Лекция I.

Наш основной предмет – кольца и модули над ними. В основном мы будем заниматься коммутативными кольцами.

Все кольца будут с единицей.

§I. Примеры и основные определения.

I. Пусть X – топологическое пространство. Тогда $C(X)$ есть по определению пространство непрерывных функций на X со значениями в поле $\mathbb{C}$. Операции суть сложение и умножение функций.

2. Пусть K – поле, $K[x_1,\dots,x_n]$ – кольцо многочленов от n переменных. Заметим, что $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\subset C(\mathbb{C}^n)$

3. Пусть Γ – абелева группа, $End(\Gamma)$ по определению есть кольцо эндоморфизмов Γ, то есть таких преобразований $a:\Gamma\to\Gamma$, что $a(x_1+x_2)=a(x_1)+a(x_2)$, $a(0)=0$. Операции: $(a+b)(x)=a(x)+b(x)$ и $(a\cdot b)(x)=(a(b(x))$ здесь $a,b\in End\,\Gamma$ и $x\in\Gamma$.

Определение. Модулем над кольцом A (сокращенно A-модулем) называется абелева группа Γ вместе с гомоморфизмом $\varphi: A\to End\,\Gamma$. Если $a\in A$ и $x\in\Gamma$ то вместо $\varphi(a)(x)$ обычно сокращенно пишут ax.

Замечание. Пусть K – поле, тогда K-модули есть в точности векторные пространства над K.

4. Пусть M – модуль над кольцом A. Тогда $End(M)$ по определению есть кольцо, состоящее из A-линейных преобразований $M\longrightarrow M$, т.е. таких преобразований $\varphi: M\to M$ что φ есть эндоморфизм M как абелевой группы и $\varphi(am)=a\varphi(m)$, $a\in A$, $m\in M$.

Определение. Пусть M_1 и M_2 – модули над кольцом A. Отображение $\varphi: M_1\to M_2$ называется гомоморфизмом модулей, если оно есть гомоморфизм абелевых групп и .

$$\varphi(a\cdot m_1)=a\,\varphi(m_1),\ a\in A,\ m_1,m_2\in M$$

Определение. Пусть A – кольцо. A-алгеброй L называется множество L, снабженное структурами A-модуля и кольца, которые связаны следующими аксиомами:

а) $a(x_1+x_2)=a\,x_1+ax_2$

б) $a(x_1x_2)=(ax_1)\,x_2$; $a\in A$, $x_1,x_2\in L$

Заметим, что кольцо $C(X)$ из примера I есть $\mathbb{C}$-алгебра, а $K[x_1,\dots,x_n]$ из примера 2 есть K-алгебра. В дальнейшем мы будем заниматься главным образом алгебрами над полем.

Гомоморфизм A-алгебр $L_1 \to L_2$ есть отображение, которое одновременно является кольцевым гомоморфизмом и гомоморфизмом A-модулей.

Упражнение. а) Пусть L – некоторая A-алгебра. Тогда отображение $A \to L$, $a \rightsquigarrow a \cdot 1_L$ есть гомоморфизм колец. Обратно, если задан гомоморфизм колец $A \to L$, то на L естественно определяется структура A-алгебры. б) Проверьте, что любое кольцо есть $\mathbb{Z}$-алгебра. в) Пусть A – коммутативное кольцо и M есть A-модуль. Тогда $\mathrm{End}\, M$ есть A-алгебра. В частности, алгебра матриц $(n \times n)$ над полем K есть K-алгебра.

Пусть X – топологическое пространство и $x \in X$ – точка. Тогда отображение $\varphi(x): C(X) \to \mathbb{C}$, сопоставляющее функции f число $f(x)$, есть гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр. Обозначим символом $\mathrm{Spm}\, C(X)$ множество всех гомоморфизмов $\mathbb{C}$-алгебр $C(X) \to \mathbb{C}$. Мы построили отображение множеств $\varphi: X \to \mathrm{Spm}\, C(X)$

Предложение I. Пусть X – компакт, тогда φ – биекция.

Доказательство. Если $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, то для $\forall f \in C(X)$ $f(x_1) = f(x_2)$, а это противоречит аксиоме отделимости. (Если на X есть метрика, то функция $f(x) = \rho(x, x_1)$ разделяет точки x_1 и x_2 ибо $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = \rho(x_1, x_2) > 0$) Далее, пусть $\alpha \in \mathrm{Spm}\, C(X)$ и $\alpha \notin \mathrm{Im}\, \varphi$, тогда для любой точки $p \in X$ существует функция f_p, такая что $f_p(p) \neq 0$ и $\alpha(f_p) = 0$ Пусть U_p – такая окрестность точки p, что $f_p(x) \neq 0$, если $x \in U_p$. Множество окрестностей U_p образует покрытие X, выберем конечное подпокрытие $\{U_{p_1}, \ldots, U_{p_k}\}$. Положим $\theta_p(x) = |f_p(x)|^2 = f_p(x)\, \bar{f}_p(x)$ (черта – комплексное сопряжение), заметим, что $\alpha(\theta_p) = \alpha(f_p) \cdot \alpha(\bar{f}_p) = 0$. Пусть $\theta = \sum_{i=1}^{k} \theta_{p_i}$. Легко видеть, что $\alpha(\theta) = 0$ и θ не обращается в нуль на X. Это значит, что $\theta^{-1} \in C(X)$ и $\alpha(1) = \alpha(\theta \cdot \theta^{-1}) = \alpha(\theta) \cdot \alpha(\theta^{-1}) = 0$. Это противоречит тому, что α – гомоморфизм колец.

Пусть X – компакт. Для каждой функции $f \in C(X)$ положим $U_f = \{y \in \mathrm{Spm}\, C(X) : y(f) \neq 0\}$. Определим теперь на множестве $\mathrm{Spm}\, C(X)$ топологию. Мы скажем, что множество $U \subset \mathrm{Spm}\, C(X)$ открыто, если для любого $y \in U$ существует такое f, что $y \in U_f \subset U$.

Предложение 2. Отображение $\varphi: X \to \mathrm{Spm}\, C(X)$ есть гомеоморфизм.

Доказательство этого предложения мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Замечание. Мы доказали, что топологическое пространство X чисто алгебраически восстанавливается по кольцу $C(X)$ (по крайней мере для компактного X). Возникает естественная идея. Пусть A - произвольная коммутативная K - алгебра, где K - поле. Попытаемся аналогичным образом построить по A топологическое пространство $Spm\,A$ и затем изучать его геометрическими методами. Все дальнейшее есть, в некотором смысле, реализация этой идеи. Нам придётся при этом ввести много новых понятий и методов.

§2. Понятие точек. Идеалы.

Итак, точки компактного пространства X есть гомоморфизмы $C(X) \to \mathbb{C}$. С алгебраической точки зрения естественно заменить $\mathbb{C}$ произвольной алгеброй.

В этом и нескольких следующих параграфах все кольца - коммутативные, K - фиксированное поле.

Определение. Точками K - алгебры A со значениями в K -алгебре B (или просто B -точками A) называются гомоморфизмы K - алгебр $A \to B$.

