Математический анализ. III семестр. 1981-1982гг.

Тема I. Несобственные интегралы.

В прошлом семестре мы изучили интегралы от правильных функций на отрезках в $\mathbb{R}$. Напомним, что функция $f:[a,b]\to E$, где E – некоторое банахово пространство, называется правильной, если она есть предел равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций. Эквивалентное определение: f имеет односторонние пределы в каждой точке $[a,b]$. Было доказано, что правильная функция f имеет примитивную g, т.е. g непрерывна на $[a,b]$, и ее производная существует и равна f всюду, кроме счетного числа точек /точнее, f непрерывна всюду кроме счетного числа точек, и $g'(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности f/. Функция g определена однозначно с точностью до константы, и по определению $\int_a^b f(x)\,dx = g(b)-g(a)$.

Заметим, что определение интеграла имеет смысл и когда функция f не предполагается правильной, а точки a и b могут равняться $\pm\infty$ /при этом требуется, чтобы примитивная функция g была непрерывна в концах отрезка/. Мы ограничимся случаем, когда f кусочно правильна; это означает, что существует такое конечное подмножество $\Omega\subset[a,b]$, что f правильна на любом отрезке, не пересекающемся с Ω.

Предложение I. Пусть $[a,b]$ - отрезок в $\overline{\mathbb{R}}$, и $f:[a,b]\to E$ - кусочно правильная функция. Пусть $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$ - конечная цепочка точек. Тогда для существования $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы существовал каждый интеграл $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$, и в этом случае $\int_a^b f(x)dx = \sum\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$.

Доказательство. Пусть g_i - примитивная функции f на отрезке $[c_{i-1},c_i]$. Ясно, что можно подобрать такие константы $k_1,\ldots,k_{n-1}$, что функция g, равная g_i+k_i на $[c_{i-1}, c_i]$, непрерывна на $[a,b]$. Очевидно, g является примитивной f на $[a,b]$, и $g(b)-g(a)=\sum(g(c_i)-g(c_{i-1}))=\sum(g_i(c_i)-g_i(c_{i-1}))$. Это доказывает утверждение о достаточности и формулу для $\int_a^b f(x)dx$; утверждение о необходимости очевидно.

Доказанное предложение позволяет ограничиться рассмотрением случаев, когда $a \in \mathbb{R}$ и f правильна на любом $[a,c] \subset [a,в)$, либо $в \in \mathbb{R}$ и f правильна на любом $[c,в] \subset (a,в]$; мы будем формулировать все утверждения только для первого случая, поскольку на второй всё переносится очевидным образом.

Предложение 2. /Критерий Коши/

В первом случае мы будем говорить, что f правильна на $[a,в)$; ясно, что в этом случае для интегрируемости f на $[a,в]$ необходимо и достаточно, чтобы $\int_a^c f(x)dx$ стремился к пределу при $c \to в$, и этот предел равен $\int_a^b f(x)dx$. Вместо " f интегрируема на $[a,в]$ " часто говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится .

Пусть f правильна на $[a,в)$. Тогда для интегрируемости f на $[a,в]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $\left\|\int_c^d f(x)dx\right\| < \varepsilon$ выполнялось при всех c и d , достаточно близких к в.

Доказательство очевидно.

Следствие. Если $[a,в] \subset \mathbb{R}$, а f -правильна и ограничена на $[a,в)$, то f интегрируема на $[a,в]$. Для доказательства достаточно применить к $\int_c^d f(x)dx$ теорему о среднем.

Если $[a,в]$ бесконечен либо f неограничена, $\int_a^b f(x)dx$ часто называют несобственным. Примеры сходящихся несобственных интегралов : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Все свойства интегралов, рассмотренные в предыдущем семестре, с помощью предельного перехода переносятся на случай несобственных интегралов. В частности, формулы интегрирования по частям и замены переменной принимают следующий вид: Интегрирование по частям. Пусть $(x,y) \longrightarrow [x,y]$ - непрерывное билинейное отображение банаховых пространств $E \times F \to G$, а $f : [a,в) \to E$ и $g : [a,в) \to F$ - примитивные правильных на $[a,в)$ функций f' и g'. Положим $[f,g]\big|_a^b = \lim_{x \to b-} [f,g]\big|_a^x$. Тогда, если два из трех выражений $[f,g]\big|_a^b$, $\int_a^b [f(t),g'(t)]dt$, $\int_a^b [f'(t),g(t)]dt$ имеют смысл, то имеет смысл и третье, и

$$\int_a^b [f(t),g'(t)]dt = [f,g]\big|_a^b - \int_a^b [f'(t),g(t)]dt.$$

Замена переменной. Пусть $f : [a,в) \to \mathbb{R}$ - непрерывная монотонно неубывающая функция, являющаяся примитивной правильной на $[a,в)$ функции f' , а g - правильная вектор-функция на $[f(a), f(b-))$. Тогда если один из интегралов

$\int_a^b g(f(t))f'(t)dt$, $\int_{f(a)}^{f(b-)} g(u)du$ сходится, то сходится и другой, и они равны. Доказательства оставляются слушателям.

Признаки сходимости несобственных интегралов. Понятие сходимости несобственного интеграла обобщает понятие сходимости ряда. В самом деле, сопоставим каждой последовательности $u_1, u_2, \ldots$ точек E функцию $f:[1,+\infty)\to E$, равную u_n на $[n,n+1)$. Легко видеть, что сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, и значение интеграла равно сумме этого ряда /докажите сами!/. Исследование несобственных интегралов будет параллельно исследованию рядов.

Определение. Говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, если сходится $\int_a^b \|f(x)\|dx$.

Предложение 3. Абсолютно сходящийся интеграл сходится и $\|\int_a^b f(x)dx\| \leq$ $\leq \int_a^b \|f(x)\|dx$. Доказательство сразу вытекает из критерия Коши и теоремы о среднем.

В связи с понятием абсолютной сходимости особый интерес представляют ~~рядн с~~ интегралы от неотрицательных функций.

Предложение 4. Пусть f - правильная неотрицательная функция на $[a,b)$. Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы множество $\{\int_c^d f(x)dx \mid [c,d]\subset[a,b)\}$ было ограничено сверху, и $\int_a^b f(x)dx$ равен $\sup$ этого множества.

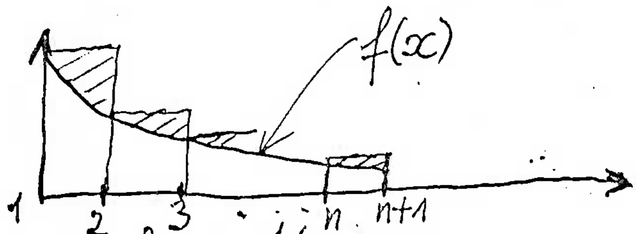
Предложение 5. /Принцип сравнения/. Пусть f и g - правильны на $[a,b)$, и $0\leq f(x)\leq g(x)$ в точках непрерывности f и g. Если g интегрируема на $[a,b]$, то интегрируема и f, и $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

Доказательства предложений 4 и 5 очевидны.

Эталонные функции: Поскольку примитивная функции x^α при $\alpha\neq -1$ равна $x^{\alpha+1}/\alpha+1$, то при $a>0$ интеграл $\int_a^{+\infty} x^\alpha dx$ сходится при $\alpha<-1$ и расходится при $\alpha\geq -1$, а интеграл $\int_0^a x^\alpha dx$ сходится при $\alpha>-1$ и расходится при $\alpha\leq -1$.

Применения: 1. Если f - невозрастающая неотрицательная функция на $[1,+\infty)$, то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ эквивалентна сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ / это интегральный признак Коши сходимости ряда/. Например, мы получаем другое доказательствотого, что ряд $\sum \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2. Принцип сравнения позволяет получать различные оценки для остатков и частичных сумм как сходящихся, так и расходящихся рядов. Например, при $p > 1$ имеем $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$. Другой пример: для f такой, как в предыдущем пункте, последовательность $u_n = f(1)+\ldots+f(n) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ неубывает и ограничена сверху числом $f(1)$; значит, она имеет предел /см. рис./



В частности, при $f(x) = 1/x$ получаем, что существует $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln(n+1)\right)$; он называется константой Эйлера.

Для исследования неабсолютно сходящихся интегралов часто полезно применять интегрирование по частям /этот прием аналогичен суммированию по частям, применявшемуся выше для рядов/. Мы предоставляем читателям самостоятельно сформулировать и доказать для несобственных интегралов аналоги признаков Дирихле и Лейбница /см. также задачи/. Разберем только один пример, доказав сходимость интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Достаточно доказать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; интегрируя по частям, видим, что он равен $-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$, а последний интеграл сходится уже абсолютно.

Тема 2. Интегралы, зависящие от параметра.

Пусть $[a,b]$ - отрезок в $\mathbb{R}$, Y - некоторое множество, E - банахово пространство, и $f : [a,b] \times Y \longrightarrow E$ - отображение, такое, что при каждом $y \in Y$ функция $x \longrightarrow f(x,y)$ интегрируема на $[a,b]$. Функция $y \longrightarrow J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ называется интегралом, зависящим от параметра. Мы найдем условия, когда $J(y)$ является непрерывной, дифференцируемой или интегрируемой функцией от y, и когда дифференцирование и интегрирование можно выполнять " под знаком интеграла". Сначала рассмотрим собственный интеграл, т.е. будем считать, что $[a,b]\subset\mathbb{R}$, и f-правильна на $[a,b]$ при всех у.

Предложение I. Пусть Y - метрическое пространство, $y_0\in Y$; предположим, что функции $f_y(x)=f(x,y)$ равномерно сходятся к $f(x,y_0)$ при $y\to y_0$. Тогда функция $J(y)$ непрерывна в точке y_0. /Иными словами, условие означает, что отображение $y\longmapsto f_y(x)$ из Y в пространство правильных функций на $[a,b]$ непрерывно в y_0 /. Доказательство очевидно.

Следствие /"непрерывность интеграла по параметру"/ Если Y - компакт, $[a,b]\subset\mathbb{R}$, и $f: [a,b]\times Y\longrightarrow E$ - непрерывное отображение, то $J(y)$ непрерывно на Y. Доказательство: поскольку $[a,b]\times Y$ - компакт, f - равномерно непрерывна, а значит, удовлетворяет условиям предложения I.

