность трех определений.

I3. Последовательность точек на компакте сходится тогда и только тогда, когда она имеет единственную предельную точку. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Их свойства. Критерий сходимости числовой последовательности (совпадение верхнего и нижнего пределов).

I4. Теорема о непрерывном образе компакта. Следствия. Теорема Вейерштрасса. Применения: неравенство Коши; основная теорема алгебры.

I5. Непрерывность алгебраических операций.

I6. Связные пространства. Связные подпространства $\mathbb{R}$. Теорема о непрерывном образе связного пространства. Теорема Больцано. Следствия.

I7. Критерий связности. Линейно связные пространства. Связность произведения двух связных пространств. Негомеоморфность отрезка и квадрата. Связные компоненты. Открытые подмножества $\mathbb{R}$.

I8. Монотонные функции. Основные свойства. Корень n-ой степени.

I9. Логарифмическая, степенная и показательная функции. Основные свойства.

20. Число е. Производная логарифма. Иррациональность е.

А Н А Л И З

Тема 2. Мощность множеств. Счетные и несчетные множества.

Опр. X равномощно У, если существует биекция $X \to У$.
Равномощность обладает свойствами отношения эквивалентности.

Сравнение мощностей. Говорят, что мощность $X \leq$ мощности У, если существует инъекция $X \to У$, т.е. X равномощно части У. Корректность определения следует из теоремы.

Теорема. (Кантор-Бернштейн). Если X равномощно части У и У равномощно части X, то X и У равномощны.

Доказательство. По условию существуют инъекции $f : X \to У$ и $g : У \to X$. Нужно доказать, что существует биекция $h : X \to У$. "Склеим" h из f и g, т.е. докажем, что существуют такие $A, B \subset X$ и A', $B' \subset У$, что $A \cup B = X$; $A \cap B = \emptyset$; $A' \cup B' = У$; $A' \cap B' = \emptyset$; $f(A) = A'$ и $g(B') = B$. (Тогда h можно определить как f на A и g^{-I} на B). Заметим, что B, A' и B' однозначно восстанавливаются по A: $A' = f(A)$, $B' = C_У A'$ и $B = g(B')$. Для выполнения требуемых условий необходимо и достаточно, чтобы A удовлетворяло уравнению:

$$A = C_X\,(g^{-I}(C_У(f(A)))).$$

Иначе говоря, определим отображение $F : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ формулой $F = C_X \circ g^{-I} \circ C_У \circ f$; мы должны доказать, что F имеет неподвижную точку.

Лемма. Для любого семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ подмножеств в X $F(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} F(A_\lambda)$ (проверьте сами!).

Положим $A = X \cap F(X) \cap F^2(X) \cap \ldots$. По лемме $F(A) = F(X) \cap F^2(X) \cap \ldots = A$, что и требуется. Теорема доказана.

Теорема (без д-ва). Любые два множества X и У сравнимы по мощности, т.е. либо X равномощно части У, либо У равномощно части X.

Опр. X счетно, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Предложение. Любое бесконечное множество X содержит счетное подмн-во Д. Если $X \setminus Д$ бесконечно, то $X \setminus Д$ равномощно X.

Предл. Подмн-во счетного мн-ва конечно или счетно. (Это значит, что счетное множество самое маленькое из бесконечных мн-в.)

Предл. Объединение счетного семейства счетных мн-в счетно.
Доказательство. Достаточно д-ть, что $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно. Имеем: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(i,j) \mid i+j=n\}$ – объединение счетного семейства конечных множеств, следовательно, счетное.

Следствие. $\mathbb{Q}$ – счетно.

Возникает вопрос, существуют ли вообще несчетные мн-ва?

Положим $2^X = \mathrm{Map}\,(X, \{0, I\})$. Очевидно, 2^X равномощно $\mathcal{B}(X)$ /каждому $A \subset X$ отвечает его характеристическая функция χ_A).

Теорема. (Кантор) Ни для какого $X \neq \emptyset$ не существует сюръекции $X \to 2^X$.
Док-во. Пусть $x \mapsto f_x$ – такая сюръекция. Определим $g \in 2^X$ формулой $g(x) = I - f_x(x)$ для всякого $x \in X$. Тогда для любого x $g \neq f_x$, поскольку $g(x) \neq f_x(x)$. Противоречие!

Метод доказательства называется диагональным процессом Кантора (почему диагональным – можно понять на примере $X = \mathbb{N}$).

Опр. Говорят, что мн-во, равномощное $2^{\mathbb{N}}$, имеет мощность континуум.

Гипотеза континуума Не сущ. мощности, промежуточной между счетной и континуумом. /П.Коэн в 1963 г. доказал ее независимость от других аксиом теории множеств./

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ т.е. двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Мы хотим сделать $\mathbb{R}^2$ полем. Естественно потребовать, чтобы $\lambda\cdot(z_1\cdot z_2)=(\lambda z_1)z_2$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}, z_1,z_2\in\mathbb{R}^2$ /Это значит, что $\mathbb{R}^2$ образует алгебру над $\mathbb{R}$./

Теорема. На $\mathbb{R}^2$ существует и единственна с точностью до изоморфизма структура алгебры над $\mathbb{R}$, превращающая $\mathbb{R}^2$ в поле./Это поле называется полем комплексных чисел и обозначается $\mathbb{C}$./

Док-во. Пусть (I, j) – базис в $\mathbb{R}^2$. Отображение $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $(\lambda\mapsto\lambda\cdot 1)$ инъективно и является гомоморфизмом полей, т.е. можно считать, что $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ и писать λ вместо $\lambda\cdot I$. Итак, элементы $\mathbb{R}^2$ имеют вид $a + bj$; $a,b\in\mathbb{R}$. Имеем: $(a+bj)(c+dj)=ac+(bc+ad)j+bd\cdot j^2$, так что умножение однозначно определяется элементом $j^2 = pj + q$ $/p,q\in\mathbb{R}/$.

Лемма. $\exists\ i\in\mathbb{C}:\ i^2=-1$

Док-во. Имеем: $(j-\frac{p}{2})^2=q+\frac{p^2}{4}$.Если $q+\frac{p^2}{4}\geq 0$, т.е. $q+\frac{p^2}{4}=r^2$ для некоторого $r\in\mathbb{R}$, то $(j-\frac{p}{2})^2-r^2=0\Rightarrow(j-\frac{p}{2}-r)(j-\frac{p}{2}+r)=0$. Это противоречит тому, что $\mathbb{C}$ – поле /не имеет делителей 0/. Итак, $(j-\frac{p}{2})^2<0$,т.е. $(j-\frac{p}{2})^2=-r^2$ для некотрого $r\in\mathbb{R}$, $r\neq 0$. Положим $i=\frac{j-p/2}{r}$. ■

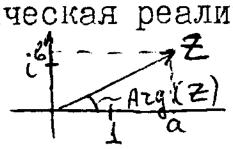
В базисе $\{I, i\}$ умножение имеет простой вид:

$$/*/\quad (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$$

Единственность уже доказана. Осталось проверить, что если умножение задано /*/, то выполняются аксиомы поля. Проверим выполнимость деления на $z\neq 0$. Если $z = a + bi$, то положим $\bar{z} = a - b\cdot i$ /комплексно сопряженное/. Имеем: $z\cdot\bar{z} = a^2 + b^2 > 0$. Положим $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ – модуль z . Отсюда $z^{-1}=\bar{z}/|z|^2$.

Свойства: I/ $z\mapsto\bar{z}$ – автоморфизм поля $\mathbb{C}$; 2/ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; 3/ $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Геометрическая реализация: при перемножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.



Тема 4. Метрические пространства

Определение. Расстоянием в множестве E называется отображение $d: E\times E\to\mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям: /I/ $d(x,x) = 0$ и $d(x,y) > 0$ при $x\neq y$.
/2/ $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x,y\in E$. /3/ $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ $\forall x,y,z\in E$ /неравенство треугольника/. Пара (E, d) – метрическое пространство.

Примеры. I. $\mathbb{R}$ с расстоянием $d(x,y)=|x-y|$.

2. $\mathbb{C}$ с расстоянием $d(z,w)=|z-w|$

3. $\mathbb{R}^n$ с эвклидовым расстоянием $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

4. $\mathbb{R}^2$ с расстоянием $d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$.

5. A – произвольное множество, E = B(A) – множество ограниченных функций $A\to\mathbb{R}$ с расстоянием $d(f,g)=\sup_{t\in A}|f(t)-g(t)|$.

6. E – произвольное множество, $d(x,y)=1$ при $x\neq y$. Это – дискретное пространство.

7.Пусть p – простое число. Определим функцию $v_p:\mathbb{Q}\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}$ – p – показатель: $\forall r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ представим в виде $p^k\cdot\frac{m}{n}$, где m, n – взаимно просты с p; $v_p(r)\overset{def}{=}k$. Очевидно, $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

Положим $d_p(x,y)=p^{-v_p(x-y)}$ при $x\neq y$, и $d_p(x,x) = 0$. Это – p-адическое расстояние на $\mathbb{Q}$. Выполняется более сильное условие, чем неравенство треугольника:

$d_p(x,z) \le \max(d_p(x,y), d_p(y,z))$ – ультраметрическое свойство.

Конструкции: 1/ Подпространство $F \subset E$.

2/ Произведение (E_1, d_1) и (E_2, d_2): расстояние в $E_1 \times E_2$ определяется формулой $d(x,y) = \max(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2))$. Можно также взять сумму расстояний или $\sqrt{d_1^2+d_2^2}$.

3/ Биекция $f: E \to F$ называется изометрией, если $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$. Пусть теперь F – метрическое пространство, E – некоторое множество, а $f: E - F$ – биекция. Определим расстояние на E формулой $d(x,y) = d(f(x), f(y))$. E становится метрическим простраствам, а f – изометрией. Пример: расширенная вещ.прямая $\bar{\mathbb{R}}$. Функция $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ на $\mathbb{R}$ есть биекция $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1,1)$. Обратная биекция задается формулой $g(y) = y/(1-|y|)$. Присоединим к $\mathbb{R}$ 2 точки $+\infty$ и $-\infty$: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; продолжим f до биекции $f: \bar{\mathbb{R}} \to [-1,1]$: $f(\pm\infty) = \pm 1$. $\bar{\mathbb{R}}$ – метр. пр-во с расстоянием $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Перенесем в $\bar{\mathbb{R}}$ с $[-1,1]$ отношение порядка $\le$ /на $\mathbb{R}$ оно совпадает с обычным, и $-\infty < x < +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$/. Непустые подмножества $\bar{\mathbb{R}}$ всегда ограничены, т.е. $\sup A$ и $\inf A$ в $\bar{\mathbb{R}}$ определены всегда.

Замечание. Фактормножество метр.пр-ва по некоторому отношению эквивалентности может не быть метрич.пр-вом.

Словарь метрич. пр-в. (E,d) – метрич. пр-во. Элементы E – точки. Если $a \in E$, $r > 0$, то $B(a;r) = \{x \in E \mid d(a,x) \le r\}$ – замкнутый шар; $U(a;r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$ – открытый шар, $S(a;r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$ – сфера /все – с центром в a и радиусом r/. Упражнение. Построить примеры; б/верно ли, что замкнутый шар – замыкание открытого; в/верно ли, что шар большего радиуса не может оказаться внутри шара меньшего радиуса?

Если A и B – непустые подмножества E, то $d(A,B) \stackrel{def}{=} \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y)$ – расстояние между A и B. Замечание Если $A \cap B \ne \emptyset$, то $d(A,B) = 0$. Более того, может быть и $d(A,B) = 0$ при $A \cap B = \emptyset$.

Расстояние от точки до множества: $d(x,A) \stackrel{def}{=} d(\{x\}, A)$.

Диаметр $A \ne \emptyset$: $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ /он может быть $+\infty$/.

A – ограничено, если $\operatorname{diam} A < +\infty$. Пример: $\operatorname{diam} B(a;r) \le 2r$.