Заметим, что каждому непрерывному отображению топологических пространств $Y \to X$ естественным образом ставится в соответствие $C(Y)$ -точка алгебры $C(X)$. Если $Y \to X$ есть вложение, то $C(X) \to C(Y)$ есть сюръекция.

Определение. Идеалом в K -алгебре A называется множество, являющееся ядром некоторого гомоморфизма K -алгебр $A \to B$.

Эквивалентное определение. Идеалом в K -алгебре A называется всякая аддитивная подгруппа J со свойством $AJ \subseteq J$.

Ясно, что по каждому идеалу J можно построить A/J -значную точку K-алгебры A , $A \to A/J$, A/J называется фактор-кольцом.

Определение. Идеал J называется простым, если фактор-кольцо A/J не имеет делителей нуля.

<u>Определение.</u> B – точка алгебры A называется геометрической, если алгебра B – поле.

Ясно, что для каждой точки $A \to B$ ядро соответствующего гомоморфизма – идеал.

максимальные?

<u>Упражнение.</u> Покажите, что простые идеалы – в точности ядра гомоморфизмов, отвечающих геометрическим точкам.

Сейчас мы будем изучать точки кольца многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$

<u>Предложение I.</u> Пусть K – поле и $\varphi : K[x_1, \dots, x_n] \to K$ – гомоморфизм. Тогда существует точка $(c_1, \dots, c_n) \in K^n$, что $\varphi(f) = f(c_1, \dots, c_n)$.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по n. При $n = 0$ всё очевидно. Далее, пусть $\varphi(x_1) = \alpha$, тогда $\varphi(x_1 - \alpha) = 0$. Пусть J – идеал, порождённый многочленом $x_1 - \alpha$. Ясно, что $\varphi(J) = 0$. Заметим, что кольцо $K[x_1, \dots, x_n]/J$ изоморфно кольцу многочленов от $(n-1)$ -ой переменной. А именно, ядро гомоморфизма $\theta : K[x_1, \dots, x_n] \to K[x_2, \dots, x_n]$, определяемого формулой: $(\theta f)(x_2, \dots, x_n) = f(\alpha, x_2, \dots, x_n)$ есть в точности J. Это значит, что существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : K[x_2, \dots, x_n] \to K$, что $\varphi = \bar{\varphi}\theta$. Применим теперь предположение индукции к $\bar{\varphi}$ и получим, что существует набор $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ такой, что $\varphi(f) = f(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$. ▥

Смысл этого простого предложения заключается в том, что "обычные" точки пространства K^n отвечают K-точкам кольца $K[x_1, \dots, x_n]$. Заметим, что ядро любого гомоморфизма $K[x_1, \dots, x_n] \to K$ есть максимальный идеал. Мы сейчас опишем все максимальные идеалы в $K[x_1, \dots, x_n]$.

<u>Теорема.</u> (слабая форма теоремы Гильберта о нулях).

1) Пусть K – поле и J – максимальный идеал в алгебре $K[x_1, \dots, x_n]$. Тогда фактор $K[x_1, \dots, x_n]/J = L$ есть поле, причём расширение $K \hookrightarrow L$ конечно.

2) Обратно, если $K \hookrightarrow L$ есть конечное расширение, то ядро любого гомоморфизма $K[x_1, \dots, x_n] \to L$ есть максимальный идеал.

Прежде, чем доказывать теорему, сделаем несколько замечаний и докажем одну лемму.

<u>Определение.</u> A – алгебра B называется конечнопорождённой, если существует сюръективный гомоморфизм $A[x_1, \dots, x_k] \to B$, где k – некоторое натуральное число.

Иначе это можно сказать так: B конечнопорождена, если существует конечный набор элементов $y_1, \dots, y_k \in B$ таких, что любой элемент $b \in B$ представляется в виде $b = P(y_1, \dots, y_k)$, где P – многочлен с коэффициентами из A.

Теорема' (переформулировка теоремы Гильберта о нулях).

I) Пусть K – поле и пусть $K \hookrightarrow L$ есть расширение полей. Предположим дополнительно, что L есть конечнопорождённая K-алгебра. Тогда расширение $K \hookrightarrow L$ конечно.
2) Если $K \hookrightarrow L$ конечно, то L – конечнопорождённая K-алгебра.

Упражнение (на определения). Показать, что теорема и теорема' эквивалентны.

Лемма. Поле $K(x)$ рациональных функций от одной переменной не является конечнопорождённой K-алгеброй.

Доказательство. Напомним, что элементами поля $K(x)$ служат отношения многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Пусть $K(x)$ конечнопорождено и $y_1, \ldots, y_k$ – порождающие элементы. Каждое y_i есть дробь $\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$. Из конечнопорождённости следует, что существует многочлен U такой, что

$$\frac{1}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_k + 1} = U\left(\frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_k}{Q_k}\right)$$

Это значит, что существует такое число N, что $\frac{(Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_k)^N}{Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_k + 1}$ есть многочлен. (Для этого выражение $U(P_1/Q_1, \ldots, P_k/Q_k)$ нужно привести к общему знаменателю.) Но это очевидно не так, поскольку в кольце $K[x]$ многочлены $(Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k)^N$ и $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k + 1$ взаимно просты (идеал, ими порождённый, есть, очевидно, всё кольцо). ∎

Доказательство теоремы.

Доказывать мы будем индукцией по n. При $n=0$ доказывать нечего. Далее пусть поле L порождается элементами $x_1, \ldots, x_n$ и пусть $K(x_1)$ – подполе L, порождённое K и элементом x_1. Поле L как $K(x_1)$-алгебра порождается элементами $x_2, \ldots, x_n$ и стало быть, согласно индуктивному предположению, расширение $K(x_1) \hookrightarrow L$ конечно. Мы докажем сейчас, что расширение $K \hookrightarrow K(x_1)$ конечно.

Напомним, что конечность расширения $K(x_1) \hookrightarrow L$ означает в частности, что L есть конечномерное пространство над $K(x_1)$. Каждый элемент $\ell \in L$ определяет линейное преобразование

$$A(\ell) : L \to L \quad (A(\ell)(m) = \ell \cdot m, \ m \in L).$$

Если $\ell \in K(x_1)$, то линейное преобразование $A(\ell)$ кратно единичному. Выберем в L базис и пусть $A_1, \ldots, A_n$ – матрицы, отвечающие линейным преобразованиям $A(x_1), \ldots, A(x_n)$. Заметим, что матрицы A_i и A_j $(1 \le i \le j \le n)$ перестановочны. Из конечнопорождённости L следует, что любая диагональная матрица B (она отвечает $A(f), f \in K(x_1)$) представляется в виде $B = P(A_1, \ldots, A_n)$, где P – некоторый многочлен с коэффициентами из K.

Пусть теперь $a_1, \ldots, a_N$ – матричные элементы матриц $A_1, \ldots, A_n$. Из равенства $B = P(A_1, \ldots, A_k) = E \cdot f$ (E – единичная матрица, $f \in K(x_1)$) следует, что $f = U(a_1, \ldots, a_N)$, где U – многочлен. Мы доказали, что $K(x_1)$ – конечнопорождённая K-алгебра.