Пусть теперь $Y=[c,d]$ - отрезок в $\mathbb{R}$. Производную функции $y\longmapsto f(x,y)$ /при фиксированном х/ будем называть <u>частной производной f по у</u> и обозначать $f'_y(x,y)$.

Предложение 2. Пусть $f: [a,b]\times[c,d]\longrightarrow E$ - функция, удовлетворяющая следующим условиям: /I/ для всех х и у существует частная производная $f'_y(x,y)$; /2/ для всех $y\in[c,d]$ функции $x\longmapsto f(x,y)$ и $x\longmapsto f'_y(x,y)$ правильны на $[a,b]$; /3/ для некоторого $y_0\in(c,d)$ функции /от х/ $f'_y(x,y)$ равномерно сходятся к $f'_y(x,y_0)$ при $y\longrightarrow y_0$. Тогда функция $J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ дифференцируема в точке y_0, и $J'(y_0)=\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx$.

Доказательство: используя теорему о среднем и теорему о конечных приращениях, получаем цепочку неравенств: $\left\|\frac{J(y)-J(y_0)}{y-y_0}-\int_a^b f'_y(x,y_0)dx\right\|\le$

$$\le\frac{1}{|y-y_0|}\cdot\int_a^b\|f(x,y)-f(x,y_0)-f'_y(x,y_0)\cdot(y-y_0)\|dx\le\int_a^b\sup_{z\in(y_0,y)}\|f'_y(x,z)-f'_y(x,y_0)\|dx$$
$$\le(b-a)\cdot\sup_x\sup_{z\in(y_0,y)}\|f'_y(x,z)-f'_y(x,y_0)\|,$$

В силу условия /3/ правая часть стремится к 0 при $y\longrightarrow y_0$, что и требуется.

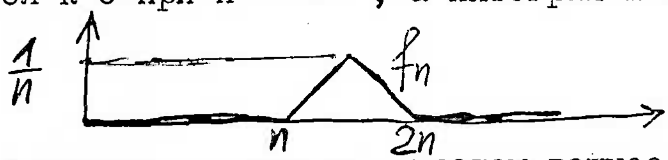
Следствие. Если $f'_y(x,y)$ существует на $[a,b]\times[c,d]$ и является непрерывной функцией от (x,y), то функция $J(y)$ дифференцируема и $J'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx$. Доказательство- такое же, как у предыдущего следствия.

Предложение 3. /"перемена порядка интегрирования"/. Если функция f непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, то $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$.

/обе части имеют смысл в силу следствия из предложения I/.

Доказательство. Для $z \in [c,d]$ положим $F(z)=\int_c^z J(y)\,dy$, $h(x,z)=\int_c^z f(x,y)\,dy$ и $G(z)=\int_a^b h(x,z)\,dx$. Мы должны доказать, что $F(d)=G(d)$. Поскольку $F(c)=G(c)=0$, достаточно доказать, что функции F и G дифференцируемы на (c,d) и $F'(z)=G'(z)$ на (c,d). В силу следствия из предл. I функция $J(y)$ непрерывна, так что $F'(z)=J(z)$. С другой стороны, $h'_z(x,z)=f(x,z)$, поэтому в силу следствия из предл. 2, $G'(z)=\int_a^b h'_z(x,z)\,dx=\int_a^b f(x,z)\,dx=J(z)=F'(z)$, что и требуется.

Перейдем к рассмотрению несобственных интегралов, зависящих от параметра, т.е. будем считать, что точка в может равняться $+\infty$, и функция $x \longmapsto f(x,y)$ предполагается лишь правильной на $[a,b)$ и интегрируемой на $[a,b]$ при всех $y \in Y$. В этом случае все предыдущие предложения становятся неверны. Пример: функции f_n, показанные на рисунке, равномерно на $[1,+\infty)$ сходятся к 0 при $n \to \infty$, а интеграл каждой из них равен 1/2.



Чтобы исправить положение, введем важное понятие равномерной сходимости.

Определение. Пусть $f:[a,b]\times Y \longrightarrow E$ такова, что при всех $y \in Y$ функция $x \longmapsto f(x,y)$ правильна на $[a,b)$ и интегрируема на $[a,b]$. Говорят, что интеграл $J(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ <u>сходится равномерно по $y \in Y$</u>, если функции $J_{b'}(y)=\int_a^{b'} f(x,y)\,dx$ равномерно сходятся к $J(y)$ при $b' \in [a,b)$, $b' \longrightarrow b$.

Предложение. Рассмотрим одно из предложений I-3 или следствий из них. Предположим, что f удовлетворяет условиям этого предложения на каждом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$ и что все входящие в формулировку интегралы по $[a,b]$, зависящие от параметра y, сходятся равномерно по $y \in Y$. Тогда это предложение выполняется и для $J(y)$.

Доказательство. По условию, наше предложение справедливо для функции $J_{b'}(y)=\int_a^{b'} f(x,y)\,dx$ при всех $b' \in [a,b)$. Выберем последовательность $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ точек $[a,b)$, сходящуюся к b. По условию, последовательность функций $J_{b_1}(y), J_{b_2}(y), \dots$ равномерно сходится к функции $J(y)$.

Применив к этой последовательности соответствующую теорему из предыдущего семестра /о непрерывности, дифференцируемости или интегрируемости предела последовательности функций/, мы получим требу[illegible]ое утверждение.

Читателю предлагается подро[illegible]но разобрат[illegible] в формулировках и доказательствах отдельно для всех слу[illegible]в. Заметим [illegible]о в формулировке предложения о дифференцировании под зн[illegible]теграл[illegible] нужно требовать равномерной сходимости интеграла $J(y)$ [illegible]аточно потребовать равномерной сходимости интеграла $\int_a^b f'_y(x,y)\,dx$; равномерная сходимость $J(y)$ будет отсюда следовать.

Прежде чем переходить к применениям, приведем полезное достаточное условие равномерной сходимости несобственного интеграла.

Определение. Пусть $(f_y: [a,b] \to E)_{y \in Y}$ - семейство функций, правильных на $[a,b)$. Говорят , что интеграл $\int_a^b f_y(x)\,dx$ сходится нормально, если существует числовая функция g , правильная на $[a,b)$, интегрируемая на $[a,b]$ и такая, что $\|f_y(x)\| \le g(x)$ для всех x и y. Функция g называется мажорантой семейства.

Предложение. Нормально сходящийся интеграл сходится абсолютно и равномерно по y. Доказательство очевидно.

Применения: I. Вычисление интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Введем параметр, положив $f(x,y) = e^{-xy} \frac{\sin x}{x}$. Мы вычислим интеграл $J(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx$, воспользовавшись предложением о дифференцировании под знаком интеграла. Имеем [illegible]) $= -e$ [illegible]. Примитивная функции $x \to -e^{-xy} \sin x$ равна Φ_y [illegible] $\frac{\cos}{y^2}$ [illegible] $\sin x$ /такие примитивные вычислялись в пре[illegible]е/. [illegible] интеграл $\int_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится при $y > 0$ и равен $-\frac{1}{y^2+1}$. Более того, для каждого $y_0 > 0$ семейство функций $\{x \mapsto f'_y(x,y)\}$ при $y \in [y_0, +\infty)$ имеет мажоранту e^{-xy_0}, поэтому интеграл $\int_0^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно при $y \ge y_0$. Отсюда следует, что $J(y)$ сходится равномерно при $y \ge y_0$, и $J'(y) = -\frac{1}{y^2+1}$ при $y > 0$. Значит, при $y > 0$ $J(y) = -\operatorname{arctg} y + C$. Поскольку при $y > 0$

$$|J(y)| \le \int_0^{+\infty} \left|e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\right| dx \le \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx = -\frac{e^{-xy}}{y}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y},$$

мы видим, что $J(y) \longrightarrow 0$ при $y \longrightarrow +\infty$. Значит, $C = \frac{\pi}{2}$, и, окончательно, при $y > 0$ $J(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y$. Чтобы завершить вычисление, покажем, что $J(y)$ непрерывно в точке 0. Для этого достаточно показать, что $J(y)$ равномерно сходится при $y \geq 0$. Оценим остаток $R(b,y) = \int_b^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$, воспользовавшись тем, что $|\Phi_y(x)| \leq e^{-xy} \frac{1+y}{1+y^2} \leq \frac{1+y}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2} \leq 1 + 1/2 = 3/2$ при $x, y \geq 0$, и интегрируя по частям: $R(b,y) = -\frac{\Phi_y(x)}{x}\Big|_b^{+\infty} - \int_b^{+\infty} \frac{\Phi_y(x)}{x^2} dx$, откуда $|R(b,y)| \leq \frac{3}{2b} + \frac{3}{2b} = \frac{3}{b}$. Итак, при $y \geq 0$ остаток $R(b,y)$ стремится к 0 равномерно по y, т.е. $J(y)$ сходится равномерно. Значит, $J(0) = \lim_{y \to 0+} J(y) = \frac{\pi}{2}$. Следствие: при $y \in \mathbb{R}$ интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$ равен $\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} y$, т.е. $\pi/2$ при $y > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ при $y < 0$ и 0 при $y = 0$ /это получается заменой $t = x \cdot |y|$ /. Это дает еще один пример того, что при отсутствии равномерной сходимости интеграл может быть разрывной функцией от параметра.

2. Эйлеровы интегралы. а/ Г-функция. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Очевидно, он сходится при $x > 0$. Теорема. При $x > 0$ $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, /определение Г-функции будет напомнено в ходе доказательства/. Док-во: Обозначим наш интеграл временно через $\Gamma_I(x)$; для каждого натурального n положим $\Pi(x,n) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$. Сделав замену $t = n\tau$, получим: $\Pi(x,n) = n^x \cdot \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{x-1} d\tau$. Для вычисления этого интеграла применим формулу интегрирования по частям n-ого порядка. Напомним, что она имеет вид $\int_a^b f^{(n)} g\, dt = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-1-k)} g^{(k)}\right)\Big|_a^b + (-1)^n \cdot \int_a^b f g^{(n)} dt$.

Применив ее к функциям $f(\tau) = \tau^{x+n-1}/x(x+1)\cdots(x+n-1)$ и $g(\tau) = (1-\tau)^n$, получим, что $\Pi(x,n) = \frac{n!\, n^x}{x\cdot(x+1)\ldots(x+n-1)}$. По определению, $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \Pi(x,n)$, так что $\Gamma_I(x) - \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \{e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n\} \cdot t^{x-1} dt$. Лемма : при $0 \leq t \leq n$ имеем $0 \leq e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$. В силу этой леммы $\left|\int_0^n \{e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n\} t^{x-1} dt\right| \leq \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} \cdot t^{x+1} dt \leq \Gamma_1(x+2)/n$.