Утверждение. Если A и B ограничены, то $A \cup B$ – ограничено.

Док-во: более точно, $\operatorname{diam}(A \cup B) \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam} B + d(A,B)$.

Множество $U \subset E$ – открыто, если оно с каждой точкой $a \in U$ содержит некоторый открытый шар $U(a;r)$, $r > 0$. $\emptyset$ и E – открытые множества.

Утв. Всякий открытый шар – открытое мн-во.

Д-во: Если $x \in U(a;r)$, то $U(x, r - d(a,x)) \subset U(a;r)$.

Утв. Объединение любого семейства и пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.

Задача. Открытые мн-ва в $\mathbb{R}$ это объединения конечного или счетного семейства непересекающихся интервалов (в $\mathbb{R}$).

Открытые множества – объединения семейств открытых шаров.

Примеры. 1/В дискретном пространстве всякое подмн-во открыто.

2/Если $F \subset E$ – подпр-во, то открытые мн-ва в F – это мн-ва вида $U \cap F$, где U – открыто в E. Д-во. Очевидно, $\forall a \in F$ имеем $U_F(a;r) \cap F$. ■

Окрестности: Пусть $\emptyset \ne A \subset E$. Открытой окрестностью A наз. любое открытое множество, содержащее A, а окрестностью A любое мн-во, содержащее некоторую открытую окрестность А. Если $A = \{x\}$, то говорят об окрестностях точки x.

Свойства: 1. $\forall \emptyset \neq A \subset E$ и $\forall r>0$ мн-во $V_r(A) = \{x \in E \mid d(x,A) < r\}$ – открытая окрестность А.
2. Пересечение конечного числа окрестностей А – окрестность А.
3. V – открыто $\Leftrightarrow$ V является окрестностью каждой из своих точек.

Внутренность. Точка x – внутренняя точка А, если А – окрестность x. A^0 /или $\operatorname{int} A$/ $= \{x$ – внутр.точка $A\}$ – внутренность А.

Свойства: 1. A^0 – есть наибольшее открытое множество, содержащееся в А. $(\forall A)$
2. Если $A \subset B$, то $A^0 \subset B^0$. 3. $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$ $\forall A, B \subset E$.

Точка $x \in E$ – внешняя для А, если она – внутренняя точка $E \setminus A$.

Утв. x – внешняя для $A \Leftrightarrow d(x,A) > 0$.

Опр. Замкнутое множество суть дополнение открытого.

Примеры. $\emptyset$, E; в дискретном пространстве всякое мн-во замкнуто; если $F \subset E$ – подпространство, то замкнутые мн-ва в F = пересечению замкн.мн-в в E с F; замкн. шар и сфера – замкн.мн-ва; одноточечное мн-во – замкнуто.

Утв. Пересечение любого семейства и объединение конечного семейства замкнутых мн-в замкнуто.

Опр. x – точка прикосновения А, если всякая окрестность x имеет непустое пересечение с А. Множество всех точек прикосновения А наз.замыканием А и обозначается $\bar{A}$. Пример. Если $A \subset \mathbb{R}$, то $\sup A$ и $\inf A$ лежат в $\bar{A}$.

Свойства. 1. x – точка прикосновения А $\Leftrightarrow$ x – внешняя точка $E \setminus A \Leftrightarrow d(x,A) = 0$
2. $\bar{A}$ – наименьшее замкнутое множество, содержащее А.
3. А – замкнуто $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow$ А содержит все свои точки прикосновения.
4. $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$. 5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Опр. Точка x – предельная точка А, если любая окрестность точки x содержит бесконечное мн-во точек А. Мн-во предельных точек А обозначим через A'.

Предл. A' замкнуто для всякого А. Имеем: $\bar{A} \setminus A \subset A' \subset \bar{A}$.

Опр. А плотно относительно В, если $B \subset \bar{A}$. Если А плотно относительно всего E, то говорят, что А плотно в E или что А всюду плотно. /Это значит, что $\bar{A} = E$./

Пример: $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ плотны в $\mathbb{R}$.

Непрерывные отображения. Пусть (E, d) и (E', d') – метрические пространства, $f: E \to E'$. Отображение f наз.непрерывным в точке $x_0 \in E$, если для всякой окрестности V' точки $f(x_0)$ в E' найдется окрестность V точки x_0 в E, такая что $f(V) \subset V'$.

f – непрерывно в E, если оно непрерывно в каждой точке E. Переформулировки: f – непр.в $x_0 \Leftrightarrow$ прообраз любой окрестн.точки $f(x_0)$ есть окрестн.$x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$: $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Предл. Следующие условия эквивалентны: /1/ f непрерывно; /2/ прообраз $f^{-1}(U')$ любого открытого $U' \subset E'$ открыт в E; /3/ прообразы замкнутых множеств замкнуты; /4/ $\forall A \subset E$ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Предл. Пусть $f: E \to E'$ непр. в $x_0 \in E$, а $g: E' \to E''$ – непр.в $f(x_0)$. Тогда $g \circ f$ непр. в x_0. В частности, композиция непрерывных функций непрерывна.

Следствие. Ограничение непр.отображения на некоторое подпр-во непрерывно.

Определение. $f: E \to E'$ равномерно непрерывно, если $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$: $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Предложение. Равномерно непрерывное отображение непрерывно.

Примеры. Следующие отображения равномерно непрерывны: /1/ Вложение $F \to E$ $\forall F \subset E$; /2/ Проекции $E \times F \to E$ и $E \times F \to F$; /3/ Функция расстояния $d: E \times E \to \mathbb{R}$; /4/ $\forall A \subset E$ функция $x \mapsto d(x,A)$.

Функция $x \mapsto x^2$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ непр., но не равномерно непр.

Продолж. темы "метр. пр-ва".

<u>Опрделение</u>: $f: E \to E'$ – <u>гомеоморфизм</u>, если f – биективно и f и f^{-1} непрерывн. E и E' гомеоморфны, если $\exists$ гомеоморфизм $E - E'$. Гомеоморфность – отношение эквивалентности (т.е. если f и g – гомеоморфизмы, то f^{-1} и $g \circ f$ – гомеоморфизмы).

<u>Топологические свойства</u> (понятия) – <u>инвариантны относительно гомеоморфизмов</u> (т.е. их можно выразить в терминах открытых множеств). <u>Пример</u>. Понятия окрестности, замкнутого мн-ва, внутренности, замыкания, плотных мн-в, непрерывных функций – топологические; шары, сферы, диаметр, ограниченность, равномерная непрерывность ф-ий – нет.

Иначе говоря, пусть d_1 и d_2 – два расстояния в одном пространстве E, E_I и E_2 – соответствующие метрические пр-ва. Если тождественное отображение E_I в E_2 – гомеоморфизм, то d_1 и d_2 называются (топологически) эквивалентными. Другими словами – в E_I и E_2 совпадают семейства открытых множеств тогда и т.т., когда всякий открытый в E_I шар открыт и в E_2 и обратно $\forall$ откр. шар в E_2 открыт в E_I. Если $id: E_I \to E_2$ – непр., а обратное отображение – нет, то метрика (топология) E_I <u>сильнее</u>, чем в E_2 (в более сильной больше открытых мн-в).

<u>Примеры</u>. I. $x \mapsto x^3$ – гомеоморфизм (в дальнейшем гомео) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, но не равномерно непрерывный.

2. Обычная метрика в $\mathbb{R}$ эквивалентна индуцированной с $\overline{\mathbb{R}}$.

3. Три метрики в $\mathbb{R}^2$: эвклидова, $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ и $\max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ эквивалентны. То же для любого произведения $E_I \times E_2$: это следует из неравенств: $2\max(r_1, r_2) \geqslant r_1 + r_2 \geqslant \max(r_1, r_2)$, $(\forall r_1, r_2 \geqslant 0)$.

$\sqrt{2}\max(r_1, r_2) \geqslant \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \geqslant \max(r_1, r_2)$.

4. Дискретная метрика на $\mathbb{R}$ сильнее обычной.

5. Отображение $\longmapsto$ в  ("наматывание") – биективно и непрерывно, но не гомео.

<u>Пределы</u>. Пусть E – метр. пр-во, $A \subset E$, $a \in \bar{A} \setminus A$, $f: A \to E'$

<u>Определение</u> $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = a'$, если отображение $g: A \cup \{a\} \to E'$:
$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ a', & x = a \end{cases}$ непрерывно в т. a.

<u>Переформулировки</u>: I) $\forall$ окр. U' точки a' в E' $\exists$ окр. U точки a в E, что $f(U \cap A) \subset U'$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : x \in A, d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), a') < \varepsilon$.

Эти определения имеют смысл и при $a \in A$, но тогда $\lim$ равен $f(a)$.

<u>Примеры.</u> I) Если x_0 – не изолир. точка E, то вместо $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}}$ пишут просто $\lim\limits_{x \to x_0}$

2) Если $E = \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}$ – лево- и правосторонние пределы (иногда пишут $\lim\limits_{x \to x_0 - 0}$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0}$

3) Предел последовательности $A = \mathbb{N}$, $a = +\infty$, $E = \overline{\mathbb{R}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Критерий выше означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall$ окрестности $V \ni a$ почти все точки x_n (кроме конечного числа) все, лежат в $V \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 : n > n_0 \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} d(a, x_n) = 0$.

4) Сходимость в $B(A; \mathbb{R})$ называется <u>равномерной</u> сходимостью функций.

5) Сходимость функций со значениями в $E_I \times E_2$ – покоординатная.

<u>Простые общие свойства</u>. I) Предел может быть только один.

2) $f: E \to E'$ непр. в т. x_0 – предельной точке $E \setminus \{x_0\} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

3) Пусть $a' = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, $B \subset A$ – такое, что $a \in \bar{B}$. Тогда $a' = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$

4) Если $a' = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, и $g: E' \to E''$ – непр. в a', то $g(a') = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g \circ f(x)$.

Продолж.метр.пр-в

Предложение. Пусть $f: A \to E'$, $a \in \bar{A}$. Для того, чтобы $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = a'$

необх.и дост., чтобы $x_n \to a$, $x_n \in A \Rightarrow f(x_n) \to a'$.

◀ Необх. вытекает из утв.4) выше. Дост.: Пусть a' не есть $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall n \ \forall \delta \ \exists \ x_n \in A$: $d(x_n, a) < \delta$, $d'(f(x_n), a') \geqslant \varepsilon$. Это значит, что $x_n \to a$, $f(x_n) \not\to a'$ ▶

Следствие. $f: E \to E'$ – непр. в т. $x_0 \iff$ послед. $x_n \to x_0$ $f(x_n) \to f(x_0)$.

Определение. Точка в – предельная точка последовательности (x_n), если $\forall$ окр. $V \ni$ в $\exists$ беск.много таких номеров n, что $x_n \in V$.

Подпоследовательность (x_n) есть последовательность $k \mapsto x_{n_k}$ где $k \mapsto n_k$ – строго возрастающее отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Свойства I) Предельная точка последовательности – предел некоторой подпоследовательности

2) Сходящаяся последовательность имеет единственную предельную точку (ее предел); обратное, вообще говоря, неверно.

3) Множество предельных точек любой последовательности замкнуто.

4) $\forall A \subset E$ $\bar{A}$ – мн-во предельных точек последовательностей из A.

Полные пространства.

Определение. Последовательность (x_n) в метрич.пр-ве E наз. послед.Коши, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $p, q > n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Свойства: I) Всякая сходящаяся последовательность есть послед.Коши.

2) Всякая послед.Коши имеет не более одной пред.точки, и если имеет пред.точку, то сходится к ней.

Определение: E полно, если $\forall$ послед.Коши в E сходится.

Геометр.переформулировка: E полно $\iff \forall$ стягивающаяся послед.замкнут.шаров в E (т.е. $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, и радиусы $B_n \to 0$) имеет непустое пересечение.