Заметим теперь, что поле $K(x_1)$ или изоморфно полю рациональных функций от x_1 или есть конечное расширение K. (Докажите это.) Лемма утверждает, что $K(x_1)$ не может быть конечно порождено, стало быть расширение $K \hookrightarrow K(x_1)$ конечно. Это значит, что и $K \hookrightarrow L$ конечно. Мы доказали пункт 1) теоремы' (и теоремы).

Пункт 2) следует из такого утверждения: пусть расширение полей $K \hookrightarrow L$ конечно и пусть $y_1, \dots, y_n$ – конечное множество элементов из L. Тогда подалгебра в L, порождённая $y_1, \dots, y_n$ есть подполе. Этот стандартный факт теории полей мы оставляем читателю (см. Ленга). ▨

Следствие. Пусть K – алгебраически замкнуто, тогда множество максимальных идеалов кольца $K[x_1, \dots, x_n]$ изоморфно линейному пространству K^n.

<u>Определение</u>. Множество максимальных идеалов кольца A называется максимальным спектром A и обозначается $\mathrm{Spm}\,A$.

Упражнение. Пусть K не предполагается алгебраически замкнутым. Как описать $\mathrm{Spm}\,K[x_1, \dots, x_n]$?

<u>Сильная форма теоремы Гильберта о нулях.</u>

Попытаемся описать устройство всех идеалов в $K[x_1, \dots, x_n]$. Сначала несколько общих замечаний. Пусть A – кольцо и J – идеал в нём. Обозначим символом $I(J)$ подмножество $\mathrm{Spm}(A)$, состоящее из максимальных идеалов, содержащих J. Множество $I(J)$ мы будем называть множеством нулей идеала J.

Пусть M – подмножество $\mathrm{Spm}(A)$. Символом $\bar{M}$ мы будем обозначать идеал, являющийся пересечением всех идеалов из M. Ясно, что $I(\bar{M}) \supset M$.

Если $A = K[x_1, \dots, x_n]$, а поле K алгебраически замкнуто, то множество $I(J)$ имеет следующую простую интерпретацию. Предположим, что идеал J порождается конечным набором многочленов $(P_1, \dots, P_k)$. Скоро мы докажем, что любой идеал в A порождается конечным числом элементов. Мы знаем, что $\mathrm{Spm}(A) \cong K^n$ и нетрудно видеть, что $I(J)$ есть в точности множество всех общих нулей многочленов $P_1, \dots, P_n$.

Естественно задаться вопросом: Как связаны идеалы J и $\overline{I(J)}$. Чтобы ответить на этот вопрос нам понадобится одно общее определение.

<u>Определение</u>. Пусть A – кольцо и J – идеал в нём. Тогда радикалом J называется идеал $r(J)$, состоящий из таких элементов $f \in A$, для которых существует натуральное число N такое, что $f^N \in J$.

$r(0)$ называется радикалом.

<u>Теорема</u> (сильная форма теоремы Гильберта о нулях).

П у с т ь K – п о л е, J – и д е а л в $K[x_1, \dots, x_n]$.
Т о г д а $r(J) = \overline{I(J)}$.

Доказательство. Пусть $f^N \in J$ и $\mathcal{M}$ – максимальный идеал, содержащий J. $L = K[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{M}$ есть поле и стало быть образ f при гомоморфизме $K[x_1, \dots, x_n] \to L$ равен нулю.

Мы показали, что $f \in \mathcal{M}$ и, значит, $r(J) \subset \overline{I(J)}$.

Пусть теперь $f \in \overline{I(J)}$ и при любом натуральном n $f^n \notin J$. Пусть

$B=K[x_1,\dots,x_n]/J$, а $\bar f$ - класс элемента f . Множество $S=(1,\bar f,\bar f^2,\dots)$ есть мультипликативная система в В. Локализуем относительно этой мультипликативной системы, т.е. рассмотрим К-алгебру $B(1/\bar f)$. Напомним, что ее элементами служат дроби $\frac{a}{\bar f^k}$, причем $\frac{a}{\bar f^k}=\frac{b}{\bar f^\ell}$, если $a\bar f^\ell=b\cdot\bar f^k$. Поскольку $\bar f^k\neq 0$ при любом к, то $B(1/\bar f)$ - нетривиальная алгебра /в противном случае она состояла бы из одного нуля/. Алгебра $B(1/\bar f)$ конечно порождена, она порождается элементами $\bar x_1,\dots,\bar x_n, 1/\bar f$. Пусть J_1 - максимальный идеал в $B(1/\bar f)$. Из слабой формы теоремы Гильбе́рта о нулях вытекает, что поле $P=B(1/\bar f)/J_1$ конечно над К. Рассмотрим теперь следующую цепочку гомоморфизмов: $K[x_1,\dots,x_n]\to K[x_1,\dots,x_n]/J\to k[x_1,\dots,x_n]/J\,(1/\bar f)\to P$. Ядро композиции этих гомоморфизмов есть максимальный идеал, содержащий J, и f не лежит в этом максимальном идеале. Но это противоречит тому, что $f\in I(J)$.

Пусть поле К алгебраически замкнуто и J - идеал, порожденный конечным набором многочленов $P_1,\dots,P_k$. Пусть $X\subset K^n$ - множество общих нулей многочленов $P_1,\dots,P_k$ и f обращается в нуль во всех точках X. Тогда существует такое натуральное число n и такие многочлены $Q_1,\dots,Q_k$, что $f^n=\sum P_iQ_i$. Это - классическая формулировка теоремы Гильберта о нулях

Идеал J кольца А мы будем называть "хорошим", если $r(J)=J$. Мы получили, что отображение множества "хороших" идеалов кольца $K[x_1,\dots,x_n]$ в множество подмножеств K^n /К мы опять считаем алгебраически замкнутым/ инъективно. Иначе говоря, "хороший" идеал восстанавливается по множеству своих нулей в $Spm\,K[x_1,\dots,x_n]$.

В заключение этого параграфа мы приведем основное свойство идеала $rad\,A$

П р е д л о ж е н и е 2. I/ $rad\,A$ есть пересечение всех простых идеалов в А. 2/ если J - идеал в А, то $r(J)$ есть пересечение всех простых идеалов кольца А, содержащих J .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт 2 следует из I /нужно применить I к кольцу A/J/. Докажем теперь I. Пусть R - пересечение всех простых идеалов в А. Во-первых, $R\supset rad\,A$. Это почти очевидно, поскольку если $f^n=0$ и Р - простой идеал, то образ f в кольце А/Р равен 0, так как в А/Р нет нильпотентов. Значит, $f\in P$. Теперь предположим, что $f\in R$ и $f^n\neq 0$ при любом натуральном n. Рассмотрим мультипликативную систему $(1,f,f^2,\dots)$ и локализуем по этой системе. В кольце $A(1/f)$ выберем максимальный идеал Р и пусть L - поле $A(1/f)/P$. Напишем цепочку гомоморфизмов

$$A\to A(1/f)\to A(1/f)/P\to L$$

Ядро сквозного гомоморфизма $A\to L$ есть простой идеал, и f в нем не лежит /действительно, f - обратимый элемент кольца $A(1/f)$ и не может принадлежать максимальному идеалу Р/. Противоречие.