Устремляя n к ∞, получаем, что $\Gamma_I(x) = \Gamma(x)$, что и требуется. Осталось доказать лемму. Из разложения функций e^y и $(1-y)^{-1}$ в ряды видно, что при $0 \leq y \leq 1$ имеем $1+y \leq e^y \leq (1-y)^{-1}$. Подставив $y = \frac{t}{n}$, получим, что $(1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t} \leq (1+\frac{t}{n})^{-n}$, откуда $0 \leq e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n = e^{-t}\{1 - e^t (1-\frac{t}{n})^n\} \leq e^{-t} \cdot \{1 - (1-\frac{t^2}{n^2})^n\}$. Воспользуемся известным неравенством Бернулли: $(1-a)^n \geq 1-na$ при $0 \leq a \leq 1$ /его легко доказать индукцией по n или с помощью дифференциального исчисления/. Применяя его к $a = \frac{t^2}{n^2}$ и подставляя в последнюю оценку, получаем утверждение леммы. Теорема доказана.

Задача. Обосновав законность дифференцирования под знаком интеграла, доказать формулу для производных Г-функции: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^k dt$.

Доказаннная теорема с помощью замены переменных позволяет свести к Г-функции ряд других интересных несобственных интегралов. Например, делая замену $t=\tau^2$, получаем, что $\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty}\tau^{2x-1}e^{-\tau^2}d\tau$. В частности, $\int_0^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau = 1/2\cdot\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ /напомним, что $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ в силу формулы дополнения $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \pi/\sin\pi x$ / - это интеграл Гаусса.

б/ Бета-функция. Положим $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$; ясно, что этот интеграл сходится при $p>0$ и $q>0$. Другие представления:

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^{p-1}}{(1+\theta)^{p+q}}d\theta = 2\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cdot\cos^{2q-1}\varphi\, d\varphi$$

/замены переменных $t=\theta/1+\theta = \sin^2\varphi$/. Теорема. $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ при $p,q>0$.

Следствие. Интеграл $\int_0^{\pi/2}\sin^m\varphi\cos^n\varphi\, d\varphi$ сходится при $m,n>-1$ и равен $\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})/2\cdot\Gamma((m+n+2)/2)$. В частности, при $m=n=0$ мы вновь получаем, что $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Доказательство теоремы: Имеем $\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty}t^{p+q-1}e^{-t}dt$. Сделав замену $t=(1+\theta)y$, получим $\Gamma(p+q)/(1+\theta)^{p+q} = \int_0^{+\infty}y^{p+q-1}\cdot e^{-y}\cdot e^{-\theta y}dy$.

Умножив это равенство на θ^{p-1} и проинтегрировав по θ от 0 до $+\infty$, мы получим, что $\Gamma(p+q)\cdot B(p,q) = \int_0^{+\infty}d\theta\cdot\{\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\cdot\theta^{p-1}e^{-\theta y}dy\}$.

Легко видеть, что если изменить в этом интеграле формально порядок интегрирования, то получится $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$; мы должны обосновать такую замену. Положим $\Pi_n = \int_{1/n}^n d\theta\cdot\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\theta^{p-1}e^{-\theta y}dy$; тогда по определению несобственного интеграла $\Gamma(p+q)\cdot B(p,q) = \lim_{n\to\infty}\Pi_n$. Ясно, что подинтегральная функция в Π_n имеет при $\theta\in[1/n,n]$ интегрируемую мажоранту вида $C\cdot y^{p+q-1}\cdot e^{-y}$, поэтому можно изменить порядок интегрирования, и мы имеем:

$$\Pi_n=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}dy\cdot\int_{1/n}^n\theta^{p-1}e^{-\theta y}d\theta = \int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}\cdot\int_{y/n}^{yn}t^{p-1}e^{-t}dt.$$

Отсюда следует, что $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) - \Pi_n = \int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}dy\cdot\{(\int_0^{y/n}+\int_{yn}^{+\infty})t^{p-1}e^{-t}dt\}$.

Ясно, что оба слагаемых в правой части неотрицательны; оценим их сверху. Для каждого $h>0$ мы имеем оценку

$$(*)\ \int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}dy\cdot\int_0^{y/n}t^{p-1}e^{-t}dt=\int_0^h y^{q-1}e^{-y}dy\cdot\int_0^{y/n}t^{p-1}e^{-t}dt+\int_h^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}dy\int_0^{y/n}t^{p-1}e^{-t}dt\le$$

$$\le\Gamma(q)\cdot\int_0^{h/n}t^{p-1}e^{-t}dt+\Gamma(p)\cdot\int_h^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}dy$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon>0$. Выберем и зафиксируем такое большое h, чтобы второе слагаемое в правой части (*) стало меньше $\varepsilon/2$. Ясно, что при достаточно больших n первое слагаемое также станет меньше $\varepsilon/2$; это показывает, что первое слагаемое в $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) - \Pi_n$ стремится к 0 при $n\to\infty$. Точно такое же рассуждение доказывает, что второе слагаемое также стремится к 0 при $n\to\infty$. Итак, $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \lim_{n\to\infty}\Pi_n = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$, что и требуется.

Тема 3. Локальное исследование функций. Асимптотические разложения.

Пусть X - метрическое пространство, x_0 - предельная точка X. Мы будем изучать поведение функций $f(x)$ при $x \to x_0$. Знания того, что f имеет предел при $x \to x_0$, и даже знания его значения часто бывает недостаточно: например, все функции $f(x) = x$, x^2 и $\sqrt{x}$ стремятся к $+\infty$ при $x \to +\infty$, а $f(x+1) - f(x)$ стремится соответственно к 1, $+\infty$ и 0.

Мы будем изучать локальные свойства функций. Дадим точное определение. Для каждого нормированного пространства V обозначим через $\mathcal{H}(V)$ множество функций со значениями в V, каждая из которых определена в некоторой /своей/ проколотой окрестности точки x_0. Введем на $\mathcal{H}(V)$ отношение эквивалентности, отждествляющее две функции, если они совпадают в некоторой окрестности x_0. Ясно, что это действительно отношение эквивалентности; множество классов эквивалентности обозначим через $\tilde{\mathcal{H}}(V)$. Свойство функции из $\mathcal{H}(V)$ или отношение между функциями называется локальным, если оно зависит только от классов эквивалентности входящих в него функций. Таким образом, рассматриваемые далее отношения будут по-существу отношениями на $\tilde{\mathcal{H}}(V)$; мы будем обозначать одинаково функцию из $\mathcal{H}(V)$ и ее класс эквивалентности в $\tilde{\mathcal{H}}(V)$. Пример: на $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$ определено отношение частичного порядка „$\le$"; в терминах функций, $f \le g$ означает, что $f(x) \le g(x)$ в некоторой окрестности x_0. Пространства типа $\tilde{\mathcal{H}}(V)$ часто оказываются полезными в анализе и алгебре. Отметим, что $\tilde{\mathcal{H}}(V)$ в отличие от $\mathcal{H}(V)$, естественно наделяется структурой векторного пространства.

Слабые отношения.

Всюду в дальнейшем для $f \in \mathcal{H}(V)$ через $\|f\|$ обозначается функция $x \mapsto \|f(x)\|$ из $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ /а не число, как раньше/.

Опр. Пусть $f \in \mathcal{H}(V_1)$, $g \in \mathcal{H}(V_2)$. Мы пишем $f \precsim g$ /при $x \to x_0$/ и говорим, что f подчинена g, если $\|f\| \le k \cdot \|g\|$ в $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$ для некоторого $k>0$ /иными словами, это значит, что $\|f(x)\| \le k \cdot \|g(x)\|$ в некоторой окрестности x_0/. Примеры: 1/ для любого скаляра $a \ne 0$ отношения $f \precsim g$ и $f \precsim ag$ эквивалентны; в частности, $f \precsim af$. 2/ „$f \precsim 1$" означает, что f ограничена в некоторой окрестности x_0. 3/ $\sin^2 x \precsim \sin x$ при $x \to +\infty$.
4/ $xy \precsim x^2+y^2$ при $(x,y) \to (0,0)$ в $\mathbb{R}^2$.

Формальные свойства: 1/ $f \precsim g,\ g \precsim h \Rightarrow f \precsim h$. 2/ $f_1 \precsim g,\ f_2 \precsim g \Rightarrow f_1+f_2 \precsim g$ /заметим, что из $f_1 \precsim g_1$, $f_2 \precsim g_2$ не следует $f_1+f_2 \precsim g_1+g_2$/. 3/ Если $(x,y) \to [xy]$ - непрерывное билинейное отображение нормированных пространств $V_1 \times V_2 \to V$, $f_1 \in \mathcal{H}(V_1)$, $f_2 \in \mathcal{H}(V_2)$, $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ и $f_1 \precsim g_1$, $f_2 \precsim g_2$, то $[f_1 f_2] \precsim g_1 g_2$.

Опр. Пусть $f, g \in \mathcal{H}(V)$. Мы пишем $f \asymp g$, если $f \precsim g$ и $g \precsim f$. Примеры: Ясно, что это- отношение эквивалентности на $\mathcal{H}(V)$ и $\tilde{\mathcal{H}}(V)$.
1/ Для $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ имеем $f \asymp 1 \Leftrightarrow \exists a>0, b>0$ такие, что $a \le |f(x)| \le b$

в некоторой окрестности $x_0 \Leftrightarrow \ln|f|$ ограничена в некоторой окрестности x_0. Говорят, что f логарифмически ограничена в некоторой окрестности x_0. 2/ При $a_0 \neq 0$ многочлен $a_0x^n + \ldots + a_n \asymp x^n$ при $x \to \infty$. 3/ При $x \to +\infty$ $\sin^2 x \not\asymp \sin x$. 4/ $x^2 + xy + y^2 \asymp x^2 + y^2$ при $(x,y) \to (0,0)$ в $\mathbb{R}^2$, а $xy \not\asymp x^2 + y^2$.

Отношения $f \preceq g$ и $f \asymp g$ называются слабыми. Функции f и g слабо сравнимы, если либо $f \preceq g$, либо $g \preceq f$. Пример не слабо сравнимых функций: I и $x \cdot \sin x$ при $x \to +\infty$.