Д-во. $\Rightarrow$) Пусть $B_n = B(x_n; r_n)$. Тогда (x_n) – послед.Коши, т.к. $r_n \to 0$. Ясно, что $\lim_{n\to\infty} x_n$ лежит в $\bigcap B_n$.

$\Leftarrow$) Пусть (x_n) – послед. Коши. Построим по индукции стягив.послед.замкнут. шаров $B_n(a_n; 1/2^{n-1})$, такую, что $\forall$ n почти все x_n лежат в $B(a_n; 1/2^n)$.

Пусть $x \in \bigcap B_n$ (ясно, что $\bigcap B_n$ состоит из одной точки). Тогда x – пред.точка (x_n).

Примеры. I) $\mathbb{R}$ – полно (т. о стягивающихся отрезках).

2) $\mathbb{C}$, произведение $E_1 \times E_2$ двух полных пр-в – полно ($\Rightarrow \mathbb{R}^n$ –полно)

3) Дискретное пр-во полно.

4) Если $A \subset E$ – полно, то A замкнуто в E. Обратно, если E полно и A замкнуто в E, то A – полно.

5) Следствие из 4): $\bar{\mathbb{R}}$ полно, т.к. оно изометрично отрезку $[0, 1]$; $\mathbb{R}$ в метрике, индуцированной с $\bar{\mathbb{R}}$, не полно. В частности, полнота не есть топологическое свойство.

6) Пр-во B(A) огранич.ф-ий $A \to \mathbb{R}$ полно. Более общо: пусть E– полное метрич.пр-во, B(A;E) – пр-во огранич.отображений $f: A \to E$ (с метрикой $d(f, g) = \sup_{t \in A} d(f(t), g(t))$). Тогда B(A;E) полно.

Д-во. Пусть (f_n) – послед.Коши в B(A;E). Это значит, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$: $\forall p, q > n_0, \forall t \in A$ $d(f_p(t); f_q(t)) < \varepsilon$. Отсюда $\forall t \in A$ послед. $(f_n(t))$ – последовательность Коши в E $\Rightarrow \exists f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, выберем n_0 как выше указано, фиксируем p и устремим q к ∞. Мы получим: $d(f(t), f_p(t)) = \lim_{q\to\infty} d(f_q(t), f_p(t)) \leq \varepsilon$ $\forall t$ (использовано, что функция $x \mapsto d(x, a)$ непрерывна).

Отсюда $f \in B(A;E)$ и $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, что и требовалось. ▶

Пополнение. Теорема: $\forall$ метрич.пр-ва E $\exists$ изометрия f из E в полное пр-во $\tilde{E}$, такая, что $f(E)$ плотно в $\tilde{E}$. $\tilde{E}$ наз. пополнением E. Оно единственно: если f': $E \to \tilde{E}'$ – другое пополнение то $\exists!$ изометрия g из $\tilde{E}$ на $\tilde{E}'$, такая, что $f' = g\circ f$

Д-во. Существование. Достаточно построить полное $\hat E$ и изометрию $f: E \to \hat E$ (тогда можно взять $\tilde E = \overline{f(E)}$ – замыкание). Положим $\hat E = B(E;\mathbb{R})$ и определим отображение $E \to \hat E$ формулой $a \mapsto \varphi_a(x) = d(x,a)$. Ясно, что $|\varphi_a(x) - \varphi_b(x)| = |d(a,x) - d(b,x)| \le d(a,b)$ и равенство достигается (например, при $x=b$). Значит, $a \mapsto \varphi_a$ – изометрия, что и требуется. (Здесь есть небольшой обман: $\varphi \in B(E;\mathbb{R})$ лишь если E ограничено; в общем случае возьмем $\varphi_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0)$, где x_0 – фиксир. точка E.)

Единственность. Каждое $x \in \tilde E$ представляется в виде $x = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, где $x_n \in E$. Положим $g(x) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n)$ (проверьте сами, что это определение корректно и задает искомое отображение).

Другая конструкция $\tilde E$: Назовем 2 последовательности Коши (x_n) и (y_n) в E **эквивалентными**, если $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Точки $\tilde E$ есть по определению классы эквивалентности последовательностей Коши. Расст. в $\tilde E$ определяется формулой $d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$, где (x_n) и (y_n) – последовательности Коши, представляющие x и y. Пр-во E вкладывается в $\tilde E$: $a \mapsto (x_n = a\ \forall n)$. Проверьте полноту $\tilde E$ и корректность всех определений.

Именно так Г.Кантор строил $\mathbb{R}$ исходя из $\mathbb{Q}$.

Пример. Пополнение $\mathbb{Q}$ по P-адической метрике называется полем p-адических чисел (обозначается $\mathbb{Q}_p$). Проверьте, что сложение и умножение в $\mathbb{Q}$ продолжаются по непрерывности на $\mathbb{Q}_p$ и превращает $\mathbb{Q}_p$ в поле.

Связные пространства. Определение: Метрическое пр-во E связно, если не существует двух непустых открытых мн-в A и B в E, таких что $A\cap B = \emptyset$ и $A\cup B = E$.

Предложение. 1) Связные подпр-ва $\bar{\mathbb{R}}$ это в точности всевозможные промежутки, т.е. отрезки, интервалы, полуинтервалы.

Д-во. Пусть E связное подпр-во $\mathbb{R}$. Если E состоит из одной точки, то E – промежуток. Пусть $E \supset \{a,b\}$ и $a < b$. Докажем, что $E \supset [a,b]$. В самом деле, если $c \in (a,b)$, $c \notin E$, то мн-ва $\{x\in E \mid x > c\}$ и $\{x \in E \mid x < c\}$ непусты, открыты в E, имеют непустое пересечение и в объдинении дают E, т.е. E – несвязно. Пусть $p = \inf E$, $q = \sup E$; ясно, что $p < q$. Пусть $p < c < q$. Докажем, что $c \in E$. В самом деле, по определению inf и sup $\exists$ a и b, такие, что $p < a < c < b < q$, и $a,b \in E$. Но тогда $[a,b] \subset E \Rightarrow c \in E$. Итак, $E \supset (p,q)$ и, значит, E есть один из четырех промежутков (p,q), $[p,q)$, $(p,q]$ или $[p,q]$.

2) Пусть E – промежуток в $\bar{\mathbb{R}}$. Предп., что $E = A\cup B$, где A и B – непустые открытые мн-ва в E, $A\cap B = \emptyset$ и $A\cup B = E$. Пусть $a \in A$, $b \in B$ (можно считать, что $a < b$). Пусть $c = \sup(A\cap[a,b])$. Рассмотрим две возможности: (1) $c\in A \Rightarrow c < b \Rightarrow \exists\, [c, c+\varepsilon] \subset A\cap[a,b] \Rightarrow c \ne \sup(A\cap[a,b])$; (2) $c \in B \Rightarrow c > a \Rightarrow \exists\, [c, c-\varepsilon] \subset B\cap[a,b] \Rightarrow c \ne \sup(A\cap[a,b])$. Противоречие!

Предложение. Пусть $f: E \to E'$ – непр. Если $A \subset E$ – связно, то $f(A)$ связно (непрерывный образ связного пр-ва связен). Д-во. Ясно, что f непрерывно как отображение $A \to f(A)$, так, что можно считать, что $A = E$, и $f(A) = E'$. Если $E' = A'\cup B'$, где A', B' – непустые, открытые и $A'\cap B' = \emptyset$, то $E = f^{-1}(A')\cup f^{-1}(B')$, где $f^{-1}(A')$ и $f^{-1}(B')$ – непусты и открыты, и $f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B') = \emptyset$. Значит, E – связно.

Следствие: (Теорема Больцано). Непрерывная ф-ия $f: E \to \mathbb{R}$, где E – связно, принимает все промежуточные значения, т.е. $f(E)$ вместе с любыми точками $a<b$ содержит весь отрезок $[a,b]$.

Следствие. Если $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ – непр., и $f(a)\cdot f(b) < 0$, то ур-ние $f(x)=0$ имеет решение на (a,b). Корень можно искать методом "деления пополам".

Следствие. Всякий многочлен нечетной степени с веществ. коэффициентами имеет вещественный корень.

Как доказывать связность пространств? Предложение (критерий связности): Пусть $\exists\ a\in E$ такая, что $\forall b\in E$ пара $\{a,b\}$ содержится в некотором связном подмножестве E. Тогда E связно.

Д-во. Пусть $E = A\cup B$, где A и B не пересек. и открыты. Пусть $a\in A$ и $b\in B$. Тогда никакое подмн-во C, содержащее a и b, не связно, т.к. $C=(C\cap A)\cup(C\cap B)$ – нужное разбиение C.

Следствия. 1) Если всякие две точки E соединяются связным подмн-вом, то E – связно; 2) Объединение любого семейства связных мн-в, имеющих непустое пересечение, связно;

3) Путем называется непр. образ отрезка; пр-во наз. линейно связным, если любые две его точки можно соединить путем. Тогда любое линейно связное пр-во связно (это – самый важный пример). Обратное – неверно (см. задачи). В частности, всякое выпуклое подмн-во $\mathbb{R}$ связно;

4) Если E_1 и E_2 – связны, то и $E_1\times E_2$ связно. (д-во. две точки (x_1,x_2) и (y_1,y_2) соединяются "крестом" $(\{x_1\}\times E_2)\cup(E_1\times\{y_2\})$, который связен в силу 2); значит, $E_1\times E_2$ связно в силу 1)).

Связность – простейший топологический инвариант. Примеры.

Утв. Отрезок и квадрат негомеоморфны. Д-во. Если из отрезка выкинуть середину, останется несвязное пр-во. Если из квадрата выкинуть любую точку, то останется связное пр-во.

Точно так же отрезок не гомеоморфен окружности. Вопрос: гомеоморфен ли отрезок букве "Т"? Интуитивно: нет, поскольку у Т можно выкинуть вершину так, что останутся 3 куска: Т; у отрезка такой точки нет. Точное определение: если $a\in E$, то связной компонентой точки a в E называется объединение всех связных подмн-в E, содержащих точку a. Она сама – связна в силу утв. 2) (выше). Ясно, что связные компоненты двух различных точек либо не пересекаются, либо совпадают. Итак, любое пр-во E однозначно распадается в дизъюнктное объединение своих связных компонент.

Теперь: (буква "Т" \ вершина) имеет три связные компоненты, а (отрезок \ точка) – не более двух $\Rightarrow$ отрезок и Т не гомеоморфны.

Еще одно применение связных компонент: Предл. Всякое открытое мн-во U в $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем счетного числа непересекающихся интервалов в $\mathbb{R}$. Д-во. Пусть $U=\bigcup_{\lambda\in L} V_\lambda$ – разложение на связные компоненты. Каждое V_λ есть промежуток. Из того, что U – открыто, следует, что все V_λ открыты в $\mathbb{R}$, т.е. являются интервалами. Поскольку каждый интервал содержит рациональную точку, их число не более чем счетно.

Предкомпактные пространства.

Определение Метрическое пр-во E предкомпактно, если $\forall$ последоват. в E содержит подпоследовательность Коши.

Предл. E предкомпактно $\iff \forall\varepsilon>0$ E покрывается конечным числом множеств диаметра $\leqslant\varepsilon \iff \forall\varepsilon>0\ \exists$ конечная ε-сеть в E (т.е. конечное мн-во $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subset E$, такое, что $\forall\ x\in E\ \exists\ x_i : d(x,x_i)\leqslant\varepsilon$).

◄ Очевидна эквивалентность двух последних условий. Дальше: 1) Пусть $\forall\varepsilon>0$ E покрывается конечным числом мн-в диаметра $\leqslant\varepsilon$. Пусть (x_n) – последоват. в E.

Тогда некоторая подпоследоват. (x_n) лежит в мн-ве диаметра $\leqslant\varepsilon$. Рассм. такую подпослед. для $\varepsilon = 1$ и возьмем в качестве x_{n_1} ее первый член; затем из этой подпослед. выберем подпоследоват. для $\varepsilon = 1/2$ и пусть x_{n_2} – ее первый член и т.д. Очевидно, что $(x_{n_1},x_{n_2},\dots)$ – послед. Коши.