Заметим, что теорему Гильберта /сильную/ мы доказывали, используя аналогичный трюк. Только там мы дополнительно имели, что L - конечное расширение К и, стало быть, ядро $A\to L$ есть даже максимальный идеал.

Замечание. Пусть К - поле и J - идеал в алгебре $K[x_1,\ldots,x_n]$. Тогда идеал $r(J)$ совпадает с пересечением всех максимальных идеалов, содержащих J.

Замечание. Бывают такие кольца А, что $\mathrm{rad}\,A$ не совпадает с пересечением всех максимальных идеалов.

§ 3 НЁТЕРОВЫ КОЛЬЦА

Определение. Кольцо А называется нётеровым, если любая возрастающая цепочка его идеалов $J_1\subset J_2\subset J_3\subset\ldots$ стабилизируется, то есть существует номер n такой, что $J_i=J_n$ при $i>n$.

Предложение /эквивалентные определения нётеровости/. Кольцо А нётерово тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих требований: I/Любое непустое подмножество идеалов в А обладает максимальным элементом, 2/ Любой идеал в А конечно порожден.

Доказательство. Пункт I очевиден, ибо если существует множество идеалов без максимального элемента, то в нем можно выделить возрастающую цепочку $J_1\subset J_2\subset\ldots$, которая не стабилизируется. Докажем 2. Пусть J - идеал в А. Рассмотрим множество Σ конечнопорожденных идеалов, содержащихся в J. Ясно, что $\Sigma\neq\varnothing$. Пусть J_1 - максимальный элемент в Σ. Если $J_1\neq J$, то выберем в множестве $J\setminus J_1$ элемент x и рассмотрим идеал J_2, порожденный J_1 и элементом x. Идеал J_2 конечнопорожден, стало быть J_1 не максимальный - противоречие. Обратно, пусть каждый идеал в А конечнопорожден. Рассмотрим цепочку идеалов $J_1\subset J_2\subset J_3\subset\ldots$ и объединение J этих идеалов. Идеал J порождается элементами $x_1,\ldots,x_k$, и ясно, что все эти элементы принадлежат какому-то идеалу J_n. Тогда $J_n=J$.

Определение. Модуль М над кольцом А называется нётеровым, если любая цепочка подмодулей $M_1\subset M_2\subset\ldots$ в М стабилизируется.

Предложение. I/ Если модули M_1 и M_2 нётеровы, то и модуль $M_1\oplus M_2$ нётеров.

2/ Если модуль М нётеров и Н - подмодуль М, то модуль М/Н нётеров.

3/ Любой подмодуль нётерова модуля нётеров.

4/ Модуль М нётеров тогда и только тогда, когда любой его подмодуль конечно порожден.

Доказательство этого предложения мы оставляем читателю.

<u>Предложение</u>. Кольцо А нётерово тогда и только тогда, когда любой конечнопорожденный А-модуль нётеров.

Доказательство. Пусть М - свободный А-модуль с одной образующей е. Легко видеть, что подмодули М суть в точности подмножества в М вида Je, где J - идеал в А. Таким образом, кольцо А нётерово тогда и только тогда, когда нётеров свободный A-модуль с одной образующей. Нётеровость последнего влечет за собой /см. предыдущее предложение/ нётеровость любого конечнопорожденного A-модуля H, поскольку H представляется как фактор свободного модуля.

Без доказательства приведем еще два простых свойства нётеровых колец /проверьте их!/:

1/ A - нетерово кольцо, J - идеал в A, тогда кольцо A/J нетерово.

2/ A - нетерово кольцо, S - мультипликативная система, тогда $S^{-1}A$ - нетерово кольцо.

Теорема Гильберта о базисе. Пусть A - нетерово кольцо. Тогда кольцо $A[x_1,\dots,x_n]$ нетерово.

Доказательство. Доказывать будем индукцией по n. Кольцо A нетерово, значит, при $n=0$ всё в порядке. Теорема будет доказана, если мы покажем, что кольцо $B[x]$ нетерово, если нетерово кольцо B.

Пусть J - идеал в кольце $B[x]$. Покажем, что J допускает конечную систему образующих. Рассмотрим в B идеал J_1, порожденный старшими коэффициентами многочленов из J. В J_1 выберем конечную систему образующих $f_1,\dots,f_k$ и пусть f_i - старший коэффициент многочлена P_i. Пусть N - максимальная из степеней многочленов $P_1, P_2,\dots,P_k$. Если $Q\in J$ - многочлен степени $\geqslant N$, то, очевидным образом, можно подобрать такие элементы $b_1,\dots,b_k$ из B, что старшие коэффициенты у Q и у многочлена $\sum b_i P_i x^{N-\deg P_i}$ одинаковы. Иначе говоря, $\deg(Q-\sum b_i P_i x^{N-\deg P_i}) < \deg Q$. Многочлен $Q_1 = Q-\sum b_i P_i x^{N-\deg P_i}$ лежит в J и если $\deg Q_1\geqslant N$, то применим к нему ту же конструкцию. Повторив это должное количество раз, мы получим, что $Q=\sum R_i P_i + Q_l$, $R_i\in B[x]$, $Q_l\in J$, $\deg Q_l<N$. Пусть J_N - множество многочленов из J степени $\leq N$. Нетрудно видеть, что J_N - конечнопорожденный B-модуль /кольцо B нетерово, а J_N - подмодуль B-модуля $B\oplus Bx\oplus\dots\oplus Bx^N$ /. Выберем в J_N систему образующих $S_1,\dots,S_t$. Множество $\{R_1,\dots,R_k,S_1,\dots,S_t\}$ - система образующих идеала J. Теорема доказана.

Следствие. Пусть A - нетерово кольцо , а B - конечнопорожденная A-алгебра. Тогда B - нетерово кольцо.

Доказательство. Кольцо B есть A-алгебра, это значит, что задан гомоморфизм $\varphi: A\to B$. Конечнопорожденность означает, что в B можно выбрать множество $b_1,\dots,b_k$ такое, что B как кольцо порождается множеством $\{b_1,\dots,b_k\}\cup \operatorname{Im}\varphi$. Определим гомоморфизм $\bar\varphi: A[x_1,\dots,x_n]\to B$, полагая $\bar\varphi(x_i)=b_i$ и $\bar\varphi|_A=\varphi$. Гомоморфизм $\bar\varphi$ сюръективен и, стало быть, B есть фактор нетерова кольца $A[x_1,\dots,x_n]$ по некоторому идеалу. Значит, B нетерово.

Гильберт придумал всю науку, которую мы сейчас изучаем, для целей теории инвариантов. Мы приведем одно простейшее утверждение из этой теории.