Сильные отношения.

Опр. Пусть $f \in \mathcal{H}(V_1)$, $g \in \mathcal{H}(V_2)$. Мы пишем $f \ll g$ /при $x \to x_0$/ и говорим, что f пренебрежимо по сравнению с g, если $\|f\| \leq \varepsilon \|g\|$ в $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$ для любого $\varepsilon > 0$. Примеры: I/ для любого скаляра $a \neq 0$ отношения $f \ll g$ и $f \ll ag$ эквивалентны; $f \ll g \Rightarrow f \preceq g$; $f \ll f \Leftrightarrow f = 0$ в некоторой окрестности x_0. 2/ $f \ll 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. 3/ если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha < \beta$, то $x^\alpha \ll x^\beta$ при $x \to +\infty$; $x^\alpha \ll e^x$ при $x \to +\infty$. 4/ $x^2 + y^2 \ll |x| + |y|$ при $(x,y) \to (0,0)$ в $\mathbb{R}^2$. Формальные свойства: I/ $f \preceq g$, $g \ll h \Rightarrow f \ll h$ /аналогично, $f \ll g$, $g \preceq h \Rightarrow f \ll h$ /. 2/ $f \ll 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. 3/ если $f_1 \ll g_1$, $f_2 \preceq g_2$, то $[f_1 f_2] \ll g_1 g_2$.

Предложение-определение. Отношение "$f - g \ll f$" есть отношение эквивалентности в $\mathcal{H}(V)$. Оно обозначается через $f \sim g$. Имеем $f \sim g \Rightarrow f \asymp g$.

Док-во: Рефлексивность очевидна. Проверим симметричность: имеем $f - g \ll f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \|f(x)\|$ в некоторой окрестности x_0. С помощью неравенства треугольника отсюда следует, что $(1-\varepsilon)\|f(x)\| \leq \|g(x)\| \Rightarrow f \preceq g \Rightarrow f - g \ll f \preceq g \Rightarrow f - g \ll g$. Попутно мы доказали, что $f \sim g \Rightarrow f \asymp g$. Проверим транзитивность: имеем $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f - g \ll g$, $g - h \ll g \Rightarrow f - h \ll g$. Но мы уже доказали, что $g - h \ll g \Rightarrow g \preceq h$. Поэтому $f - h \ll h$, что и требуется.

Примеры: I/ если a - ненулевая константа, то $f \sim a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. 2/ При $a_0 \neq 0$ многочлен $a_0x^n + \ldots + a_n \sim a_0x^n$ при $x \to \infty$. 3/ $(1 + \frac{1}{x}) \cdot \sin x \sim \sin x$ при $x \to +\infty$. 4/ $e^z - 1 \sim z$ при $z \to 0$ в $\mathbb{C}$. Вообще, если f дифференцируемо в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0)$ при $x \to x_0$ /это эквивалентно определению производной/. 5/ Пусть при $x > 0$ $\pi(x)$ - количество простых чисел, не превосходящих x. Доказано, что $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ при $x \to +\infty$.

Предостережение. Из $f \sim g$ не следует, что $f - g \to 0$ при $x \to x_0$. Из $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ не следует даже, что $f_1 + f_2 \asymp g_1 + g_2$.

Предл. Если $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{H}(K)$ и $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$. Док-во: Имеем $f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1(f_2 - g_2) + (f_1 - g_1) g_2$. Используя перечисленные выше формальные свойства, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \preceq g_1,\ f_2 - g_2 \ll g_2 \Rightarrow f_1(f_2 - g_2) \ll g_1 g_2 \\ f_1 - g_1 \ll g_1,\ g_2 \preceq g_2 \Rightarrow (f_1 - g_1) g_2 \ll g_1 g_2 \end{array}\right] \Rightarrow f_1 f_2 - g_1 g_2 \ll g_1 g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$$

Отношения $f \ll g$ и $f \sim g$ называются <u>сильными</u>. Говорят, что f и g /сильно/ <u>сравнимы,</u> если либо $f \ll g$, либо $g \ll f$, либо $f \sim ag$ для некоторого $a \neq 0$.

Отношения сравнения между положительными функциями.

<u>Предл.</u> Пусть $g(x) > 0$ в некоторой окрестности x_0. Тогда:

$f \preceq g \Longleftrightarrow \frac{\|f\|}{g}$ ограничена в нек. окр. x_0.

$f \asymp g \Longleftrightarrow \frac{f}{g}$ логарифмически ограничена в нек. окр. x_0.

$f \ll g \Longleftrightarrow \frac{f}{g} \to 0$ при $x \to x_0$.

$f \sim g \Longleftrightarrow \frac{f}{g} \to 1$ при $x \to x_0$.

Если и $f(x) > 0$ в нек. окр. x_0, то f и g сравнимы $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g}$ /может быть, равный $+\infty$/. Доказательства оставляются читателю.

<u>Предл</u>. Пусть $f, g > 0$ в нек. окр. x_0. Тогда $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеем $f \asymp g \Longleftrightarrow f^\alpha \asymp g^\alpha$, $f \sim g \Longleftrightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$. Если $\alpha > 0$, то $f \preceq g \Longleftrightarrow f^\alpha \preceq g^\alpha$, $f \ll g \Longleftrightarrow f^\alpha \ll g^\alpha$; если же $\alpha < 0$, то $f \preceq g \Longleftrightarrow f^\alpha \succeq g^\alpha$, $f \ll g \Longleftrightarrow f^\alpha \gg g^\alpha$.

<u>Задача</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. Какие из следующих импликаций верны, а какие нет? /1/ $f \ll g \Rightarrow e^f \ll e^g$; /2/ $f \sim g \Rightarrow e^f \sim e^g$; /3/ $f \ll g \Rightarrow \ln f \ll \ln g$; /4/ $f \sim g \Rightarrow \ln f \sim \ln g$.

<u>О-пр.</u> Пусть $g > 0$ в нек. окр. x_0, и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ <u>или</u> $+\infty$. Говорят, что $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ <u>имеет порядок ρ относительно g</u> /где $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$/, если $\lim\limits_{x\to x_0} \ln|f|/\ln g = \rho$. Очевидно, если f имеет порядок ρ относительно g, то она имеет порядок $-\rho$ относительно g^{-1}, так что достаточно рассматривать случай, когда $g(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$.

<u>Предл</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, и $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$. Тогда

а/ f имеет порядок $+\infty$ относительно $g \Longleftrightarrow f \gg g^\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

б/ f имеет порядок $-\infty$ относительно $g \Longleftrightarrow f \ll g^\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

в/ f имеет конечный порядок ρ относительно $g \Longleftrightarrow g^\alpha \ll f \ll g^\beta$ при $\alpha < \rho < \beta$.

<u>Док-во</u> Докажем в/: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln|f|/\ln g = \rho \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0: (\rho - \varepsilon)\ln g(x) \leq \ln|f(x)| \leq (\rho+\varepsilon)\ln g(x)$ в нек. окр. $x_0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0: g(x)^{\rho-\varepsilon} \leq |f(x)| \leq g(x)^{\rho+\varepsilon}$ в нек. окр. x_0. Очевидно, это условие эквивалентно тому, что $g^\alpha \ll f \ll g^\beta$ при $\alpha < \rho < \beta$. Доказательства а/ и б/ аналогичны.

<u>Замечания</u>. 1/ g^α имеет порядок α относительно g. Однако из того, что f имеет конечный порядок ρ относительно g, <u>не</u> следует, что $f \sim a g^\rho$ для некоторой константы а. Например, любая логарифмически ограниченная функция имеет порядок 0 относительно g. 2/ Если f_1 имеет порядок ρ_1 относительно g, f_2 имеет порядок ρ_2 относительно g, и $\rho_1 + \rho_2$ определено, то $f_1 f_2$ имеет порядок $\rho_1 + \rho_2$ относительно g. 3/ Функция f может не иметь определенного порядка относительно g. Пример: $g(x) = x$, $f(x) = 1 + x^2 \sin^2 x$ /при $x \to +\infty$/.

<u>Задача</u>. Построить функцию, не сравнимую ни с одной степенью x при $x \to +\infty$.

<u>О- и о- символика.</u> Часто вместо $f \preceq g$ пишут $f = O(g)$, а вместо $f \ll g$:

$f=o(g)$. Если в одно равенство входят несколько функций вида $O(g)$ или $o(g)$, их обозначают $O_1(g)$, $O_2(g)$ и т.д. /либо все через $O(g)$, если это не может привести к недоразумению/. Упражнение: переписать в таких обозначениях все перечисленные выше свойства /например, $O(f)\cdot O(g) = O(fg)$, $O(f)+O(f)=O(f)$ /.

Шкалы сравнения, главные части и асимптотические разложения.

Опр. Пусть $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Подмножество $\mathcal{E}$ в $\mathcal{H}(K)$, состоящее из функций, не равных 0 в $\mathcal{H}(K)$, есть шкала сравнения, если $\forall f, g \in \mathcal{E}$ выполняется /ровно/ одно из трех отношений $f \ll g$, $g \ll f$ и $f=g$.

Ясно, что в $\mathcal{E}$ любое из отношений $f \simeq g$ или $|f| \sim a|g|$ при $a>0$ влечет за собой, что $f=g$. Очевидно, любое подмножество шкалы сравнения само является шкалой сравнения.

Примеры. 1/ $\{(x-a)^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ - шкала сравнения при $x \to a+$, а $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ - при $x \to +\infty$; 2/ При $z \in \mathbb{C}$, $z \to a$: $\{(z-a)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; 3/ Если a - точка нормированного пространства E, то $\{\|x-a\|^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ - шкала сравнения при $x \to a$; 4/ При $x \to +\infty$: $\{e^{P(x)} \mid P$ - многочлен над $\mathbb{R}$ без свободного члена$\}$; 5/ При $x \to +\infty$: $\{x^\alpha \cdot (\ln x)^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Опр. Пусть $\mathcal{E}$ - шкала сравнения и $f \in \mathcal{H}(V)$. Если существуют ненулевой вектор $a \in V$ и функция $g \in \mathcal{E}$, такие, что $f \sim ag$, то ag называется главной частью f относительно $\mathcal{E}$. Очевидно, главная часть может быть только одна. Ясно, что f имеет ту же главную часть относительно любой шкалы, содержащей $\mathcal{E}$. Примеры: 1/ Многочлен $a_0x^n + \ldots + a_n$ с $a_0 \neq 0$ имеет при $x \to +\infty$ главную часть a_0x^n относительно любой шкалы, содержащей x^n. Рациональная дробь $(a_0x^m + \ldots + a_m)/(b_0x^n + \ldots + b_n)$ с $a_0b_0 \neq 0$ имеет главную часть $\frac{a_0}{b_0} \cdot x^{m-n}$. 2/ Функция может быть сравнимой со всеми функциями шкалы и не иметь главной части относительно этой шкалы. Например, при $x \to +\infty$ $\sqrt{x}$ не имеет главной части относительно $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; $\ln x$ - относительно $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; $x^x = e^{x \cdot \ln x}$ - ни относительно $\{x^\alpha (\ln x)^\beta\}$, ни относительно $\{e^{P(x)}\}$.