2) Пусть для некоторого $\varepsilon>0$ не существует конечной ε-сети. Значит, можно построить последоват. (x_n), такую, что $d(x_n,x_k)>\varepsilon$ при $n\neq k$. Очевидно, из нее нельзя выбрать подпоследовательности Коши.

Свойства: I) Предкомпактное пр-во ограничено.
2) Подмн-во предкомпактного пр-ва предкомпактно.
3) Если E_1 и E_2 предкомпактны $\Rightarrow E_1\times E_2$ предкомпактно.
4) Подмн-во в $\mathbb{R}^n$ предкомпактно $\Leftrightarrow$ оно ограничено.
Д-во. В силу I) – 3) дост. док-ть, что отрезок $[a,b]$ в $\mathbb{R}$ предкомпактен. Для $\forall\varepsilon>0\ \exists\, n\in\mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n}<\varepsilon$ – свойство Архимеда. Тогда мн-во $\{a+\frac{b-a}{n}\cdot k \mid k=0,1,2,\dots,n\}$ – конечная ε-сеть для $[a,b]$.

Примеры: I) Дискретное пр-во предкомпактно $\Leftrightarrow$ оно конечно.
2) При бесконечном A в пр-ве $B(A)$ никакой шар не предкомпактен.
3) $\mathbb{R}$ предкомпактно.

Компактные пространства – основной класс метрических пространств.

Определение: Полное предкомпактное пр-во называется компактным (или компактом).

С учетом свойств полных пр-в свойства I)–4) выше переписываются так:
I) Компактное пр-во ограничено.
2) Замкнутое подмн-во компакта – компакт (обратно, компакт замкнут во всяком объемлющем пр-ве, т.к. он полон).
3) E_1, E_2 – компакты $\Rightarrow E_1\times E_2$ – компакт.
4) Подмн-во $\mathbb{R}^n$ – компакт $\Leftrightarrow$ оно замкнуто и ограничено.
5) $\overline{\mathbb{R}}$ – компакт.

На самом деле компактность – топологическое св-во (хотя полнота и предкомпактность – нет!). Это видно из следующей теоремы.

Теорема. Для метрического пр-ва E следующие три условия эквивалентны:

(I) E компакт; (2) Из всякой последовательности в E можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (или, иначе, любая последовательность имеет предельную точку); (3) Из всякого открытого покрытия E можно выбрать конечное подпокрытие (покрытие E – по определению – семейство подмн-в $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$, такое что $\bigcup_{\lambda\in L} U_\lambda = E$; "открытое покрытие" – все U_λ открыты).

Схема док-ва:

(2) $\Leftrightarrow$ { Послед. Коши сходится $\Leftrightarrow$ Полнота (I) $\Leftrightarrow$ стягивающаяся последовательность замкнутых шаров имеет непустое пересечение
$\forall$ послед. содержит подпоследоват. Коши $\Leftrightarrow$ предкомп. $\Updownarrow$ $\forall\varepsilon>0$ E покрывается конечным числом шаров радиуса ε. }
$\Updownarrow$ (3)

Док-во: Левая часть схемы, т.е. эквив. (I) и (2) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ предкомп.: Рассмотрим покрытие E всевозможными открытыми шарами радиуса ε. Предкомпактность в точности означает, что $(\forall\varepsilon)$ из него можно выбрать конечное подпокрытие.
(3) $\Rightarrow$ полнота: докажем большее – что убывающая последовательность непустых замкнутых мн-в $F_1\supset F_2\supset\dots$ имеет непустое пересечение. Положим $U_i=E\setminus F_i$. Если бы $\bigcap_i F_i=\emptyset$, то (U_i) – открытое покрытие E. Выберем конечное подпокрытие; поскольку $U_1\subset U_2\subset\dots$, это означает, что $U_n=E$ для некоторого n, т.е. $F_n=\emptyset$ – противоречие. Полнота + предкомпактность $\Rightarrow$(3). Пусть (U_λ) – открытое покрытие E. Скажем, что $A\subset E$ обладает Б-свойством, если оно не покрывается конечным числом мн-в U_λ. Предположим, что E обладает Б-свойством и придем к противоречию. Утверждение. Если $A\subset A_1\cup\dots\cup A_n$, и A обладает Б-свойством, то хотя бы одно A_k обладает Б-свойством (ясно). Пример: $E=[a,b]$–

– отрезок. Будем делить его пополам, каждый раз выбирая ту половину, которая обладает Б-свойством. Получим стягивающуюся последовательность отрезков обладающих Б-свойством. Пусть x – точка пересечения их. Имеем: $x\in U_\lambda$ для некоторого λ. Поскольку U_λ – открытое, оно содержит некоторый отрезок нашей последовательности. Противоречие. Общий случай. Поскольку E предкомпакно, из нашего утв. (выше) следует, что $\exists$ замкнутый шар $B(a_1,1)$, обладающий Б-свойством, затем $\exists$ шар $B(a_2,1/2)$, обл. Б-свойством и пересекающийся с первым, и т.д. Раздув каждый шар в 3 раза, получим стягивающуюся систему замкнутых шаров, обл. Б-свойством. Т.к. E полно, она имеет непустое пересечение. x . Дальше – так же, как и для отрезка. Теорема доказана.

Наиболее разумное определение компактности – третье (3). Упражнение: д-ть все свойства компактности, исходя из (3). (Все свойства – доказанные выше.)

Например, докажем по-другому, что отрезок $[0,1]$ – компактен. Пусть (U_λ) его открытое покрытие. Рассмотрим $A=\{x\in[0,1] \mid$ отрезок $[0,x]$ покрывается конечным числом мн-в $U_\lambda\}$. Тогда $0\in A$, т.е. $A\neq\emptyset$. Пусть $c=\sup A$. Докажите, что $c\in A$ и $c=1$.

Предложение. Если E – компакт, и послед. (x_n) имеет в E единственную предельную точку a, то (x_n) сходится к a. Д-во: если это не так, то $\exists\, U(a;r)$ вне которой бесконечное число членов последовательности, т.е. некоторая подпоследовательность. Она имеет предельную точку, также вне $U(a;r)$, т.к. $E\setminus U(a;r)$ – замкнуто. Получили, что наша послед. имеет две пред. точки. Противоречие.

Следствие. Для послед. (x_n) в $\overline{\mathbb{R}}$ положим $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$ равными $\sup$ и $\inf$ мн-ва ее предельных точек соответственно. Тогда (x_n) сходится $\iff \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$.

Основное св-во компактности: непрерывный образ компакта есть компакт, т.е. если $f: E\to E'$ – непр. и E компакт, то $f(E)$ – компакт.

Д-во. Пусть $(V_\lambda)_{\lambda\in L}$ – откр. покрытие $f(E)$. Имеем $V_\lambda = U_\lambda\cap f(E)$, где U_λ – открыто в E'. Т.как f – непр. $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda\in L}$ – открытое покрытие E. Пусть $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2),\dots,f^{-1}(U_n)$ – покрывают E. Тогда $V_1,V_2,\dots,V_n$ – покрывают $f(E)$, что и треб.

Следствие. Непрерывное инъективное отображение $f: E - E'$ компакта E есть гомеоморфизм E и $f(E)$. Д-во. Образ замкнутого подмножества в E замкнут в $f(E)$ $\Rightarrow f^{-1}$ – непр. (для нее прообраз замкнутого мн-ва замкнут.)

Следствие. (Теорема Вейерштрасса) Если E – компакт, то непр. ф-ия $f: E\to\mathbb{R}$ ограничена и достигает своего максимального и минимального значений.
Док-во. $f(E)$ – компакт в $\mathbb{R}\Rightarrow$ замкнут и ограничен $\Rightarrow$ содержит свой $\sup$ и $\inf$.

Применения. 1) Нер-во Коши. $\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\dots a_n}$ при $a_k\geqslant 0$ (И равенство достигается только когда все a_k равны между собой).

Переформулировка: Рассм. $E=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_k\geqslant 0$ и $a_1+a_2+\dots+a_n=T\}$, где $T>0$ и фиксировано. Пусть $f: E\to\mathbb{R}$ задано формулой $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=a_1a_2\dots a_n$. Тогда $f(x)$ достигает максимума в единственной точке $x_0=(\frac{T}{n},\frac{T}{n},\dots,\frac{T}{n})$. Док-во. Легко видеть, что $f(x)$ не максимально при $x\neq x_0$. Если, скажем, $a_1\neq a_2$ то (если, разумеется, все $a_k>0$) $f(a_1,a_2,\dots,a_n)<f(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,\dots,a_n)$. Далее, E – компакт (т.к. оно замкнуто и ограничено), и f – непр. (примем это пока на веру). Значит, max достигается, и все доказано.

2) Основная теорема алгебры. Всякий многочлен $f(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$ ($a_k\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$, $n>0$) имеет корень в $\mathbb{C}$. Док-во. Основная лемма. Если $f(z_0)\neq 0$, то сколь угодно близко к z_0 существуют точки z, для которых $|f(z)|<|f(z_0)|$. Вывод теоремы из основной леммы. Рассм. ф-ию $\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+$ $(z\mapsto|f(z)|)$.

Примем на веру, что оно непрерывно. Легко видеть, что $|f(z)|>|f(0)|$ при достаточно больших $|z|$ (т.к. $f(z)=|z|^n\cdot|a_n+a_{n-1}u+a_{n-2}u^2+\ldots+a_0u^n|$, где $u=1/z$ и второй сомножитель близок к $|a_n|$ при больших $|z|$.) Значит, $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|=\inf\limits_{|z|\leq R}|f(z)|$ при достаточно большом R. По т.Вейерштрасса этот $\inf$ достигается (т.к. круг $|z|\leq R$ – компакт). По основной лемме он равен 0, что и требовалось.

<u>Д-во основной леммы</u>. Имеем: $f(z_0+\delta)=f(z_0)+P(\delta)$, где $P\neq 0$ – полином, $P(0)=0$. $P(\delta)=\alpha\delta^k(1+Q(\delta))$, где $k>0$, $\alpha\neq 0$, $Q(0)=0$. Отсюда $|f(z_0+\delta)|=|f(z_0)+\alpha\delta^k+\alpha\delta^k\cdot Q(\delta)|\leq|f(z_0)+\alpha\delta^k|+|\alpha|\cdot|\delta|^k\cdot|Q(\delta)|$. Из геометрич. соображений при достаточно малых $r>0\ \exists\delta:|\delta|=r$ и $|f(z_0)+\alpha\delta^k|=|f(z_0)|-|\alpha|r^k$ (когда δ пробегает окружность $|\delta|=r$, число $f(z_0)+\alpha\delta^k$ пробегает окружность с с центром $f(z_0)$ и радиусом $|\alpha|r^k$. Выберем r еще настолько малым, что $|Q(\delta)|\leq$ $\leq$ <u>1/2 при $|\delta|=r$. Тогда</u> $|f(z)|\leq|f(z_0)|-\frac{1}{2}|\alpha|r^k<|f(z_0)|$ что и треб.

Для завершения темы осталось д-ть непрерывность алгебраических операций.

1) Ф-ии $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ $((z_1,z_2)\mapsto z_1+z_2$ и $(z_1,z_2)\mapsto z_1\cdot z_2)$ – непрерывны. <u>Д-во</u>: $|(z_1+z_2)-(z_1^0+z_2^0)|=|(z_1-z_1^0)+(z_2-z_2^0)|\leq|z_1-z_1^0|+|z_2-z_2^0|$ т.е. сумма непр. $|z_1z_2-z_1^0z_2^0|=|(z_1z_2-z_1^0z_2)+(z_1^0z_2-z_1^0z_2^0)|\leq|z_2|\cdot|z_1-z_1^0|+|z_1^0|\cdot|z_2-z_2^0|$. Если $|z_1-z_1^0|<\delta$ и $|z_2-z_2^0|<\delta$, то $|z_1z_2-z_1^0z_2^0|\leq\delta(|z_1^0|+|z_2^0|+\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. т.е. произведение непр.