Пусть G - конечная подгруппа группы $GL(n,K)$, где К - поле. Группа G действует автоморфизмами на алгебре $K[x_1,\dots x_n]$. Более точно: каждый элемент g группы G определяет отображение $\bar{g}: K[x_1,\dots x_n] \to K[x_1,\dots,x_n]$. Многочлен Р есть функция на K^n, и $\bar{g}P(X)=P(g^{-1}X)$, где $X\in K^n$. Легко проверить, что $\bar{g}$ - автоморфизм и что $\overline{g_1g_2}=\bar{g}_1\bar{g}_2$, $(g_1,g_2\in G)$. Многочлен Р называется инвариантом, если $\bar{g}P=P$ для любого $g\in G$. Множество инвариантных многочленов образует К-подалгебру алгебры $K[x_1,\dots,x_n]$, которую мы будем обозначать символом $[K[x_1,\dots,x_n]]^G$.

Теорема. Алгебра $[K[x_1,\dots,x_n]]^G$ конечно порождена, в частности, она является нетеровым кольцом.

Нам понадобится следующее общее

Предложение. Пусть $A\subset B\subset C$ - некоторые кольца. Мы предполагаем, что А нетерово, С конечно порождено как А-алгебра и С конечно порождено как В-модуль. Тогда В конечно порождено как А-алгебра. В частности, В - нетерово кольцо.

Доказательство. Пусть элементы $x_1,\dots,x_m$ порождают С как А-алгебру, а $y_1,\dots,y_n$ порождают С как В-модуль. Тогда

$$x_i = \sum_j b_{ij} y_j \quad (b_{ij}\in B) \qquad /+/$$

$$y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \quad (b_{ijk}\in B) \qquad /++/$$

Обозначим символом B_0 А-подалгебру в В, порожденную элементами b_{ij} и b_{ijk}. Из равенств /+/ следует, что С порождается элементами $y_1,\dots,y_n$ как B_0-модуль. Действительно, каждый элемент a из С представляется в виде $Q(x_1,\dots,x_m)$, где Q - многочлен с коэффициентами из А. Каждый x_i, используя /+/, выразим через $y_1,\dots,y_n$ и получим, что $a=Q_1(y_1,\dots,y_n)$ с коэффициентами из B_0. Отсюда, ввиду /++/, вытекает: $a=\sum s_i y_i,\ s_i\in B_0$.

Теперь, B_0 - конечнопорожденная А-алгебра, стало быть, B_0 - нетерово кольцо; С - конечнопорожденный B_0-модуль, а В - его подмодуль. Это значит, что В - конечнопорожденный B_0-модуль. Если $\alpha_1,\dots,\alpha_u$ - его образующие, а $\beta_1,\dots,\beta_v$ - образующие B_0 как А-алгебры, то очевидно, что множество $\alpha_1,\dots,\alpha_u,\beta_1,\dots,\beta_v$ порождает В. Предложение доказано.

Доказательство теоремы. Применим предложение к следующей тройке колец: $K\subset[K[x_1,\dots,x_n]]^G\subset K[x_1,\dots,x_n]$. Теорема будет доказана, если мы проверим, что кольцо $K[x_1,\dots,x_n]$ конечно порождено как $[K[x_1,\dots,x_n]]^G$-модуль. Это стандартный факт теории Галуа, но мы все же воспроизведем доказательство. Возьмем многочлен x_i и подействуем на него всеми элементами группы G. Образуем полином Р от переменной t : $P(t)=\prod_{g\in G}(t-\bar{g}x_i)$. Нетрудно убедиться, что коэффициенты этого полинома - инварианты и x_i - его корень. Это значит, что для N =числу элементов в группе G

$$x_i^N=\sum_{j=0}^{N-1}B_j x_i^j \quad , \text{ где } B_j\in[k[x_1,\dots,x_n]]^G .$$

Из этого вытекает, что элементы $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$, где $0\le i_1,\dots,i_n\le N$, порождают $k[x_1,\dots,x_n]$ как $[k[x_1,\dots,x_n]]^G$ -модуль. Теорема доказана.

Модули над коммутативными кольцами и алгебрами

Мы начнем с одной очень важной характеризации радикала.

Определение. Радикалом Джекобсона кольца А /обозначение $\mathfrak{r}(A)$/ называется пересечение всех максимальных идеалов в А.

Напомним, что $\operatorname{rad} A$ - радикал А - есть пересечение всех простых идеалов.

Предложение /Накаяма/. Для любого идеала $J\subset A$ следующие условия равносильны.

I/ имеет место включение $J\subset \mathfrak{r}(A)$

2/ равенство $JM=M$, где М - конечнопорожденный А-модуль, возможно только при М=0.

Доказательство. 2/⇒I/ очевидно. Действительно, пусть m - максимальный идеал в А и $M=A/m$. $JM\neq M \Rightarrow JM=0$, а это значит, что $J\subset m$ и, следовательно, $J\subset \mathfrak{r}(A)$.

I/⇒2/. Пусть $a\in\mathfrak{r}(A)$. Тогда a лежит в каждом максимальном идеале А, следовательно, $1-a$ не принадлежит никакому максимальному идеалу, а это значит, что $A(1-a)=A$ /здесь $A(1-a)$ - идеал, порожденный $1-a$ /. Получаем, что $(1-a)$ - обратимый элемент кольца А, если $a\in\mathfrak{r}(A)$. Пусть теперь $J\subset\mathfrak{r}(A)$ и М - модуль такой, что $JM=M$. Пусть $x_1,x_2,\dots,x_n$ - элементы, порождающие М, причем x_1 не есть линейная комбинация $x_2,\dots,x_n$ /в противном случае x_1 из системы образующих можно выкинуть/. Однако $JM=M$, значит, $x_1=\sum a_i x_i$, где $a_i\in\mathfrak{r}(A)$, откуда $x_1=(1-a_1)^{-1}\sum_{i\ge 2}a_i x_i$. Противоречие.

Функторы Ном, ⊗ , язык категорий

Язык категорий /самый элементарный/ предполагается известным.

Пусть В - кольцо /не обязательно коммутативное/. На категории В-модулей определен бифунктор Ном. Это значит, что любым двум В-модулям M_1 и M_2 ставится в соответствие абелева группа $\operatorname{Hom}(M_1,M_2)$. Этот бифунктор ковариантен по второму аргументу и контравариантен по первому. Это означает, что каждому гомоморфизму модулей $N\to M_1$ отвечает гомоморфизм $\operatorname{Hom}(M_1,M_2)\to \operatorname{Hom}(N,M_2)$. Аналогично, гомоморфизму $N\to M_2$ отвечает гомоморфизм $\operatorname{Hom}(M_1,N)\to\operatorname{Hom}(M_1,M_2)$.

Пусть теперь M_1 - правый B-модуль, а M_2 - левый. Билинейной формой на M_1 и M_2 со значениями в абелевой группе H называется отображение φ, которое ставит в соответствие паре элементов (a,b), $a\in M_1$, $b\in M_2$, элемент $\varphi(a,b)\in H$, причем

1/ $\varphi(a_1+a_2,b)=\varphi(a_1,b)+\varphi(a_2,b)$
$\varphi(a,b_1+b_2)=\varphi(a,b_1)+\varphi(a,b_2)$

2/ $\varphi(ax,b)=\varphi(a,xb)$; $a,a_1,a_2\in M_1$, $b,b_1,b_2\in M_2$, $x\in B$.