Обобщение. Пусть f имеет главную часть $a_1 g_1$ относительно $\mathcal{E}$. Это значит, что $f - a_1g_1 \ll g_1$, т.е. для более точного исследования f нужно рассмотреть разность $f-a_1g_1$. Если она имеет главную часть a_2g_2, то, очевидно, $g_2 \ll g_1$ и $f - a_1g_1 - a_2g_2 \ll g_2$. Будем считать, что $\mathcal{E} = \{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A - линейно упорядочено и $\alpha < \beta \iff g_\alpha \gg g_\beta$.

Опр. Говорят, что $f \in \mathcal{H}(V)$ допускает асимптотическое разложение относительно $\mathcal{E}$ с точностью g_α, если существует семейство $(a_\lambda)_{\lambda \le \alpha}$ элементов V, из которых лишь конечное число отлично от 0 и такое, что $f - \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda \ll g_\alpha$. Сумма $\sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda$ есть асимптотическое разложение f с точностью g_α, $a_\lambda g_\lambda$ - его члены, a_λ - коэффициенты, и $r_\alpha = f - \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda$ - остаток разложения. Будем также писать $f = \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha)$.

Пример. Если f - /вектор/-функция вещественного переменного, имеющая к-ую производную в точке $c \in \mathbb{R}$, то ее разложение Тейлора $f(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + \ldots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\cdot(x-c)^k$ есть асимптотическое разложение с точностью $(x-c)^k$ относительно шкалы $\{(x-c)^n\}$.

Формальные свойства: I/ Если $f = \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha)$, то $\forall \beta < \alpha$ имеем $f = \sum_{\lambda \le \beta} a_\lambda g_\lambda + o(g_\beta)$ /асимпт. разложение можно свести к меньшей точности/ 2/ Если f_1 и f_2 из $\mathcal{H}(V)$ имеют асимпт. разложения $\sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda$ и $\sum_{\lambda \le \alpha} b_\lambda g_\lambda$ с одной точностью g_α, а c_1 и c_2 - скаляры, то $c_1 f_1 + c_2 f_2 = \sum_{\lambda \le \alpha} (c_1 a_\lambda + c_2 b_\lambda)\cdot g_\lambda + o(g_\alpha)$. Отсюда, в частности, вытекает единственность асимпт. разложения. В самом деле, достаточно показать, что в разложении $0 = \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha)$ все a_λ равны 0. Если это не так, и γ - наименьший индекс, для которого $a_\gamma \ne 0$, то $a_\gamma g_\gamma = -\sum_{\gamma < \lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha) \ll g_\gamma$ - противоречие! 3/ Если $f = \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha)$, и $a_\mu \ne 0$, то $a_\mu g_\mu$ есть главная часть $f - \sum_{\lambda < \mu} a_\lambda g_\lambda$.

Замечания. I/ Асимпт. разложение $f = \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha)$ еще ничего не говорит о значении f в любой данной точке. Чтобы получить такую информацию, нужна еще оценка остатка. Например, если f имеет $(k+1)$-ую производную, то остаточный член в формуле Тейлора к-ого порядка имеет вид $O((x-c)^{k+1})$ с явной оценкой константы. 2/ Функции, встречающиеся в классическом анализе, часто допускают асимптотическое разложение с любой точностью. Его записывают в виде $f \sim \sum_\lambda a_\lambda g_\lambda$; эта запись означает, что $f = \sum_{\lambda \le \alpha} a_\lambda g_\lambda + o(g_\alpha)$ для всех α. Этот ряд может не сходиться ни в какой точке. Однако даже в этом случае он часто оказывается более удобным для численных расчетов, чем сходящиеся ряды! Типичное поведение этого ряда состоит в том, что остаток на каждом шагу имеет порядок первого отброшенного члена, а члены ряда сначала быстро убывают, а затем начинают возрастать /в каждой точке/.

Нахождение асимптотических разложений есть скорее искусство, чем наука. Мы рассмотрим несколько приемов, часто оказывающихся полезными.

Сумма. Пусть f_1 и f_2 допускают асимпт. разложения с точностью g_α и g_β, соответственно. Ограничивая эти разложения точностью $g_{min(\alpha,\beta)}$ и беря их сумму, мы получим разложение $f_1 + f_2$ с этой точностью.

Произведение. Пусть, скажем, f и g - числовые функции, причем $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ и $g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Тогда $f(x)\cdot g(x) = a_0 b_1 x + (a_0 b_2 + a_1 b_1)\cdot x^2 + o(x^2)$. Предоставляем читателю дать общую формулировку для вектор-функций /вместо произведения как всегда рассматривается непрерывное билинейное отображение нормированных пространств/ и любой шкалы $\mathcal{E}$ /здесь нужно предполагать, что произведение любых функций из $\mathcal{E}$ снова лежит в $\mathcal{E}$; все наши примеры обладают этим свойством/.

Комбинируя эти приемы, мы получим асимпт. разложение любого многочлена от функций, чьи асимпт. разложения нам известны.

Композиция. Пусть $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ имеет $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, и допускает асимпт. разложение относительно шкалы $\mathcal{E}$ с некоторой точностью. Пусть h - /вектор-/ функция, n раз дифференцируемая в точке 0. Тогда $h(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + o(t^n)$ при $t \to 0$, откуда $h \circ f(x) = c_0 + c_1 f(x) + \ldots + c_n f^n(x) + o(f^n)$ при $x \to x_0$. Предположим снова, что $\mathcal{E}$ замкнуто относительно взятия произведений. Тогда многочлен $c_0 + c_1 f + \ldots + c_n f^n$ допускает асимпт. разложение относительно $\mathcal{E}$ с известной точностью. Но и остаток $o(f^n)$ допускает оценку относительно $\mathcal{E}$. В самом деле, если f имеет главную часть $a_\gamma g_\gamma$ относительно $\mathcal{E}$, то $o(f^n) = o(g_\gamma^n)$; если же асимпт. разложение f - нулевое, т.е. $f = o(g_\alpha)$, то $o(f^n) = o(g_\alpha^n)$. В любом случае мы получим асимптотическое разложение $h \circ f$ с некоторой точностью.

Изложенные приемы позволяют находить асимпт. разложения большинства элементарных функций. Разложим, например, функцию $(1+x)^{1/x}$ при $x \to +\infty$. Имеем $(1+x)^{1/x} = \exp(1/x \cdot \ln(1+x))$. Далее, $1/x \cdot \ln(1+x) = 1/x \cdot \ln x + 1/x \cdot \ln(1+1/x) = \ln x/x + 1/x^2 - 1/2x^3 + o(1/x^3)$. Поскольку $e^y = 1 + y + y^2/2 + y^3/6 + o(y^3)$ при $y \to 0$, мы получаем $(1+x)^{1/x} = 1 + \ln x/x + (\ln x)^2/2x^2 + 1/x^2 + (\ln x)^3/6x^3 + o((\ln x)^3/x^3)$. Заметим, что если записать остаток для e^y в виде $O(y^4)$, то мы можем уточнить наше разложение, заменив его остаток на $\ln x/x^3 - 1/2x^3 + o(1/x^3)$.

Дальше мы будем заниматься функциями действительного переменного. Мы будем исследовать поведение функций при $x \to +\infty$; случаи $y \to -\infty$, $y \to a+$ и $y \to a-$ сводятся к этому с помощью замен $x = -y$, $x = 1/(y-a)$ и $x = -1/(y-a)$. Нас будет в основном интересовать поведение примитивной данной функции.

Интегрирование и дифференцирование отношений сравнения.

Интегрирование слабых отношений. Предл. Пусть f и g - правильные функции на $[a,+\infty)$, причем g неотрицательна и $\int_a^{+\infty} g(t)dt > 0$ /может равняться $+\infty$/. Тогда $f \preceq g \Rightarrow \int_a^x f(t)dt \preceq \int_a^x g(t)dt$ при $x \to +\infty$. В частности, если $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ абсолютно сходится. Док-во: по условию, найдутся числа $b \geq a$ и $k_1 > 0$, такие, что $\|f(x)\| \leq k_1 g(x)$ при $x \geq b$. Отсюда $\|\int_b^x f(t)dt\| \leq \int_b^x \|f(t)\|dt \leq k_1 \int_b^x g(t)dt$. С другой стороны, выберем b настолько большим, что $\int_a^b g(t)dt > 0$. Тогда $\|\int_a^b f(t)dt\| \leq k_2 \int_a^b g(t)dt$ для некоторого $k_2 > 0$. Беря $k = \max(k_1, k_2)$, видим, что $\|\int_a^x f(t)dt\| \leq k \cdot \int_a^x g(t)dt$, что и требуется.

Следствие. Если f и g положительны на $[a,+\infty)$, и $f \asymp g$ при $x \to +\infty$, то $\int_a^x f(t)dt \asymp \int_a^x g(t)dt$!