2) Ф-ия $\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $(z\mapsto 1/z)$ – непр. <u>Д-во</u>: $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{|z|\cdot|z_0|}$ при $\delta<|z_0|$, и $|z-z_0|\leq\delta$ имеем $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right|\leq\frac{\delta}{|z_0|(|z_0|-\delta)}\to 0$ при $\delta\to 0$.

3) Ф-ия $\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+$ $(z\mapsto|z|)$ – непр. (более общо, в любом метр.пр-ве E ф-ия $x\mapsto$ $\mapsto d(x,a)$ при фиксир. a непр. (– д-ть самим)). Применяя многократно теорему о непр. сложной ф-ии получаем, что непрерывны сумма любого числа слагаемых; то же для произведения. Поэтому любой полином и дробно рациональная ф-ия от z (в точках, где знаменатель отличен от 0) непрерывны.

<u>Тема. Логарифмическая и показательная ф-ции.</u>

<u>Монотонные ф-ии</u>. <u>Определение</u>. Пусть $E\subset\overline{\mathbb{R}}$, $E\neq\emptyset$, $f\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$. Если $x<y$, то $f(x)<f(y)$ (соотв. $f(x)\leq f(y)$, $f(x)>f(y)$, $f(x)\geq f(y)$). При этом ф-ия f наз. возрастающей (соответственно, неубывающей, убывающей, невозрастающей). В каждом случае f – <u>монотонна</u>; если нер-ва строгие – f – <u>строго монотонна</u>.

<u>Предл</u>. Если $a=\sup E$, и f – монотонна, то $\lim\limits_{x\to a,\,x\in E\setminus\{a\}}f(x)$ всегда существует и равен $\sup\limits_{x\in E}f(x)$ для неубывающих f и $\inf\limits_{x\in E}f(x)$ для невозрастающих f. Д-во очевидно. (В (а)чтности, при $E=\mathbb{N}$ получаем теорему о пределе монотоннной последовательности.)

<u>Предл</u>. Пусть I – промежуток в $\overline{\mathbb{R}}$, и $f\colon I\to\overline{\mathbb{R}}$ – непр. Тогда:

а) если f – инъективно, то f строго монотонна; б) если f строго монотонно, то оно является гомеоморфизмом на промежуток $f(I)$. <u>Д-во</u>: а) Пусть $a<b$ – точки I и (например) $f(a)<f(b)$. Из теоремы Больцано следует, что $\forall\, c\in(a,b)$ $f(c)\in(f(a),f(b))$. Применим это утверждение многократно:

1) При $c<a$ к $a\in(c,b)$ $\Rightarrow f(c)<f(a)$.

2) При $c>b$ к $b\in(a,c)\Rightarrow f(b)<f(c)$. Осталось проверить, что $f(x)<$ $<f(y)$ при $x<y$, если либо $y<a$, либо $x>a$. В каждом случае надо применить то же утверждение к тройке (x,y,a).

б) По т. Больцано f переводит промежуток в промежуток. Очевидно, f переводи интервалы в интервалы. Значит, f гомеоморфизм.

<u>Следствие</u>. При каждом $n\in\mathbb{N}$ отображ. $x\mapsto x^n$ есть гомеоморфизм $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ на

себя. Значит, из $\forall$ положит. числа извлекается корень n-ой степени (положительный), и отображение $x \to \sqrt[n]{x}$ непрерывно.

Мы обобщим это, введя логарифмы, степенную и показательную ф-ции. Нам будет удобнее начать с введения логарифма.

Предл. $\forall\, a > 1\ \exists!$ неубывающее отображение $f: \mathbb{R}^*_+ = (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, такое, что $f(xy) = f(x) + f(y)$ и $f(a) = 1$. При этом f – гомеоморфизм $\mathbb{R}^*_+$ на $\mathbb{R}$.

Д-во. Единственность. Ясно, что $f(1)=0$ и $f(x^n)=n f(x)$ $\forall x>0$, $n\in\mathbb{Z}$ (в частности, $f(a^n) = n$). По мультипликативному принципу Архимеда $\forall x>0\ \exists m\in\mathbb{Z}$: $a^m \le x < a^{m+1}$. Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $a^m \le x^n \le a^{m+1}$. Имеем $f(a^m) \le f(x^n) \le f(a^{m+1}) \Rightarrow m \le n f(x) \le m+1 \Rightarrow \frac{m}{n} \le f(x)$ и $f(x) - \frac{m}{n} \le \frac{1}{n}$. Для каждого $x>0$ положим $A_x = \{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{N}, a^m \le x^n\}$ – очевидно, определение корректно, т.к. $a^m \le x^n \Leftrightarrow a^{mq} \le x^{nq}$ $(q\in\mathbb{N})$. Из сказанного ясно, что $f(x) = \sup A_x$, что и доказывает единственность.

Существование. Положим $f(x) = \sup A_x$. Очевидно, f – неубывающая, и $f(a)=1$. Из определения ясно, что $a^m \le x^n \le a^{m+1} \Rightarrow \frac{m}{n} \le f(x) \le \frac{m+1}{n}$. Пусть теперь при фиксированном $n\in\mathbb{N}$ имеем $a^m \le x^n \le a^{m+1}$, $a^{m_1} \le y^n \le a^{m_1+1}$. Отсюда следует, что $\frac{m+m_1}{n} \le f(x) + f(y) \le \frac{m+m_1+2}{n}$, и $\frac{m+m_1}{n} \le f(xy) \le \frac{m+m_1+2}{n} \Rightarrow |f(xy) - f(x) - f(y)| \le \frac{2}{n}$. Поскольку n произвольно, $f(xy) = f(x) + f(y)$, ч.т.д.

f – возрастает: при $z>1\ \exists n\in\mathbb{N}$: $a < z^n$ (снова мультипл. принцип Архимеда). Значит, $f(z) \ge \frac{1}{n} > 0$. Отсюда получаем: $x<y \Rightarrow y = zx$ при $z>1 \Rightarrow f(y) = f(x) + f(z) > f(x)$.

f – непрерывно. Лемма: $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists z>1$: $z^n \le a$ (например, это вытекает из следствия перед предложением). Отсюда $0 < f(z) \le \frac{1}{n}$. Выберем теперь $\forall x>0$ такое $\delta>0$, что $\frac{x+\delta}{x} < z$ и $\frac{x-\delta}{x} > 1/z$. Тогда $|y - x| \le \delta \Rightarrow \frac{1}{z} < \frac{y}{x}$ $\Rightarrow |f(y) - f(x)| \le \frac{1}{n}$. Значит, f – непрерывна. В силу предыдущего предложения f есть гомеоморфизм $\mathbb{R}^*_+$ на $f(\mathbb{R}^*_+)$. Но в силу того, что $f(a^n)=n$ при $n\in\mathbb{Z} \Rightarrow f(\mathbb{R}^*_+) = \mathbb{R}$, и предложение полностью доказано.

Предл. $\forall a>0$, $a \ne 1\ \exists!$ непр. $f: \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$, такое, что $f(xy) = f(x) + f(y)$, и $f(a)=1$.

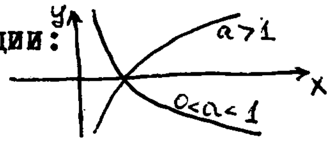
Лемма. Если $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непр., и $g(x+y) = g(x) + g(y)$, то $g(x) = cx$.

Д-во. Ясно, что $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}\cdot f(1)$ $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Поскольку $\mathbb{Q}$ – плотно в $\mathbb{R}$, получаем, что $f(x) = f(1)\cdot x$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Д-во предл. Пусть f_0 – топологический изоморфизм групп $\mathbb{R}^*_+$ (по умнож.) и $\mathbb{R}$ (по слож.) – он построен в предыдущем предл. Положим $g = f\circ f_0^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. По лемме $g(x) = cx \Rightarrow f(y) = c f_0(y)$ $\forall y>0 \Rightarrow f(y) = \frac{f_0(y)}{f_0(a)}$. Это доказывает и существование и единственность f (поскольку $f_0(a) \ne f_0(1) = 0$).

Определение. Отображение из последнего предл. наз. $\log_a$ (логарифмом по основанию a). Из док-ва последнего предл. вытекает формула $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

График этой ф-ции:



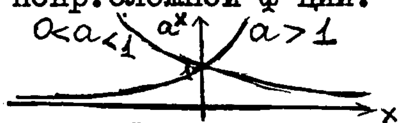
Итак, логарифмы преобразуют умножение в сложение. На этом основано действие логарифмической линейки.

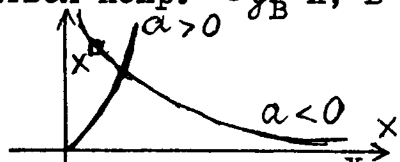
Определение: a^x – ф-ия, обратная $\log_a x$, т.е. $a^{\log_a x} = x$ $\forall x>0$, $\log_a a^x = x$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Кроме того $1^x \overset{def}{=} 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$. По определению имеем: $a^{x+y} = a^x\cdot a^y$, $a^{-x} = 1/a^x$, $a^0 = 1$. Далее, $\log_a(b^x) = \log_a b \cdot \log_b b^x = x \log_a b$ (это верно при $a,b>0$, $a \ne 1$, $x\in\mathbb{R}$)

Отсюда $(a^x)^y = a^{xy}$ (т.к. $\log_b (a^x)^y = y\log_b a^x = xy\log_b a = \log_b a^{xy}$).

Предл. Отображение $(x,y)\mapsto x^y$ непр. в $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Док-во: $x^y = b^{y\log_b x}$ при фиксир. $b>1$. Осталось воспользоваться непр. $\log_b x$, b^x, $(x,y)\mapsto xy$ и теоремой о непр. сложной ф-ции.

Графики:





Предл. а) всякий непр. гомоморфизм групп $(\mathbb{R}, +)\to(\mathbb{R}_+^*$, умнож.) имеет вид: $x\mapsto a^x$ $(a>0)$;

б) всякий непр. гомоморфизм группы $\mathbb{R}_+^*$ в себя имеет вид: $x\mapsto x^a$ $(a\in\mathbb{R})$

Д-во очевидно.

ЧИСЛО е. Вычислим производную $(\log_a x)'$. Имеем: $(\log_a x)' = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log_a(x+\delta)-\log_a x}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\log_a(1+\frac{\delta}{x})^{1/\delta} = \frac{1}{x}\lim_{\delta\to 0}\log_a(1+\delta)^{1/\delta}$.

Предл. $\exists \lim_{\delta\to 0}(1+\delta)^{1/\delta}$. Обозначим его через е. Тогда $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$. Положим $\ln x = \log_e x$. Тогда $(\ln x)' = 1/x$. ($\ln x$ – натуральный логарифм x.)

Док-во предл. 1) Положим $S_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$. Ясно, что (S_n) возрастает; имеем $n!\geqslant 2^{n-1} \Rightarrow S_n\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$. Поэтому $\exists\lim_{n\to\infty} S_n = e$, ясно, что $2<e\leqslant 3$.

2) Положим $t_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} t_n = e$. По формуле бинома $t_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\dots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots\frac{1}{n}$. Отсюда $t_n\leqslant S_n \Rightarrow \overline{\lim}\, t_n\leqslant \overline{\lim}\, S_n = e$. Далее, при $n\geqslant m$: $t_n\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\dots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$. Устремляя n к ∞ при фиксированном m, получаем, что $\underline{\lim}\, t_n > S_m$; устремляя теперь m к ∞, видим, что $\underline{\lim}\, t_n \geqslant e$. Итак, $\overline{\lim}\, t_n = \underline{\lim}\, t_n = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = e$. Другой способ док-ва: применив к числам 1, $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n}$, ..., $1+\frac{1}{n}$ ($(1+\frac{1}{n})$ берется n раз) нер-во Коши, получим, что $t_n\leqslant t_{n+1}$. Т.к. $t_n\leqslant S_n\leqslant 3$, последовательность (t_n) ограничена $\Longrightarrow$ имеет предел.