Определение. Группа $M_1\otimes M_2$ определяется как фактор-группа F/S, где F - свободная абелева группа с образующими $a\otimes b$ /то есть базис группы F находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $M_1\times M_2$ /, S - подгруппа F, порожденная элементами

$$(a_1+a_2)\otimes b-a_1\otimes b-a_2\otimes b,$$
$$a\otimes(b_1+b_2)-a\otimes b_1-a\otimes b_2,$$
$$ax\otimes b-a\otimes xb \quad \text{для всех} \quad a,a_1,a_2\in M_1,\ b,b_1,b_2\in M_2,\ x\in B.$$

Заметим, что определена билинейная форма на M_1 и M_2 со значениями в $M_1\otimes M_2$, ставящая в соответствие паре (a,b) образ элемента $a\otimes b$ при гомоморфизме $F\to M_1\otimes M_2$. Этот образ мы будем обозначать также $a\otimes b$.

Предложение. Пусть H - абелева группа. Множество всех билинейных форм на M_1, M_2 со значениями в H канонически изоморфно множеству гомоморфизмов абелевых групп $Hom(M_1\otimes M_2, H)$. При этом изоморфизме отображению φ ставится в соответствие гомоморфизм $a\otimes b\mapsto\varphi(a,b)$.

Доказательство сводится к сравнению данных определений.

Предложение. Отображение, сопоставляющее двум модулям M_1, M_2 абелеву группу $M_1\otimes M_2$, есть бифунктор, ковариантный по обоим аргументам.

Это очевидно.

Примеры.

1/ Тензорное произведение модулей над полем - это обычное произведение векторных пространств /при котором размерности перемножаются/.

2/ A - кольцо, J_1 и J_2 -идеалы, тогда $A/J_1\otimes A/J_2\cong A/(J_1,J_2)$, где (J_1,J_2) - пересечение всех идеалов, содержащих $J_1\cup J_2$. В частности, тензорное произведение $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ равно нулю, если m и n - взаимно простые числа.

Пример 2 вытекает из следующего более общего факта.

Предложение. Пусть M - модуль и J - идеал в A. Тогда $M\otimes A/J\cong M/JM$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi: M\otimes A/J\to M/JM$ формулой $m\otimes\bar a\mapsto\overline{am}$, где $m\in M$, $\bar a\in A/J$, a - элемент A, лежащий в смежном классе $\bar a$. Легко показать, что φ корректно определено. В частности, $\varphi(m\otimes\bar a)$ не зависит от выбора a. Заметим, что модуль M порождается /как абелева группа/ уже элементами $m\otimes\bar 1$, где $\bar 1$ - класс единицы в A/J, причем $m\otimes\bar 1=0$, если $m\in JM$. Из этого следует, что

φ - инъекция. Проверку сюръективности φ мы оставляем читателю.

Переформулировка леммы Накаямы. Идеал $J \subset A$ лежит в радикале Джекобсона A в том и только том случае, если для любого модуля $M \neq 0$ $M \otimes A/J \neq 0$.

Важное определение. Пусть $\varphi : A \to B$ - гомоморфизм колец и M - A-модуль. Кольцо B следующим образом наделим структурой A-модуля: $a \cdot b = \varphi(a) \cdot b$; $a \in A$, $b \in B$, где слева умножение модульное, а справа - кольцевое. Тензорное произведение $B \otimes M$ /как двух A-модулей/ снабдим структурой B-модуля, полагая $b_1(b_2 \otimes m) = b_1 b_2 \otimes m$, $m \in M$, $b_1, b_2 \in B$. Мы будем писать $B \otimes_A M$ для того, чтобы подчеркнуть, что тензорное произведение берется над A.

Соответствие $M \longmapsto B \otimes_A M$ есть функтор из категории A-модулей в категорию B-модулей. Этот функтор называется функтором прямого образа или функтором замены колец. Вместо $B \otimes_A M$ иногда пишут $\varphi_* M$.

Снова вернемся к коммутативным кольцам. Заметим, что:

I/ Любой левый модуль над коммутативным кольцом одновременно является и правым /с той же модульной структурой/.

2/ Если M - модуль над A, то умножение на элемент кольца A представляет собой эндоморфизм модуля M.

Из первого замечания вытекает, что над коммутативным кольцом определено тензорное произведение двух левых модулей. Далее, пусть M_1 и M_2 - два -модуля. Из второго замечания и функториальности тензорного произведения вытекает, что каждый элемент A определяет гомоморфизм $M_1 \to M_1$ и, стало быть, отображение $M_1 \otimes M_2 \to M_1 \otimes M_2$. Легко проверить, что таким образом мы получаем на M структуру A-модуля.

где $M = M_1 \otimes M_2$

Под действием $a \in A$ элемент $x_1 \otimes x_2$ переходит в $ax_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes ax_2$.

Тензорное произведение нескольких A-модулей определяется так:

$$M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_k = (\ldots((M_1 \otimes M_2) \otimes M_3) \otimes \ldots\ ) \otimes M_k$$

/при другой расстановке скобок получится изоморфный модуль/.

В случае коммутативного кольца структуру модуля приобретает и группа гомоморфизмов $Hom(M_1, M_2)$. Именно, для $\varphi \in Hom(M_1, M_2)$ и $a \in A$ полагают $(a\varphi)(x) = a \cdot (\varphi(x)) = \varphi(ax)$, $x \in M_1$.

§ 3. Модули над коммутативными кольцами с геометрической точки зрения

Прежде всего мы введем один очень важный класс модулей /все модули мы будем считать конечнопорожденными, не оговаривая этого каждый раз/.

Сформулируем три очевидных свойства модулей над самым простым кольцом - над полем K.

1/ Любой K-модуль свободен.

2/ Любой подмодуль свободного K-модуля свободен.

3/ Пусть P - свободный K-модуль и $P = Q \oplus S$, тогда модули Q и S свободны.

Пусть теперь B - кольцо /не обязательно коммутативное/. Совсем просто доказать, что если любой B-модуль свободен, то B - тело /любой ненулевой элемент из B обратим/. Ясно, что если для B выполняется 2/, то справедливо и 3/.

Задача. Эквивалентны ли условия 2/ и 3/ ?
/Если $B = \mathbb{Z}$ или $B = \mathbb{C}[x]$, то 1/, очевидно, неверно, а 2/ и 3/ выполняются./

Задача /трудная/. Выполняется ли условие 3/ для $B = \mathbb{C}[x,y]$?

Определение. Модуль P над кольцом B называется проективным, если существует такой модуль Q, что $P \oplus Q$ - свободный модуль.

Иначе говоря, проективные модули суть прямые слагаемые свободных. Проективные модули по своим свойствам имеют много общего с конечномерными векторными пространствами.

Предложение. 1/ Пусть P - проективный модуль и $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ - точная последовательность B-модулей. Тогда точна последовательность

/ж/ $$0 \to Hom(P, M_1) \to Hom(P, M_2) \to Hom(P, M_3) \to 0 .$$

2/ Обратно, пусть P - такой модуль, что для каждой точной последовательности $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ точна последовательность /ж/. Тогда P проективен.