Интегрирование сильных отношений. Предл. Пусть f и g - такие же, как в предыдущем предложении. Тогда: а/ Если $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ сходится, то из того, что $f \ll g$ /соотв. $f \sim cg$, где $c = const$/ вытекает, что $\int_x^{+\infty} f(t)dt \ll \int_x^{+\infty} g(t)dt$ /соотв. $\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim c \cdot \int_x^{+\infty} g(t)dt$/. б/ Если $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ расходится, то из того, что $f \ll g$ /соотв. $f \sim cg$ /, вытекает, что $\int_a^x f(t)dt \ll \int_a^x g(t)dt$ /соотв. $\int_a^x f(t)dt \sim c\int_a^x g(t)dt$ /. Док-во: Достаточно доказать наши утверждения для отношения $\ll$ /поскольку $f \sim cg \Leftrightarrow f - cg \ll g$ /. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, найдется в $\geq$ а, такое, что $\|f(x)\| \leq \varepsilon g(x)$ при х $\geq$ в. В случае а/ имеем $\|\int_x^{+\infty} f(t)dt\| \leq \int_x^{+\infty}\|f(t)\|dt \leq \varepsilon\cdot\int_x^{+\infty} g(t)dt$ при х $\geq$ в, что и требуется. В случае б/, очевидно, имеет место оценка $\int_a^x \|f(t)\|dt \leq$ $\leq \varepsilon\int_a^x g(t)dt + C$ при х $\geq$ в, где С- некоторая константа. Найдется в$'\geq$ в, такое, что $C \leq \varepsilon\int_a^x g(t)dt$ при х $\geq$ в$'$. Значит, при х $\geq$ в$'$ имеем $\int_a^x \|f(t)\|dt \leq 2\varepsilon\cdot\int_a^x g(t)dt$, что и требуется.

Примеры: 1/ Поскольку $1/x \ll x^{\alpha-1}$ при $\alpha > 0$ и $x \to +\infty$, мы снова получаем, что $\ln x \ll x^\alpha$. 2/ Имеем $(e^x/x)' = e^x/x\,.\,(1-1/x) \sim e^x/x$ при $x \to +\infty$, откуда получаем, что $\int_1^x e^t/t\,dt \sim e^x/x$ при $x \to +\infty$.

<u>Дифференцирование отношений сравнения.</u> Вообще говоря, отношения сравнения нельзя дифференцировать, даже если рассматриваемые функции монотонны. Например, $x^2 + x\sin x + \cos x \sim x^2$ при $x \to +\infty$, но $x'(2+\cos x) \not\sim 2x$. Отметим в связи с этим следующее любопытное утверждение: <u>Задача</u>. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$, где f и g - функции класса C^1, причем f - возрастающая и выпуклая, и $1/g$ - также выпукла. Докажите, что $f'(x) \sim g'(x)$ при $x \to +\infty$ /это доказано в работе D. J. Newman, Differentiation of asymptotic formulas, Amer. Math. Monthly, v. 88, no. 7 (1981), 526-527 /.

Возвращаясь к общей теории, мы докажем, что при некоторых условиях отношения сравнения можно дифференцировать, если заранее предположить, что производные сравнимы. Утверждением такого сорта является известное нам правило Лопиталя; мы докажем некоторый его вариант.

<u>Опр</u>. Говорят, что числовые функции f и g, определенные на $[a, +\infty)$, <u>сравнимы порядка 1 при $x \to +\infty$</u>, если они дифференцируемы в некоторой окрестности $+\infty$ /кроме, быть может, счетного числа точек/, и их производные правильны, имеют постоянный знак и сравнимы при $x \to +\infty$.

<u>Предл</u>. Если f и g сравнимы порядка 1, то они сравнимы. При этом, если g не эквивалентна ненулевой постоянной, то $f \ll g$ /соотв. $f \sim cg$ / $\Longrightarrow$ $f' \ll g'$ /соотв. $f' \sim cg'$ /. Док-во: Так как f' и g' имеют постоянный знак в некоторой окрестности $+\infty$, то f и g монотонны, и, значит, имеют пределы /быть может, бесконечные/ при $x \to +\infty$. Если один из этих пределов конечен и отличен от 0, или если один из них равен 0, а другой бесконечен, то f и g, очевидно, сравнимы. Остаются два случая: либо f и g обе стремятся к 0, либо обе- к $\pm\infty$. В первом случае f' и g' интегрируемы от а до $+\infty$, и имеем $f(x) = -\int_x^{+\infty} f'(t)dt$, $g(x) = -\int_x^{+\infty} g'(t)dt$. Во втором случае f' и g' не интегрируемы на $[a, +\infty)$, и $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt \sim$ $\sim \int_{x_0}^x f'(t)dt$, $g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^x g'(t)dt \sim \int_{x_0}^x g'(t)dt$. В силу предыдущего

дущего предложения, в обоих случаях f и g сравнимы, причем с тем же отношением сравнения, что f' и g'. Первое утверждение предложения доказано. Для доказательства второго с учетом уже рассмотренных случаев достаточно разобрать случай, когда $f \ll g$, и f имеет конечный предел при $x \to +\infty$, а g - бесконечный. Ясно, что f' интегрируема на $[a,+\infty)$, а g' - нет. Значит, отношение $g' \preceq f'$ не может выполняться. Поскольку f' и g' сравнимы, мы получаем, что $g' \ll f'$, что и требуется.

Главная часть и асимптотическое разложение примитивной.

Пусть f - правильная положительная функция на $[a,+\infty)$. Если $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится, то интересно, насколько быстро его остаток $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ стремится к 0 при $x \to +\infty$; если же этот интеграл расходится, то интересно, насколько быстро $\int_a^x f(t)\,dt$ стремится к $+\infty$. Для удобства формулировок положим $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$, если f интегрируема на $[a,+\infty)$, и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ в противном случае. Мы вычислим главную часть $F(x)$ при $x \to +\infty$ в некоторых дополнительных предположениях на f. А именно, предположим, что f удовлетворяет следующему условию:

/ж/ Функции $\ln f$ и $\ln x$ сравнимы порядка I.

Иными словами, /ж/ означает, что f дифференцируема в некоторой окрестности $+\infty$, f' имеет постоянный знак, и существует /конечный или бесконечный/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \mu$. В силу предыдущего предложения, из /ж/ вытекает, что f имеет порядок μ относительно x.

Теорема. Пусть f удовлетворяет /ж/ и имеет порядок μ относительно x, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot f'(x)/f(x) = \mu$. Тогда: а/ Если μ конечно и отлично от -1, то $F(x) \sim 1/|\mu+1| \cdot x f(x)$; б/ Если $\mu = \pm\infty$, и если функции f/f' и x сравнимы порядка I, то $F(x) \sim (f(x))^2/|f'(x)|$. Док-во: а/ Пусть сначала $\mu > -1$. Тогда $f(x) \gg x^{\mu-\varepsilon}\ \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ расходится. Интегрируя по частям, получаем: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = x f(x) - a f(a) - \int_a^x t f'(t)\,dt$. Отсюда $\int_a^x (f(t) + t f'(t))\,dt = x f(x) - a f(a) \sim x f(x)$ при $x \to +\infty$, т.к. $x f(x) \gg x^{\mu+1-\varepsilon} \gg 1$. С другой стороны, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + x f'(x))/f(x) = \mu + 1 \neq 0$, т.е. $(f(x) + x f'(x)) \sim (\mu+1) f(x)$. Интегрируя это отношение, мы видим, что $\int_a^x (f(t) + t f'(t))\,dt \sim (\mu+1) F(x)$. Отсюда следует, что $x f(x) \sim (\mu+1) F(x)$, что и требуется. При $\mu < -1$ доказательство аналогично.

б/ Пусть $\mu = +\infty$, так что $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ расходится. Положим $g(x) = f(x)/f'(x)$. Интегрируя по частям, получаем: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t) f'(t)\,dt = g(x) f(x) - g(a) f(a) - \int_a^x f(t) g'(t)\,dt$. Условие $\mu = +\infty$, очевидно, означает, что $g(x) \ll x$. Так как по условию $g(x)$ и x сравнимы порядка I, то по предыдущему предложению $g'(x) \ll 1 \Longrightarrow f g' \ll f \Longrightarrow \int_a^x f(t) g'(t)\,dt \ll F(x)$. Отсюда $F(x) \sim g(x) f(x) = (f(x))^2/f'(x)$, что и требуется. Случай $\mu = -\infty$ разбирается совершенно аналогично. Теорема доказана.

<u>Применения.</u> Заметим, что условие (*) выполняется для функций наших шкал $x^\alpha(\ln x)^\beta$ и $e^{P(x)}$, где P– многочлен без свободного члена. При этом число μ в теореме, т.е. порядок функции, равно α для $x^\alpha(\ln x)^\beta$ и $\pm\infty$ /в зависимости от знака старшего коэффициента P(x)/ для $e^{P(x)}$. Поэтому теорема дает главные части примитивных всех этих функций /кроме функций $(\ln x)^\beta/x$, для которых примитивная находится в явном виде/. Например, для функции $\int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ /"интегральный логарифм"/ наша теорема или непосредственное интегрирование по частям дает, что $\int_a^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$ и $\int_a^x \frac{dt}{\ln t} - \frac{x}{\ln x} = const + \int_a^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \sim \int_a^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$. Продолжая в том же духе, получим асимптотическое разложение

$$\int_a^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{2x}{(\ln x)^3} + \dots + \frac{(n-1)!\,x}{(\ln x)^n} + o\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right),$$

Заметим, что все члены этого разложения стремятся к $+\infty$ при $x \to +\infty$, а также при фиксированном $x > 0$ и $n \to +\infty$. Другой пример: для остатка интеграла Гаусса получаем $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \sim 1/x \cdot e^{-x^2/2}$ и $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt - 1/x \cdot e^{-x^2/2} = -\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}/t^2\,dt$. Снова продолжая в том же духе, можно получить асимптотическое разложение.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ – некоторая шкала при $x \to +\infty$, состоящая из положительных функций и такая, что примитивные функций из $\mathcal{E}$ допускают асимпт. разложение по $\mathcal{E}$. Мы покажем, что если функция f допускает асимпт. разложение относительно $\mathcal{E}$ с некоторой точностью, то и примитивная $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ допускает такое разложение. Пусть $f = \sum_{\lambda\le\alpha} a_\lambda g_\lambda + r_\alpha$, где $r_\alpha = o(g_\alpha)$. Имеем $F(x) = \sum_{\lambda\le\alpha} a_\lambda \int_a^x g_\lambda(t)dt + \int_a^x r_\alpha(t)dt$. Если $\int_a^{+\infty} g_\alpha(t)dt$ расходится, то $\int_a^x r_\alpha(t)dt \ll \int_a^x g_\alpha(t)dt$, и мы получаем асимпт. разложение $F(x)$ через асимпт. разложения примитивных $\int_a^x g_\lambda(t)dt$. Пусть теперь $\int_a^{+\infty} g_\alpha(t)dt$ сходится, и пусть β – наименьший из индексов $\lambda \le \alpha$, для которых $a_\lambda \ne 0$ и $\int_a^{+\infty} g_\lambda(t)dt$ сходится. Тогда $F(x) = \sum_{\lambda<\beta} a_\lambda \int_a^x g_\lambda(t)dt + C - \sum_{\beta\le\lambda\le\alpha} a_\lambda \int_x^{+\infty} g_\lambda(t)dt - \int_x^{+\infty} r_\alpha(t)dt$, где $C = \int_a^{+\infty}\left(\sum_{\beta\le\lambda\le\alpha} a_\lambda g_\lambda(t) + r_\alpha(t)\right)dt$. Имеем $\int_x^{+\infty} r_\alpha(t)dt \ll \int_x^{+\infty} g_\alpha(t)dt$, откуда снова получается асимпт. разложение $F(x)$. Изложенные приемы позволяют находить асимпт. разложения примитивных от весьма широкого класса функций.