3) Докажем, что $\lim_{\delta\to 0+}(1+\delta)^{1/\delta} = e$. Пусть $\frac{1}{n+1}\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{n}$. Тогда $(1+\frac{1}{n})^n\leqslant(1+\delta)^{1/\delta}\leqslant(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим требуемое.

4) Наконец, докажем, что $\lim_{\delta\to 0-}(1+\delta)^{1/\delta} = e$. Имеем $\lim_{\delta\to 0-}(1+\delta)^{1/\delta} = \lim_{\delta\to 0+}(1-\delta)^{-1/\delta} = \lim_{\delta\to 0+}\left[(1+\frac{\delta}{1-\delta})^{\frac{1-\delta}{\delta}}\right]^{\frac{1-\delta}{\delta}}$. Поскольку ф-ция x^y непр. по (x,y), из 3) вытекает, что последний предел равен е. Предл. доказано.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ сходится к е очень быстро: $0<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\cdot(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\,n}$. Приближенное значение: е =2,71828. Более точно е = 2,718281828... (формула для запоминания: "2,7+дважды год рождения Льва Толстого).

Предложение. е иррационально. Док-во. из полученной оценки вытекает, что $\forall n\geqslant 1\ \exists\, m\in\mathbb{N}:\ 0<n!e-m<1$. Если бы е было рациональным, то $n!e\in\mathbb{N}$ при некотором n – противоречие.

Ш. Эрмит в 1873 г. доказал, что е трансцендентно.

Семинар "Производящие функции"

Идея производящей функции: последовательности $(a_0, a_1, \ldots)$ сопоставляют функцию $G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ Информацию о последовательности получают изучая эту функцию. Например, $\sum a_i = G(1)$

Пример. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}}\right) - 1.$

Положим $G(z) = \sum_k k z^{k-1}$ Имеем: $G(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum z^k\right) = \frac{1}{(1-z)^2}$,

откуда $\sum_k \frac{k}{2^{k-1}} = G\left(\frac{1}{2}\right) = 4$, и наш предел равен 3.

Обоснование метода: существует число $R \left(= 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ такое, что ряд $\sum a_n z^n$ (абсолютно) сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. В круге $|z| < R$ законны все дальнешие преобразования. Часто можно не заботиться о сходимости, рассматривая ряды как формальные.

Рассмотрим основные операции над последовательностями и производящимии функциями, а также некоторые их свойства.

1. Линейность: если $G_1(z) = \sum a_n z^n$, $G_2(z) = \sum b_n z^n$, α, β — константы, то $\alpha G_1(z) + \beta G_2(z) = \sum (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$.

2. Сдвиг: Если $G(z)$ — производящая функция для $a_0, a_1, \ldots$, то $z^n G(z)$ — производящая функция для $\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ нулей}}, a_0, a_1, \ldots$.

Далее, $\left(G(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{n-1} z^{n-1}\right)/z^n$ — производящая функция для $(a_n, a_{n+1}, \ldots)$.

Примеры. 1) Пусть $G(z)$ — производящая функция последовательности $(1, 1, 1, \ldots)$. Тогда $zG(z)$ — производящая функция $(0, 1, 1, \ldots) \Rightarrow G(z) - G(z)\cdot z$ — производящая функция для $(1, 0, 0, \ldots)$, т.е. $G(z) - zG(z) = 1 \Rightarrow G(z) = \frac{1}{1-z}$ — сумма геометрической прогрессии.

2) Числа Фибоначчи. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$. $G(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n = z + \sum_{n\geq 2} F_n z^n = z + \sum_{n\geq 1} F_n z^{n+1} + \sum_{n\geq 0} F_n z^{n+2} = z + z G(z) + z^2 G(z) \Rightarrow G(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$

Применим это для получения явной формулы для F_n: $G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi z} - \frac{1}{1-\hat{\varphi} z}\right)$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Отсюда $G(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} (\varphi^n - \hat{\varphi}^n) z^n \Rightarrow \underline{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \hat{\varphi}^n)}$.

3. Умножение. Если $G_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $G_2(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, то $G_1(z)\cdot G_2(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1) z + \ldots$ — производящая функция послед. $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}$.

Пример. Производящая функция для частных сумм $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ исходной последовательности равна $\frac{1}{1-z} G(z)$

Часто возникает сумма $C_n = \sum_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ Тогда удобно брать производящие ф-ции вида $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$, поскольку $\frac{C_n}{n!} = \sum_k \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$

4. Замена переменной. $G(cz)$ — производящая функция для $(a_0, ca_1, c^2 a_2, \ldots)$ Применим это для прореживания последовательностей. Очевидно,

$$\frac{1}{2}\left(G(z) + G(-z)\right) = a_0 + a_2 z^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(G(z) - G(-z)\right) = a_1 z + a_3 z^3 + \ldots$$

Как извлекать каждый третий член? Пусть $\zeta = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Имеем

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$
$$G(\zeta z) = a_0 + a_1 \zeta z + a_2 \zeta^2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$
$$G(\zeta^2 z) = a_0 + a_1 \zeta^2 z + a_2 \zeta z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

$\Rightarrow$ $a_0 + a_3 z^3 + a_6 z^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(G(z) + G(\zeta z) + G(\zeta^2 z)\right)$

$a_1 z + a_4 z^4 + a_7 z^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left(G(z) + \zeta^2 G(\zeta z) + \zeta G(\zeta^2 z)\right)$

$a_2 z^2 + a_5 z^5 + \ldots = \ldots$

5. Дифференцирование и интегрирование. Если $G(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ то $G'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$. $\int_0^z G(t)\,dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

Итак, дифференцированием можно умножить n-ый член последовательности на многочлен от "n" (а интегрированием — на многочлен от "$1/n$").

Примеры. $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots$,

$$-\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$$

6. Конкретные производящие функции:

Биномиальная формула: $(1+z)^r = 1 + rz + \frac{r(r-1)}{2} z^2 + \ldots + \binom{r}{n} z^n + \ldots$

Это верно при $(r \in \mathbb{Z}^+ \text{ и } \forall z)$ или $(|z| < 1 \text{ и } \forall r)$.

При $n\in\mathbb{N}$ имеем: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$. При $n\in-\mathbb{N}$ имеем: $\frac{1}{(1-z)^{n+1}}=$
$=\sum_{k\geq 0}\binom{-n-1}{k}\cdot(-z)^k=\sum_{k\geq 0}\frac{(-n-1)(-n-2)\dots(-n-k)}{k!}(-z)^k=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}z^k$

(Сделать самим и получить тот же результат дифференцированием ряда $\frac{1}{1-z}$.)

Аналоги биномиальной формулы:

I) $z(z+1)\dots(z+n-1)\overset{def}{=}\sum_k\left[{n\atop k}\right]z^k$; числа $\left[{n\atop k}\right]$ называются числами Стирлинга I-го рода.

2) $\frac{1}{(1-z)(1-2z)\dots(1-nz)}=\sum_k\left\{{n+k\atop n}\right\}\cdot z^k$; числа $\left\{{n\atop k}\right\}$ – числа Стирлинга 2-го рода.

3) q – биномиальная формула: $(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\cdot\ldots\cdot(1+q^{n-1}z)=\sum_k\binom{n}{k}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}\cdot z^k$.

Свойства чисел $\left[{n\atop k}\right],\left\{{n\atop k}\right\},\binom{n}{k}_q$: они определены при $n,k\in\mathbb{Z}^+$ и отличны от 0 только если $n\geq k\geq 0$. При этом $\left[{n\atop 0}\right]=0$, $\left\{{n\atop 0}\right\}=0$, $\binom{n}{0}_q=1$, $\left[{n\atop n}\right]=\left\{{n\atop n}\right\}=\binom{n}{n}_q=1$, если $n>0$; $\left[{0\atop 0}\right]=\left\{{0\atop 0}\right\}=1$.

Комбинаторный смысл коэффициентов.

а) $\left[{n\atop k}\right]$ – число перестановок n элементов, имеющих ровно k циклов.

б) $\left\{{n\atop k}\right\}$ – число разбиений множества из n элементов на k непустых непересекающихся подмножеств (=(число сюръекций множества из n элементов на множество из k элементов), деленное на k!).

в) Если q – натуральное число, и существует конечное поле $\mathbb{F}_q$ из q элементов, то $\binom{n}{k}_q$ – число k-мерных подпространств в n-мерном векторном пространстве над $\mathbb{F}_q$.

г) Явная формула для $\binom{n}{k}_q$: $\binom{n}{k}_q=\frac{\Phi_q(n)}{\Phi_q(k)\Phi_q(n-k)}$ где $\Phi_q(n)=(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)$. (См. ниже задачи 15-16).

Задачи по теме "Производящие функции"

I. Пусть последовательность $(a_0, a_1,\dots)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\dots+c_ma_{n-m}$ $(n\geq m)$. Доказать, что производящая функция этой последовательности есть полином, деленный на $1-c_1z-c_2z^2-\dots-c_mz^m$

2. Для каждых m и r напишите явную формулу для $\sum_{n\equiv r \bmod m}a_nz^n$

3. Пусть $H_k=(1+1/2+1/3+\dots+1/k)$. Вычислить производящую функцию для (H_k) /Ответ: $-1/(1-z)\cdot\ln(1-z)$/.

4. Вычислить $\left[{n\atop 1}\right],\left\{{n\atop 1}\right\},\binom{n}{1}_q$ и $\left[{n\atop 2}\right],\left\{{n\atop 2}\right\},\binom{n}{2}_q$ (ответ: $\left[{n\atop 1}\right]=(n-1)!$, $\left\{{n\atop 1}\right\}=1$, $\binom{n}{1}_q=\frac{q^n-1}{q-1}$, $\left[{n\atop 2}\right]=(n-1)!\cdot(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1})$; $\left\{{n\atop 2}\right\}=2^{n-1}-1$, $\binom{n}{2}_q=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}$).

б) Доказать рекуррентные соотношения:

$$\left[{n\atop k}\right]=\left[{n-1\atop k-1}\right]+(n-1)\left[{n-1\atop k}\right],\quad \left\{{n\atop k}\right\}=\left\{{n-1\atop k-1}\right\}+k\left\{{n-1\atop k}\right\},$$

$$\binom{n}{k}_q=q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q+\binom{n-1}{k}_q$$

5. Вычислить сумму $\sum_{0\leq k\leq n}F_kx^k$

6. Показать, что сумма $\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}F_{n+k}$ есть число Фибоначчи.

7. Пусть $a_0=0$; $a_1=1$; $a_n=a_{n-1}+6a_{n-2}$ (при $n\geq 2$). Найти явную формулу для a_n.

8. Найти производящую функцию для последовательности $(a_n=2^n+3^n)$.

9. Найти производящую функцию для $p(n)$ – числа разбиений n в сумму натуральных чисел (разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми).

10. Пусть $G(z)$ – производящая функция последовательности $(a_0,a_1,\dots)$. Для всех $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}$ выразить сумму $\sum_{n\equiv r(\bmod m)}a_nz^n$ через $G(z)$.

II. Положим $x^{\underline{n}}=x(x-1)\dots(x-n+1)$. Докажите, что два базиса $\{x^n, n\geq 0\}$ и $\{x^{\underline{n}}, n\geq 0\}$ в пространстве многочленов связаны между собой следующим образом:

$$x^n=\sum_k\left\{{n\atop k}\right\}x^{\underline{k}};\quad x^{\underline{n}}=\sum_k(-1)^{n-k}\left[{n\atop k}\right]x^k.$$

I2. Доказать, что сумма $1^n+2^n+3^n+\ldots+N^n$ равна $\sum_k \frac{1}{k+1}\left\{{n \atop k}\right\}(N+1)^{\underline{k+1}}$
Выпишите ответ явно для n = 2,3,4.