Доказательство. Если P - свободный модуль с k образующими, то $Hom(P,N) = \underbrace{N \oplus N \oplus \ldots \oplus N}_{k \text{ раз}}$. Таким образом, если модуль P свободен, то последовательность /ж/ очевидным образом точна. Пусть свободен модуль $P \oplus Q$. Заметим, что $Hom(P \oplus Q, N) = Hom(P,N) \oplus Hom(Q,N)$. Это значит, что точна последовательность $0 \to Hom(P, M_1) \oplus Hom(Q, M_1) \to$
$$\to Hom(P, M_2) \oplus Hom(Q, M_2) \to Hom(P, M_3) \oplus Hom(Q, M_3) \to 0 .$$
Эта последовательность есть просто сумма двух последовательностей:
$$0 \to Hom(P, M_1) \to Hom(P, M_2) \to Hom(P, M_3) \to 0$$
$$0 \to Hom(Q, M_1) \to Hom(Q, M_2) \to Hom(Q, M_3) \to 0 .$$
Мы получаем, что точна каждая из них. Пункт 1/ доказан.

2/. Выберем в P систему образующих $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Пусть M - свободный модуль ранга к и $\varphi: M \to P$ есть отображение, переводящее образующие M в $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Напишем точную последовательность $0 \to N \to M \xrightarrow{\varphi} P \to 0$, где N - ядро φ. Точна последовательность

/**/ $$0 \to Hom(P,N) \to Hom(P,M) \xrightarrow{\varphi_*} Hom(P,P) \to 0$$

В частности, отображение φ_* является эпиморфизмом и тождественный гомоморфизм $P \to P$ есть образ какого-то гомоморфизма $\alpha: P \to M$. Из того, что $\varphi \circ \alpha = id_P$, вытекает, что α есть вложение и $M = N \oplus \alpha(P)$, т.е. P есть прямое слагаемое свободного модуля. Предложение доказано.

Задача. Опишите все проективные модули над кольцом $\mathbb{Z} \oplus \sqrt{5}\,\mathbb{Z}$.

Замечание. Предложение I означает, что проективные модули имеют чисто категорное описание. Это значит следующее. Каждому модулю P ставится в соответствие набор абелевых групп $Hom(P,M)$ и набор отображений $Hom(P,M_1) \to Hom(P,M_2)$, которые отвечают гомоморфизмам $M_1 \to M_2$. По этим данным, пользуясь предложением, мы можем выяснить, проективен модуль P или нет. По этим данным, вообще говоря, нельзя узнать, свободен ли модуль P. Постарайтесь построить соответствующий пример.

В стандартных учебниках проективные модули определяются обычно несколько иначе. А именно, модуль P проективен, если для любого гомоморфизма $\alpha: P \to M$ и любого эпиморфизма $\beta: N \to M$ существует гомоморфизм $\gamma: P \to N$ такой, что $\beta \circ \gamma = \alpha$ /N, M - произвольные модули/.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, dashed, "\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & N \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Задача. Докажите эквивалентность этого определения проективности нашему.

Пусть теперь X - топологическое пространство. Мы будем считать X хорошим, т.е. хаусдорфовым, связным и т.д. Пусть $A = C(X)$ - кольцо непрерывных функций на X с комплексными значениями. Наша задача сейчас - описать проективные модули над A.

Н а в о д я щ и е   с о о б р а ж е н и я. Пусть M - свободный модуль ранга к. Его элементы - наборы из к функций на X. Иначе говоря, элемент модуля M - это непрерывное отображение $X \to \mathbb{C}^k$. Пусть $Y = X \times \mathbb{C}^k$, $\pi_1: Y \to X$, $\pi_2: Y \to \mathbb{C}^k$ - проекции Y на первый и второй сомножитель соответственно. Каждой функции $\varphi: X \to \mathbb{C}^k$ поставим в соответствие отображение $\tilde{\varphi}: X \to Y$, $\tilde{\varphi}(x) = (x, \varphi(x))$. Ясно, что композиция $\pi_1 \circ \tilde{\varphi} = id$, где id - тождественное отображение $X \to X$. Обратно, каждому отображению $s: X \to Y$ такому, что $\pi_1 \circ s = id$, поставим в соответствие отображение $\pi_2 \circ s: X \to \mathbb{C}^k$.

Смысл изложенной только что конструкции заключается в следующем. Каждому свободному модулю M мы поставили в соответствие геометрическое образование - отображение двух топологических пространств $\pi_1: Y \to X$, при котором прообраз любой точки из X есть линейное пространство. Обратно, по такой геометрической картинке воостанавливается модуль. Перейдем теперь к точным определениям.

Определение. Отображение двух топологических пространств $\xi: Y \to X$ называется комплексным векторным расслоением размерности к, если

1/ для любой точки $x \in X$ на прообразе $\xi^{-1}(x)$ задана структура к-мерного комплексного векторного пространства; пространство $\xi^{-1}(x)$ называется слоем расслоения.

2/ для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность $U \ni x$ и гомеоморфизм $\xi^{-1}(x) \to U \times C^k$, который для любой точки $y \in U$ индуцирует изоморфизм векторных пространств $\xi^{-1}(y) \to C^k$.

Мы будем говорить в этом случае, что над пространством X задано векторное расслоение ξ.

Определение. Сечением расслоения ξ называется непрерывное отображение $s: X \to Y$ такое, что $\xi \circ s = id$.

Множество всех сечений расслоения ξ будем обозначать символом $\Gamma(\xi)$. Множество $\Gamma(\xi)$ естественно наделяется структурой А-модуля. А именно, 1/ если s_1 и s_2 - два сечения, то s_1+s_2 по определению есть сечение $s_1+s_2: X \to Y$, $(s_1+s_2)(x) = s_1(x)+s_2(x)$ /сумма двух векторов пространства $\xi^{-1}(x)$/, 2/ если $f \in A$ и s - сечение, то $(fs)(x) = f(x)s(x)$ /произведение вектора $s(x)$ на число $f(x)$ /.

Определение. Расслоение $\xi: Y \to X$ называется тривиальным, если существует гомеоморфизм $Y \to X \times C^k$, индуцирующий на каждом слое $\xi^{-1}(x)$ изоморфизм $\xi^{-1}(x) \to C^k$.

Задача. Если расслоение ξ тривиально, то модуль $\Gamma(\xi)$ свободен.

Предложение. Если P - проективный А-модуль, то существует такое расслоение ξ над X, что $P = \Gamma(\xi)$.