<u>Применения к рядам с положительными членами.</u> Будем для удобства называть рядом с положительными членами такой ряд (u_n), что $u_n \ge 0$ при достаточно больших n. Сопоставим такому ряду ступенчатую функцию $u(x)$, которая равна u_n при $n \le x < n+1$. Тогда $\sum_{p=m}^n u_p = \int_m^{n+1} u(t)dt$, откуда сходимость ряда (u_n) эквивалентна сходимости $\int_a^{+\infty} u(t)dt$. Очевидно, все отношения сравнения между последовательностями эквивалентны соответствующим отношениям между ступенчатыми функциями. Поэтому доказанные выше предложения об

интегрируемости отношений сравнения дают соответствующие утверждения о рядах. Например, если ряд (u_n) сходится и $v_n \sim u_n$, то ряд (v_n) сходится и $\sum_{p=n}^{\infty} v_n \sim \sum_{p=n}^{\infty} u_n$.

Нас будет интересовать асимпт. разложение частичных сумм ряда относительно шкал сравнения вида $\{g_\alpha(n)\}$, где $\mathcal{G} = \{g_\alpha\}$ – некоторая шкала сравнения при $x \to +\infty$, состоящая из положительных функций. Пусть общий член ряда (u_n) допускает асимпт. разложение по шкале $\{g_\alpha(n)\}$ с некоторой точностью. Мы хотим найти асимпт. разложение частичных сумм $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$. Рассуждение с предыдущей страницы показывает, что дело сводится к разложению частичных сумм $\sum_{p=1}^{n} g(p)$, где $g \in \mathcal{G}$. На этот счет есть теорема, дающая главную часть такой суммы при некоторых предположениях на g; она аналогична доказанной выше теореме о главной части примитивной. Мы дадим ее утверждение в качестве задачи /см. задачи/, а сейчас рассмотрим другой замечательный способ, позволяющий сразу написать всё асимпт. разложение такой суммы в наиболее важных случаях.

Формула суммирования Эйлера- Маклорена.

Сначала- эвристические соображения. Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $[0,+\infty)$. Мы хотим "вычислить" сумму $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} f(p)$. Задача будет решена, если нам удастся найти функцию $F(x)$ на $[0,+\infty)$, такую, что $F(x+1) - F(x) = f(x)$, поскольку, очевидно, тогда $S_n = F(n) - F(0)$. Предположим, что F бесконечно дифференцируема и раскладывается в ряд Тейлора. Тогда $f(x) = F(x+1) - F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(x)/k!$. Это равенство можно формально записать в виде $f = (e^{\mathcal{D}} - 1)F$, где через $\mathcal{D}$ обозначен оператор d/dx. Цепочка формальных преобразований дает: $(e^{\mathcal{D}} - I)F = f \Longrightarrow$ $\Longrightarrow F = I/(e^{\mathcal{D}} - I)\cdot f \Longrightarrow F'(x) = \mathcal{D}/(e^{\mathcal{D}}-1)\cdot f(x)$. Выражение $\mathcal{D}/(e^{\mathcal{D}}-1)$ можно разложить в формальный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\cdot \mathcal{D}^k$ /подробнее об этом см. чуть ниже/; коэффициенты B_k называются числами Бернулли. Мы получаем: $F'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k/k! \cdot f^{(k)}(x)$. Интегрируя это равенство от 0 до n, окончательно получаем (учитывая, что $B_0 = 1$):

$$\sum_{p=0}^{n-1} f(p) = \int_0^n f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)\right) -$$

это и есть формула Эйлера-Маклорена. Разумеется, наши рассуждения ни в коей мере не являются доказательством; кроме того, ряд в правой части, как правило, расходится. Однако, оказывается, что в наиболее интересных случаях формула имеет смысл асимптотического разложения. Мы дадим строгий вывод формулы с точным выражением остаточного члена.

Прежде всего, вернемся к определению чисел Бернулли. Чуть позже мы докажем, что функция $z/(e^z - 1)$ аналитична при $|z| < 2\pi$; числа $B_k/k!$ являются коэффициентами ее ряда Тейлора. Однако и формальное определение имеет точный смысл- оно означает, что выполняется равенство формальных рядов

$$z=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\right).$$

Отсюда вытекает, что $B_0 = 1$, а при $n \geqslant 2$ выполняются равенства $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot B_k = 0$ /символически это можно записать в виде "$(1 + B)^n = B^n$ при $n\geqslant 2$", где после развертывания бинома надо все степени заменить нижними индексами/. Из этих равенств последовательно находятся все B_n. Например: $1+ 2B_1 = 0 \Longrightarrow B_1 = -1/2$, $1 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \Longrightarrow B_2 = 1/6$, $1+ 4B_1+ 6B_2 + 4B_3 = 0 \Longrightarrow B_3 = 0$ и т.д. Нам понадобятся еще многочлены Бернулли, которые определяются формулой $B_p(x) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k x^{p-k}$ /символически, "$B_p(x) = (x+B)^p$"/.

Теорема. Пусть $f(x)$ — p раз непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0,n]$. Тогда справедливо тождество

$$(*)\quad \sum_{m=0}^{n-1} f(m) = \int_0^n f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{p}\frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(0)\right) - \frac{1}{p!}\int_0^n f^{(p)}(n-t)B_p(\{t\})\,dt$$

где через $\{t\}$ обозначена дробная часть числа t, т.е. $0\leq\{t\}<1$ и $t-\{t\}\in\mathbb{Z}$.

Док-во: Напомним формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме: $F(x+1)-F(x)=F'(x)+\frac{F''(x)}{2!}+\dots+\frac{F^{(q)}(x)}{q!}+\frac{1}{q!}\int_0^1 t^q F^{(q+1)}(x+1-t)\,dt$.

Просуммировав по x от 0 до $n-1$, получим:

$$F(n)-F(0)=\sum_{m=0}^{n-1}F'(m)+\frac{1}{2!}\sum_{m=0}^{n-1}F''(m)+\dots+\frac{1}{q!}\sum_{m=0}^{n-1}F^{(q)}(m)+\frac{1}{q!}\int_0^n\{t\}^qF^{(q+1)}(n-t)\,dt.$$

Мы применим эту формулу последовательно для $F(x)=\int f(t)\,dt,\ f(x),\ f'(x),\dots,\ f^{(p-1)}(x)$, заканчивая разложение каждый раз членом с $f^{(p-1)}$; положим еще $S^{(k)}=\sum_{m=0}^{n-1}f^{(k)}(m)$ $(0\leq k\leq p-1)$. Тогда при $0\leq k\leq p$ имеем:

$$f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(0)=\sum_{j=k}^{p-1}\frac{1}{(j+1-k)!}S^{(j)}+\frac{1}{(p-k)!}\int_0^n f^{(p)}(n-t)\{t\}^{p-k}\,dt.$$

/при $k = 0$ в левой части стоит $\int_0^n f(t)\,dt$/. Умножим k-ую из этих формул на $B_k/k!$ и просуммируем по k от 0 до p. Мы получим:

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(0)\right) = S^{(0)}+\sum_{j=1}^{p-1}\frac{S^{(j)}}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j+1}{k}B_k+\frac{1}{p!}\int_0^n B_p(\{t\})f^{(p)}(n-t)\,dt$$

Осталось заметить, что при $j\geqslant 1$ коэффициент при $S^{(j)}$ в правой части равен 0 по определению чисел Бернулли.

Рассмотрим теперь некоторые свойства чисел и многочленов Бернулли, которые позволят нам записать тождество $(*)$ в более удобном виде и дать хорошую оценку остатка.

Свойства чисел и многочленов Бернулли.

1/ $B_{2k-1} = 0$ при $k\geqslant 2$. Док-во: Имеем $1 + \sum_{k\geqslant 2}(B_k/k!)z^k = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\cdot\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$. Поскольку в правой части стоит четная функция от z, все коэффициенты при нечетных степенях z равны 0, ч.т.д.

2/ Положим $z=2it$ /где $i=\sqrt{-1}$/. Только что проведенное преобразование показывает, что $\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=t\,\mathrm{ctg}\,t$. Функция $\mathrm{ctg}\,t$ была исследована в прошлом семестре с помощью ее эйлерова разложения. В частности, было доказано, что функция $t\,\mathrm{ctg}\,t$ аналитична при $|t|<\pi$, и ее разложение в степенной ряд имеет вид $t\,\mathrm{ctg}\,t=1-\sum_{k=1}^{\infty}t^{2k}\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}$, где $\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$.

Отсюда вытекает, что функция $z/(e^z-1)$ аналитична при $|z|<2\pi$; приравнивая коэффициенты, получаем: $B_{2k}/(2k)! = (-1)^{k-1}\dfrac{2\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}$.

3/ Поскольку $\zeta(2k) > 0$, из 2/ вытекает, что знак B_{2k} равен $(-1)^{k-1}$.

4/ Ясно, что $\zeta(2k) \le \zeta(2) = \pi^2/6 < 2$, откуда следует, что $|B_{2k}/(2k)!| < 4/(2\pi)^{2k}$. Кроме того, легко видеть, что $\zeta(2k) \longrightarrow 1$ при $k \to \infty$, откуда $B_{2k}/(2k)! \sim (-1)^{k-1}\, 2/(2\pi)^{2k}$. Отметим еще, что из 2/ снова вытекает, что число $\zeta(2k)/\pi^{2k}$ рационально.

5/ Перейдем к многочленам Бернулли. Их свойства проще всего выводить из выражения для производящей функции: $\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{z e^{xz}}{e^z - 1}}$.