I3. Доказать тождество: $(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} \cdot y^{\underline{n-k}}$

I4. Вычислить сумму $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots$

I5. Докажите следующие утверждения: (а) $\left[{n \atop k}\right]$ есть число перестановок n элементов, имеющих ровно к циклов.

(б) $\left\{{n \atop k}\right\}$ есть число разбиений множества из n элементов на к непустых подмножеств.

(в) Если q -натуральное число и существует конечное поле $\mathbb{F}_q$ из q элементов, то $\binom{n}{k}_q$ есть число к-мерных подпространств в n-мерном векторном пространстве над $\mathbb{F}_q$.

I6. Пусть $\varphi_q(n)=(q-1)(q^2-1)\ldots(q^n-1)$. Докажите, что $\binom{n}{k}_q = \dfrac{\varphi_q(n)}{\varphi_q(k)\cdot\varphi_q(n-k)}$

I7. Докажите тождества:

$$(e^z-1)^k = k!\sum_n \left\{{n \atop k}\right\}\frac{z^n}{n!};$$

$$(-\ln(1-z))^k = k!\sum_n \left[{n \atop k}\right]\frac{z^n}{n!}$$

$$z^k e^z = k!\sum_n \binom{n}{k}\frac{z^n}{n!}$$

I8* Решите задачи 50-56 книги Г.Полиа, Г.Сеге, "Задачи и теоремы из анализа", т.I, отдел I, § 4.

I9. Числа Бернулли B_k ($k \geq 0$) определяются формулой $\dfrac{z}{e^z-1} = \sum_{k\geq 0}\dfrac{B_k\cdot z^k}{k!}$

а) вычислить B_k при $k \leq 4$.
б) Доказать, что $B_3=B_5=B_7=\ldots=0$.
в) Доказать, что при $n>1$ $\sum_k \binom{n}{k} B_k = B_n$

ЗАДАЧИ.

I. Мощность множеств

I. Доказать, что множество всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$ счетно.

2. Доказать, что множество всех алгебраических числе (корней многочленов с целыми коэффициентами) счетно.

3. Доказать, что множество попарно непересекающихся кругов на плоскости не более, чем счетно.

4. То же, заменив круги восьмерками (парой внешне касающихся окружностей).

5. То же, заменив круги буквами "Т".

6. Пусть $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ – семейство положительных вещественных чисел, такое, что сумма любого его конечного подсемейства не превосходит фиксированного числа А. Доказать, что L конечно или счетно.

7. Доказать, что следующие множества имеют мощность континуум:
а) множество иррациональных чисел;
б) множество трансцендентных чисел (т.е. неалгебраических чисел);
в) множество всех последовательностей вещественных чисел;
г) $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
д) множество всех непрерывных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

8.* Доказать, что если объединение двух множеств имеет мощность континуум, то хотя бы одно из них имеет мощность континуум.

в) то же для счетного объединения множеств.

9.* Покрыть круг непересекающимися отрезками (точка не является отрезком).

2. Вещественные и комплексные числа

I. Можно ли упорядочить поле комплексных чисел?

2. Можно ли упорядочить какое-либо конечное поле?

3. Привести пример поля, допускающего два упорядочения.

4.* Привести пример упорядоченного поля, в котором не верна теорема Архимеда.

5.* Доказать, что $\mathbb{R}$ однозначно определяется аксиомами. Более точно: если $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ – два упорядоченных полных поля, то существует единственный изоморфизм упорядоченных полей $\mathbb{R}_1\to\mathbb{R}_2$.

6. Доказать, что $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$ для любых комплексных z_1 и z_2.

7. Если А и В – непустые подмножества $\mathbb{R}$ и $x\leqslant y$ для всех $x\in A$, $y\in B$, то $\sup A\leqslant\inf B$.

8. Пусть $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ – семейство непустых мажорируемых множеств в $\mathbb{R}$; пусть $A=\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda$, и В – множество чисел $\sup A_\lambda$. Тогда А и В мажорируемы одновременно и $\sup A=\sup B$.

9. Доказать, что для любого $x>0$, $n\in\mathbb{N}$ существует единственное число $y>0$, такое, что $y^n=x$.

IO. Доказать мультипликативный принцип Архимеда: для каждых $x>1$, $y>0$ найдётся $n\in\mathbb{Z}$: $x^{n-1}\leqslant y<x^n$.

II. Дать строгое обоснование позиционной системы счисления (например, десятичной).

I2. Доказать, что $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

I3. Проверить аксиомы поля в $\mathbb{C}$.

ЗАДАЧИ ПО МЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВАМ

I. Пусть S – сфера в $\mathbb{R}^3$ /с эвклидовым расстоянием/ с центром /0,0,I/2/ и радиусом I/2, а P= /0,0,I/ – ее "северный полюс". Определим биекцию $f: \mathbb{C} \to S\setminus\{P\}$, полагая $f(z)$ равным точке пересечения луча $/z, P/$ с S. /Мы считаем, что $\mathbb{C}$ вложено в $\mathbb{R}^3$: $/x + iy/ \mapsto /x,y,0/$/

а/ найти явные формулы для f и обратной биекции f^{-1}.

б/ положим $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и продолжим f до биекции $f: \bar{\mathbb{C}} \to S$: $f(\infty) = P$. Перенесем эвклидово расстояние с S на $\bar{\mathbb{C}}$ с помощью биекции f. Задайте получающееся расстояние в $\bar{\mathbb{C}}$ явной формулой. Каковы шары и сферы в $\bar{\mathbb{C}}$? /$\bar{\mathbb{C}}$ называется расширенной комплексной плоскостью./

2. Пусть d – расстояние в множестве E, удовлетворяющее ультраметрическому неравенству: $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$ $\forall x,y \in E$.

а/ покажите, что если $d/x,y/ \neq d/y,z/$, то $d/x,z/ = \max(d(x,y), d(y,z))$;

б/покажите, что любой открытый шар $U/x;r/$ является и открытым и замкнутым множеством, кроме того $U/x;r/ = U/y;r/$ $\forall y \in U/x;r/$. То же верно для замкнутых шаров;

в/ покажите, что если два шара в E имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

г/ покажите, что расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса r, содержащимися в шаре радиуса r, равно r.

3. а/ Если $x \notin B/a;r/$, то $d/x, B/a;r// \geq d/x,a/ - r$.

б/ $\forall x,y \in E$, $A \subset E$ $|d/x,A/ - d/y,A/| \leq d/x,y/$.

4. Доказать, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ есть объединение не более чем счетного семейства непересекающихся интервалов в $\bar{\mathbb{R}}$.

5. Множество A в метрическом пространстве E называется локально замкнутым, если $\forall x \in A$ существует окрестность V точки x в E, такая, что $A \cap V$ замкнуто в V. Показать, что локально замкнутые множества – это в точности множества вида $U \cap F$, где U – открыто, а F – замкнуто в E.

6. Семейство непустых открытых множеств $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ в E называется базой, если любое открытое множество в E есть объединение некоторого подсемейства этого семейства. Доказать, что $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ – база $\Leftrightarrow \forall x \in E$ и открытого $U \ni x$ существует $\lambda \in L$ такое, что $x \in V_\lambda \subset U$.

7. Доказать, что следующие условия эквивалентны: /I/ В E есть счетная база открытых множеств; /2/ в E есть счетное всюду плотное множество. Пространство E, удовлетворяющее этим условиям, называется сепарабельным.

8. Доказать, что все следующие пространства сепарабельны: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, любое подпространство сепарабельного пространства, произведение двух сепарабельных пространств.

9. Доказать, что если A плотно относительно B, и B плотно относительно C, то A плотно относительно C.

10. Доказать, что объединение открытого множества и множества его внешних точек всюду плотно.

II. Доказать, что любые два непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности. Более точно, любые два A и B, такие, что $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$, имеют непересекающиеся окрестности.

Задачи по метр.пр-вам. Продолжение.

12. Пусть $f: E \to F$ и $g: F \to G$ – непр.биекции. Д-ть,что если $g \circ f : E \to G$ – гомеоморфизм, то f и g – гомеоморфизмы.

13. Пусть $a_n \geq 0$, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Док-ть, что существует бесконечно много таких номеров n, что $a_n \geq a_m$ для всех $m \geq n$.

14. Пусть (x_n) – последовательность в метрическом пр-ве E. Д-ть, что если сходятся три подпоследовательности $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ и (x_{3n}) то и (x_n) также сходится.

15. Пусть (x_n) – последовательность в $\overline{\mathbb{R}}$, E – мн-во ее предельных точек. Положим $\overline{\lim}\, x_n = \sup E$, $\underline{\lim}\, x_n = \inf E$ /верхний и нижний пределы последовательности/.

а/ Положим $x'_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\}$. Д-ть, что $\{x'_n\}$ сходится и $\lim_{n \to \infty} x'_n = \overline{\lim}\, x_n$ /аналогично для $\underline{\lim}$/.

б/ Положим $I = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \geq x_n$ для почти всех $n\}$ /т.е. всех, кроме конечного числа/. Доказать, что I – промежуток в $\overline{\mathbb{R}}$, содержащий $+\infty$, и $\inf I = \overline{\lim}\, x_n$.

в/ Последовательность (x_n) сходится $\Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$.

Задачи по полным метрическим пространствам.

1. Пусть E, E' – метр.пр-ва, $A \subset E$ и $f: A \to E'$ – некоторое отображение. Колебание f на A есть по определению $\operatorname{diam} f(A)$. Если $a \in \bar{A}$, то колебание $\Omega_A(a; f)$ отображения f в точке a по множеству A есть $\inf \operatorname{diam} f(V \cap A)$ /V пробегает окрестности точки a/. Док-ть, что если E' полно, то $\exists \lim_{\substack{x \in A \\ x \to a}} f(x) \Leftrightarrow \Omega_A(a; f) = 0$.

2. Пусть E – ультраметрическое пр-во. Д-ть, что последовательность (x_n) в E есть последовательность Коши $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

3. Пусть X – произвольное мн-во, E – мн-во всех последовательностей (x_n) в X. Если $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ – различные точки E, то положим $K(x,y)$ равным наименьшему номеру n, для которого $x_n \neq y_n$. Положим $d(x,y) = 1/K(x,y)$ при $x \neq y$ и $d(x,x) = 0$. Докажите, что d превращает E в ультраметрическое полное пр-во.

4. Построить полное метрическое пр-во и вложенную последовательность замкнутых шаров в нем, имеющую пустое пересечение.

5. Доказать,что пр-во полно $\Leftrightarrow$ всякая стягивающаяся последовательность (F_n) замкнутых мн-в в нем /т.е. $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ и $\operatorname{diam} F_n \to 0$ /имеет непустое пересечение.

6*. /Теорема Бэра/. Д-ть, что в полном пр-ве пересечение любой последовательности открытых всюду плотных мн-в всюду плотно.

7*. /Принцип сжимающих отображений./ Пусть E – полно и $f: E \to E$ – сжимающее, /т.е. $\forall x, y \in E$ $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, где $0 \leq \alpha < 1$ /. Тогда f имеет ровно одну неподвижную точку, т.е. такую точку, что $f(x) = x$.

8**. Пусть A – подпространство полного метр. пр-ва E. Д-ть, что A гомеоморфно полному пр-ву $\Leftrightarrow$ A есть пересечение счетного числа открытых множеств в E.

9. Пусть A – плотное мн-во в метр. пр-ве E, и $f: A \to E'$ – непрерывное отображ.
а/док.,что для того, чтобы существовало непр. отобр. $\bar{f}: E \to E'$, совпадающее с f на A $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x \in E$ $\exists \lim_{\substack{y \to x \\ y \in A}} f(y)$. Отображение $\bar{f}$ единственно.
б/ Предположим, что f равномерно непрерывно и E' –полно. Д-ть, что $\bar{f}$ существует и равномерно непрерывно.