Доказательство: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^{n-k}z^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!\,m!}(xz)^m z^k = \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$,

6/ $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$. Док-во: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(1-x)}{n!}z^n = \frac{ze^{(1-x)z}}{e^z-1} = \frac{(-z)e^{x\cdot(-z)}}{e^{-z}-1}$ /мы поделили числитель и знаменатель на e^z/ $= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)/n! \cdot (-z)^n$, откуда следует наше утверждение.

7/ В силу 6/, $B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = (-1)^n B_n$. Таким образом, при четном n $B_n(1) = B_n$, а при нечетном $n > 1$ $B_n(1) = 0$.

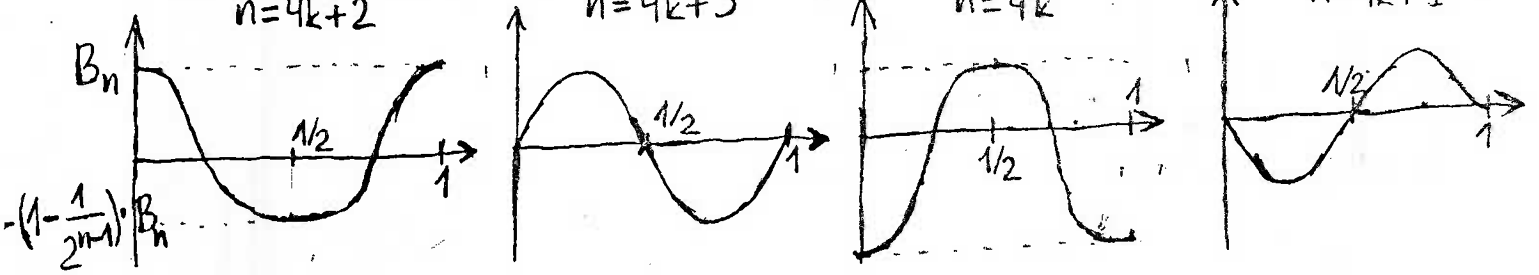
8/ $B_n(1/2) = -(1 - 1/2^{n-1})B_n$. В частности, $B_n(1/2) = 0$ при нечетном n /впрочем, это сразу следует из 6//. Док-во: $\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\tfrac12)/n! \cdot z^n = \frac{ze^{z/2}}{e^z-1} =$
$$= \frac{z(e^{z/2}+1-1)}{e^z-1} = \frac{z}{e^{z/2}-1} - \frac{z}{e^z-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,$$
откуда следует наше утверждение.

9/ $B_n'(x) = n B_{n-1}(x)$ при $n \ge 1$. Док-во: дифференцируя производящую функцию 5/ по x, мы получим $\frac{z^2e^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}z^n$.
Отсюда вытекает наше утверждение.

10/ $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$. Мы оставляем доказательство в качестве упражнения читателю. Заметим, что отсюда вытекает формула
$$1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (p-1)^{n-1} = 1/n \cdot (B_n(p) - B_n) = 1/n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}\,p^k$$
/впрочем, это следует и из теоремы на предыдущей странице/.

Доказанные свойства позволяют исследовать поведение многочленов Бернулли на отрезке $[0,1]$:

Предложение. При $n \ge 2$ графики многочленов $B_n(x)$ имеют следующий вид:



Док-во: В силу I/,7/ и 8/, при нечетном $n > 1$ многочлен $B_n(x)$ имеет корни 0, I/2 и I. Докажем, что он не имеет других корней в интервале $(0,1)$. Предположим, что это не так, т.е. $B_n(x)$ имеет корни $0 < a_1 < a_2 < 1$. Дважды применяя теорему Ролля, мы видим, что $B_n'(x)$ имеет по корню в каждом из интервалов $(0,a_1)$, (a_1,a_2) и $(a_2,1)$, откуда $B_n''(x)$ имеет два корня в $(0,1)$. В силу 9/, это означает, что $B_{n-2}(x)$ также имеет два корня в $(0,1)$. Повторяя это рассуждение, мы получим, что многочлен $B_1(x) = x - 1/2$ должен иметь два корня в $(0,1)$ - противоречие. Таким образом, при нечетном n многочлен $B_n(x)$ сохраняет постоянный знак на каждом из интервалов $(0,1/2)$ и $(1/2,1)$. Поскольку $B_{2k}'(x) = 2k\, B_{2k-1}(x)$, мы видим, что $B_{2k}(x)$ монотонно в каждом из этих интервалов. Т.к. знаки значений $B_{2k}(x)$ в точках 0, I/2 и I нам известны, отсюда следуют все наши картинки. Следствие: $|B_{2k}(x)| \le |B_{2k}|$ при $0 \le x \le 1$.

Пользуясь доказанными свойствами, мы можем переписать формулу Эйлера Маклорена следующим образом: если $f(x)$ - $2p$ раз непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0,n]$, то

$$\sum_{m=0}^{n} f(m) = \int_0^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(n)+f(0)) + \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)\right) - R_{2p}(n),$$

где $R_{2p}(n) = 1/(2p)! \cdot \int_0^n f^{(2p)}(t)\, B_{2p}(\{t\})\,dt$. Оценим остаток. Применяя теорему о среднем и последнее следствие, мы видим, что $|R_{2p}(n)| \le |B_{2p}|/(2p)! \cdot \int_0^n |f^{(2p)}(t)|\,dt$. Если $f^{(2p)}$ имеет постоянный знак на $[0,n]$, то эта оценка переписывается в виде $|R_{2p}(n)| \le \left|\frac{B_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)\right)\right|$, т.е. остаток по модулю не превосходит последнего удержанного члена разложения; отсюда, очевидно, вытекает, что $|R_{2p-2}(n)| \le 2 \cdot |B_{2p}/(2p)!| \cdot |f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0)|$, т.е. остаток по модулю не превосходит удвоенного первого отброшенного члена.

Примеры. I/ $f(x) = 1/x$ на $[1,+\infty)$. Таким образом, речь идет об асимптотическом разложении частичной суммы гармонического ряда $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$. Формула Эйлера-Маклорена дает: $H_n = \ln n + 1/2 \cdot (1/n + 1) - \sum_{k=1}^{p} B_{2k}/2k \cdot (1/n^{2k} - 1) - \int_1^n B_{2p}(\{t\}) \cdot \frac{1}{t^{2p+1}}\,dt$. Перенесем $\ln n$ в левую часть и перейдем к пределу при $n \to \infty$ /и фиксированном p/. Очевидно, предел в правой части существует, так что мы еще раз доказали существование константы Эйлера $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)$, а заодно получили формулу $\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{p} B_{2k}/2k - \int_1^\infty B_{2p}(\{t\}) \cdot \frac{1}{t^{2p+1}}\,dt$. Это позволяет переписать нашу формулу в виде $H_n = \ln n + \gamma + 1/2n - \sum_{k=1}^{p} B_{2k}/2k \cdot \frac{1}{n^{2k}} + R_{2p}(n)$, где $R_{2p}(n) = \int_n^{+\infty} B_{2p}(\{t\}) \cdot \frac{1}{t^{2p+1}}\,dt$. Как и выше, получаем, что $|R_{2p}(n)| \le |B_{2p}|/2pn^{2p}$. Окончательно, имеем асимптотическое разложение $H_n \sim$

$\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}/2k\cdot\frac{1}{n^{2k}}$, где остаток в каждом месте по модулю не превосходит удвоенного первого отброшенного члена. Заметим, что ряд в правой части расходится при каждом n, поскольку его общий член стремится к ∞ ! Тем не менее, его конечные суммы дают очень хорошее приближение для H_n при больших n; например, имеем $|H_n-\ln n-\gamma-1/2n+1/12n^2-1/120n^4|<1/126n^6$.

2/Пусть $f(x)=\ln x$ на $[1,+\infty)$, т.е. речь идет о нахождении асимптотики для $\ln n!$. Формула суммирования дает:

$$\ln n! = n\ln n - n+1+\frac{1}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\left(\frac{1}{n^{2k-1}}-1\right)+\frac{1}{2p}\int_1^n\frac{B_{2p}(\{t\})}{t^{2p}}\,dt$$

Как и в предыдущем примере, отсюда следует, что предел $C=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n! - n\ln n+n-\frac{1}{2}\ln n\right)$ существует и равен $1-\sum_{k=1}^{p} B_{2k}/2k(2k-1)+1/2p\cdot\int_1^{\infty} B_{2p}(\{t\})/t^{2p}\,dt$, откуда $\ln n! = n\ln n - n+1/2\cdot\ln n + C + \sum_{k=1}^{p} B_{2k}/2k(2k-1)\cdot 1/n^{2k-1} - 1/2p\cdot\int_n^{\infty} B_{2p}(\{t\})/t^{2p}\,dt$. Как и выше, отсюда вытекает асимптотическое разложение $\ln n! \sim n\ln n - n+\frac{1}{2}\ln n + C + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}/2k(2k-1)\cdot 1/n^{2k-1}$, где остаток не превосходит по модулю удвоенного первого отброшенного члена. Беря экспоненту, получаем асимптотическое разложение для $n!$: $n! = e^{C}(n/e)^{n}\sqrt{n}\cdot(1+o(1))$. Используя разложение экспоненты в ряд Тейлора, мы можем получить асимптотическое разложение остатка $1+o(1)$ с любой точностью; например, следующее приближение имеет вид $1+1/12n+o(1/n)$. Эта формула для $n!$ /с точным значением C, которое мы сейчас найдем/ называется формулой Стирлинга. Для нахождения C рассмотрим биномиальный коэффициент $\binom{2n}{n}$. Имеем $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim e^{-C}2^{2n}\cdot\sqrt{2n}/n$. После несложных преобразований получаем отсюда, что $e^{2C}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2.4\dots 2n}{1.3\dots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{2}{n}$. Вспомнив формулу Валлиса, мы видим, что $e^{C}=\sqrt{2\pi}$. Таким образом, формула Стирлинга имеет вид $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$.

Отметим, что мы использовали общий прием: с помощью логарифмов и экспонент асимптотическое разложение произведения сводится к разложению суммы.

Тема 4. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента. Эта тема прекрасно изложена в учебнике А.Картана " Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы", М.,"Мир", 1971. Содержание лекций практически совпадает с §§2-5 главы I. Настоятельно рекомендуем читателю проработать эту книгу целиком.