10. Пусть $\mathbb{Q}_p$ – пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической метрике. Д-ть, что сложение и умножение в $\mathbb{Q}$ однозначно продолжаются по непрерывности на $\mathbb{Q}_p$ и превращают $\mathbb{Q}_p$ в поле / оно наз. полем p-адических чисел./

11*. а/ Пусть $f: E \to E'$ – отображ. метр. пр-в. Д-ть, что мн-во $\{x \in E \mid f$ непрерывно в $x\}$ есть пересечение счетного числа открытых мн-в в E.
б/ определим функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{если } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ – несократимая дробь} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррационально.} \end{cases} \quad / q \geq 1 /$$

/ $f(x)$ наз. ф-ией Римана/. Д-ть, что $f(x)$ непр. в $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ x иррационально.
в/ Существует ли функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных? /указание: воспользоваться частью а/ и задачей 6/./

Задачи по нормированным пространствам

1. Пусть E – нормир.пр-во. а) Д-ть, что замыкание открытого шара $U(a;r)$ есть $B(a;r)$, а внутренность $B(a;r)$ есть $U(a;r)$.
б) Док-ть, что открытый шар $B(a;r)$ гомеоморфен всему E.

2. Док-ть, что замыкание вект.подпр-ва в нормированном пр-ве есть векторное подпр-во.

3. Пусть E – нормир.пр-во, F – банахово пр-во, G – подпр-во, плотное в E, и $f:G\to F$ – непр. лин. отображ. Д-ть, что существует и единственное непр. лин. отображ. $\bar f:E\to F$, являющееся продолжением f.

4. Пусть E,F – нормир.пр-ва, $A:E\to F$ – лин. отображ. Д-ть, что если для всякой последовательности (x_n), стремящейся к 0 в E, последовательность $(A(x_n))$ в F ограничена, то A –непрерывен.

5. Пусть E, F, G – нормир. пр-ва, $A\in\mathcal{L}(E,F)$, $B\in\mathcal{L}(F,G)$. Док-ть, что $\|B\circ A\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$.

6. Док-ть, что для любого нормированного пр-ва E над K отображение $E\to\mathcal{L}(K,E)$, ставящее в соответствие вектору $a\in E$ элемент $\theta_a:\lambda\mapsto\lambda a$, есть линейная изометрия E на $\mathcal{L}(K,E)$.

7. Докажите, что $C_0^*=\ell_1$, $\ell_1^*=\ell_\infty$ и $\ell_p^*=\ell_q$, где $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. (Равенства означают, что эти пр-ва линейно изометричны.)

8. а) Пусть H – замкнутая гиперплоскость в нормир. пр-ве E, задаваемая уравнением $A(x)=0$, где A – непр. линейная форма на E. Доказать, что $\forall\ a\in E$ расстояние $d(a,H)$ равно $|A(a)|/\|A\|$.

б) Пусть H – замкнутая гиперплоскость в пр-ве C_0 Банаха (т.е. в пр-ве последовательностей, стремящихся к 0), заданная уравнением $A(x)=0$, где $A((\alpha_n))=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}\alpha_n$. Доказать, что для всякого $a\notin H$ расстояние от a до H не достигается.

9. Доказать, что нормированное пр-во, в котором существует компактная сфера, конечномерно.

10. Д-ть, что в нормированном пр-ве достигается расстояние от данной точки до произвольного конечномерного подпр-ва.

11. Доказать, что нормир.пр-во является банаховым $\Longleftrightarrow$ любой абсолютно сходящийся ряд в нем сходится.

12. Пусть E – нормир. пр-во, L – его замкнутое подпр-во.

а) Д-ть, что функция $\|X\|=\inf\limits_{x\in X}\|x\|$ превращает фактор-пр-во $V=E/L$ в нормированное пр-во (здесь X – эл-т V, т.е. подмн-во в E вида x_0+L).

б) Док-ть, что если E – банахово, то и V –банахово. (Указание: воспользоваться предыдущей задачей).

13. Пусть $A=(a_{ij})$ – $n\times n$ – матрица, рассматриваемая как линейный оператор $K^n\to K^n$. Вычислить $\|A\|$, если K^n рассматривается с нормой:

а) $\|\ \|_1$; б) $\|\ \|_\infty$; в*) $\|\ \|_2$ (ответ в последнем случае: $\|A\|=\sqrt{\lambda}$, где λ – наибольшее собственное значение матрицы A^*A, а A^*– матрица, сопряженная к A)

14. Пусть F – пр-во непрерывных финитных ф-ий на $\mathbb{R}$ (т.е. каждая $f\in F$ равна 0 вне некоторого интервала (зависящего от f)) с нормой $\|f\|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. Д-ть, что пополнение F состоит из всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к 0 при $|x|\to\infty$.

Задачи по рядам

1. Пусть $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ – биекция. Для $n\in\mathbb{N}$ положим $\varphi(n)$ равным наименьшему числу отрезков $[a,b]$ в $\mathbb{N}$, таких, что их объединение есть множество $\sigma(\{1,2,\dots,n\})$.
а) Предположим, что $\varphi(n)$ ограничена на $\mathbb{N}$. Доказать, что $\forall$ сходящего-

ся ряда (x_n) в нормированном пр-ве E ряд $(x_{\sigma(n)})$ также сходится и к той же сумме. (x_n)

б*) Предположим, что $\varphi(n)$ неограничена на $\mathbb{N}$. Построить сходящийся ряд в $\mathbb{R}$, для которого ряд $(x_{\sigma(n)})$ расходится.

2. Пусть $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция, такая, что $|\sigma(n)-n|$ ограничено на $\mathbb{N}$. Доказать, что справедливо заключение задачи I а).

3. Пусть $a_{mn} = \frac{1}{m^2-n^2}$ при $m \neq n$, $a_{nn}=0$. Д-ть, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{mn})$
(Указание: внутренние суммы считаются явно!)

4. Док-ть, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ сходится, а его произведение по Коши с самим собой расходится.

5. Д-ть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p \leq 1$.

6. С помощью формулы Эйлера посчитать суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ $(x \in \mathbb{R})$.

7. а) Д-ть теорему Римана: пусть (a_n) – неабсолютно сходящийся ряд в $\mathbb{R}$, и $\alpha \leq \beta$ – любые два числа в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\exists$ биекция $\sigma : \mathbb{N} - \mathbb{N}$, такая, что частичные суммы $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ удовлетворяют условиям $\varliminf\limits_{n\to\infty} S'_n = \alpha$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} S'_n = \beta$.

б) Докажите, что в конечномерном пр-ве (нормированном) коммутативноая сходимость эквивалентна абсолютной сходимости.

в) В пр-ве C_0 Банаха (последовательности, стремящиеся к 0, с $\|(x_n)\| = \sup|x_n|$) положим $e_n=(0,0,\dots,0,1,0,\dots)$ (единица на n-ом месте). Доказать, что $\forall\, x = (x_1,x_2,\dots) \in C_0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ в C_0 коммутативно сходится к x. Привести пример, когда этот ряд сходится неабсолютно.

8. Пусть $a_n \geq 0$, и ряд (a_n) расходится. Что можно сказать о сходимости следующих рядов: $\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)$, $\left(\frac{a_n}{1+na_n}\right)$, $\left(\frac{a_n}{1+n^2a_n}\right)$, $\left(\frac{a_n}{1+a_n^2}\right)$?

9. Пусть $a_n \geq 0$, и ряд (a_n) сходится. Д-ть, что ряды $\left(\frac{\sqrt{a_n}}{n}\right)$, (a_n^2), (a_n^3) сходятся.

10. Доказать, что если ряд (a_n) сходится, и (b_n) – монотонная ограниченная последовательность, то ряд $(a_n b_n)$ сходится (признак Абеля).

11. Найти радиус сходимости степенных рядов:

$$1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3\dots \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

12. Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum c_n z^n$ равен 1, и $c_0 > c_1 > c_2 > \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Доказать, что ряд $\sum c_n z^n$ сходится в каждой точке окружности $|z|=1$, за исключением, быть может, точки $z = 1$. (В частности, это верно для $c_n = \frac{1}{n}$.)

Задачи по предкомпактным и компактным пр-вам /продолжение/

8*. Пусть (E, d) – метрич.пр-во такое, что E ограничено. Пусть $\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{B}(E)$ – мн-во всех непустых замкнутых подмн-в в E. Для любых A и $B \in \mathcal{C}(E)$ положим $\rho(A,B) = \sup\limits_{x\in A} d(x,B)$ и $h(A,B) = \sup(\rho(A,B), \rho(B,A))$.

а/ док-ть, что h является расстоянием в $\mathcal{C}(E)$ /хаусдорфово расстояние/.
б/ д-ть, что если E полно, то $\mathcal{C}(E)$ полно.
в/ д-ть, что если E предкомпактно, то и $\mathcal{C}(E)$ предкомпактно.

/Значит, если E компактно, то $\mathcal{C}(E)$ компактно/.

ЗАДАЧИ ПО МОНОТОННЫМ ФУНКЦИЯМ, ЛОГАРИФМАМ, ЭКСПОНЕНТАМ И Т.Д.

I. Д-ть, что отображения $(x,y) \mapsto \max(x,y)$ и $(x,y) \mapsto \min(x,y)$ равномерно непрерывны в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. а/ Д-ть, что ф-ция $(x,y) \mapsto x+y$ имеет предел по мн-ву $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в каждой точке $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, кроме двух точек $(-\infty,+\infty)$ и $(+\infty,-\infty)$. Если хотя бы одна из координат a,в равна $+\infty$ /соотв. $-\infty$ /, то этот предел равен $+\infty$ /соотв. $-\infty$/.

б/ Д-ть, что ф-ция $(x,y) \mapsto xy$ имеет предел по мн-ву $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ в каждой точке $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ кроме 4-х точек $(0,+\infty)$, $(0,-\infty)$, $(+\infty,0)$, $(-\infty,0)$. Если хотя бы одна из координат a,в бесконечна и a и в имеют одинаковые знаки /соотв. противоположные/, то этот предел равен $+\infty$ /соотв. $-\infty$/.

в/ Д-ть, что ф-ия $(x,y) \mapsto x^y$ имеет предел по мн-ву $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ в каждой точке $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, принадлежащей замыканию $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$, кроме точек $(0,0)$, $(+\infty,0)$, $(I,-\infty)$, $(I,-\infty)$.

3. Пусть T – некоторый промежуток, и f: $T \to \mathbb{R}$ – монотонная функция. Д-ть, что f непрерывна всюду, кроме м.б. не более чем счетного числа точек.

4. Пусть $g: (0,I] \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция, такая что $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Д-ть, что существует непрерывная невозрастающая функция g_1 и непрерывная неубывающая ф-ия g_2 на $[0,I]$ такие, что $g_1(0) = g_2(0) = 0$, и $g_1(x) \le g(x) \le g_2(x)$ при $x \in (0,I]$.

5. а/ Пусть f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$. Д-ть, что либо $f \equiv 0$ либо $f(x) \equiv x$.

б/ Пусть f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – непр. и удовлетворяет условиям $f(z+w) = f(z) + f(w)$; $f(zw) = f(z) \cdot f(w)$. Д-ть, что либо $f \equiv 0$, либо $f(z) \equiv z$, либо $f(z) \equiv \overline{z}$.

6. Д-ть, что $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

7. а/ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Д-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

б/ Пусть $a_n > 0$ $\forall n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Д-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a$.

в/ Д-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ /указание: применить б/ для $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

8*. Пусть $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S$. Д-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{1\le k\le n} \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \le e \cdot S$

9*. Пусть $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Д-ть, что $\lim \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \ge e$.

10*. Решите задачи I67 – I72 из книги Г.Полиа и Г.Сеге, т.I, отд.I, гл.4, §2. (Эти задачи не обязательны, поскольку требуют дифференциального исчисления, но чрезвычайно полезны!)

II. а) Д-ть, что $0 < e - \left(I + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n \cdot n!}$

б) Д-ть, что e иррационально.