Доказательство. Проективный модуль P есть прямое слагаемое в некотором свободном модуле $M = \Gamma(\gamma)$, где γ - тривиальное N-мерное расслоение над X, $M = P \oplus Q$. Пусть $x \in X$ и $m(x)$ - идеал в кольце А, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке x. Как нетрудно видеть, $M/m(x)M \cong C^k$ и $C^k = P/m(x)P \oplus Q/m(x)Q$. Пространство $M/m(x)M$ - слой расслоения γ в точке x, а $P/m(x)P$ - подпространство этого слоя. Пусть Y - теоретико-множественная сумма пространств $P/m(x)P$ по всем $x \in X$ и $\xi: Y \to X$ - естественная проекция. Докажем, что ξ и есть искомое расслоение. Выберем в пространстве $P/m(x)P$ базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$, а в пространстве $Q/m(x)Q$ - базис $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_N$. Пусть $e_1, \dots, e_k$ - элементы модуля P, проектирующиеся в $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$ при проекции $P \to P/m(x)P$ и пусть $e_{k+1}, \dots, e_N$ - элементы Q, проектирующиеся в $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_N$ при проекции $Q \to Q/m(x)Q$. Сечения $e_1, \dots, e_N$ суть сечения тривиального расслоения γ, т.е. непрерывные функции $X \to C^N$, причем $e_1(x), \dots, e_N(x)$ - базис в $\gamma^{-1}(x) \cong C^N$. Выберем в C^N базис. Векторы

$e_1(y), \dots, e_N(y)$ составляют $N\times N$ -матрицу. Определитель этой матрицы - непрерывная функция на X. Следовательно, существует такая окрестность точки x $\mathcal{U}_x$, что векторы $e_1(y), \dots, e_N(y)$ линейно независимы для любого $y\in\mathcal{U}_x$. Далее, векторы $e_1(y), \dots, e_k(y)$ лежат в $P/m(y)P$, а $e_{k+1}(y), \dots, e_N(y)$ - в $Q/m(y)Q$. Поэтому $\dim P/m(y)P = \dim P/m(x)P$ и $\dim Q/m(y)Q = \dim Q/m(x)Q$. Иначе говоря, $\dim P/m(x)P$ - локально постоянная функция на X, т.е. постоянная, поскольку X связно. Введем на Y топологию подпространства $X\times\mathbb{C}^N$. Рассмотрим подмножество $\xi^{-1}(\mathcal{U}_x)\subset Y$. Базис $e_1, \dots, e_N$ задает отображение $\varphi: \xi^{-1}(\mathcal{U}_x)\to\mathcal{U}_x\times\mathbb{C}^N$, $\varphi(\sum a_i e_i(y)) = (y; a_1, \dots, a_N)$, являющееся гомеоморфизмом. Мы показали, что $\xi: Y\to X$ действительно есть расслоение.

Каждый элемент $p\in P$ определяет сечение s расслоения ξ, $s(x)=\alpha(p)$, где α - проекция $P\to P/m(x)P$. Определено, следовательно, вложение $P\to\Gamma(\xi)$. Модулю Q можно поставить в соответствие расслоение η, такое что $\Gamma(\gamma)=\Gamma(\xi)\oplus\Gamma(\eta)$ и Q вложено в $\Gamma(\eta)$. Итак, $P=\Gamma(\xi)$, $Q=\Gamma(\eta)$. Предложение доказано.

<u>Предложение</u>. Пусть X - компактное пространство и ξ - векторное расслоение над X. Тогда $\Gamma(\xi)$ - проективный A-модуль.

/Замечание: X можно считать не компактным, а, скажем, паракомпактным. Предположение о компактности X упрощает доказательство/

Доказательство. Мы покажем, что $\Gamma(\xi)$ есть прямое слагаемое свободного модуля.

У каждой точки $x\in X$ выберем окрестность $\mathcal{U}_x$ так, что расслоение $\xi^{-1}(\mathcal{U}_x)\to\mathcal{U}_x$ тривиально. Это можно сделать в силу условия 2/ из определения расслоения. Окрестности $\mathcal{U}_x$ образуют покрытие X, из которого мы выберем конечное подпокрытие $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$. Пусть φ_i - функция на X такая, что $\varphi_i(y)=0$, если $y\notin\mathcal{U}_i$ и $\varphi_i(y)\neq 0$, если $y\in\mathcal{U}_i$. Существование такой функции гарантируется некоторыми теоремами общей топологии /если хотите - докажите!/. Пусть $\theta_i: \xi^{-1}(\mathcal{U}_i)\to\mathbb{C}^k$ - композиция гомеоморфизма $\xi^{-1}(\mathcal{U}_i)\to\mathcal{U}_i\times\mathbb{C}^k$ и проекции на второй сомножитель. Ясно, что отображение $\varphi_i\theta_i: \xi^{-1}(\mathcal{U}_i)\to\mathbb{C}^k$ продолжается до непрерывного отображения $\tilde\theta_i: \xi^{-1}(X)\to\mathbb{C}^k$. Пусть $\lambda: \xi^{-1}(X)\to\underbrace{\mathbb{C}^k\oplus\dots\oplus\mathbb{C}^k}_{n\ \text{раз}}=\mathbb{C}^{nk}$ - отображение, компоненты которого суть $\tilde\theta_i$. Сужение λ на $\xi^{-1}(x)$, $x\in X$, есть линейное отображение, вкладывающее $\xi^{-1}(x)$ в $\mathbb{C}^{nk}$. Зададим теперь в $\mathbb{C}^{nk}$ эрмитову форму и обозначим $\eta^{-1}(x)$ ортогональное дополнение к $\lambda(\xi^{-1}(x))$. Пусть $Y=\bigcup_{x\in X}\eta^{-1}(x)$. Очевидное отображение $Y\to X$ является расслоеним, обозначим его буквой η. Заметим, что $\Gamma(\xi)\oplus\Gamma(\eta)$ есть свободный A-модуль ранга nk. Предложение доказано.

<u>Задача</u>. Если P и Q - проективные модули, то $P\otimes Q$ также проективный модуль. Пусть $P=\Gamma(\xi)$, $Q=\Gamma(\eta)$. Какому расслоению μ отвечает модуль $P\otimes Q$?

§ 5

k — алгебраически замкнутое поле

Градуированные алгебры и модули. Проективный спектр.

1. Градуированной алгеброй называется алгебра, представленная в виде прямой суммы

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$$

так, что если $a \in A_i$, $b \in A_j$, то $ab \in A_{i+j}$.
Если $a \in A_i$, то мы будем ~~иметь~~ писать: $\operatorname{gr} a = i$.

Примеры:

1) Пусть $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов. Тогда $A = \oplus A_i$, где A_i — пространство многочленов степени i.

2) Пусть A — алгебра и J — идеал в A. Построим градуированную алгебру

$$A_J = A/J \oplus J/J^2 \oplus J^2/J^3 \oplus \ldots$$

Умножение в алгебре A_J определяется следующим образом. Пусть $a \in J^k/J^{k-1}$, $b \in J^l/J^{l-1}$, $\bar{a}$ — смежный класс отвечающий элементу a в J^k, а $\bar{b}$ — смежный класс, отвечающий b. Тогда множество $\overline{ab}$, составленное из произведений xy, $x \in \bar{a}$, $y \in \bar{b}$ лежит, как нетрудно видеть, в некотором классе смежности J^{k+l} по J^{k+l-1} (проверьте это!). Соответствующий элемент J^{k+l}/J^{k+l-1} и есть по определению ab. Если $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ и J — идеал, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль в начале координат, то A_J — градуированная алгебра примера 1.

3) Пусть $(m_1, \ldots, m_n)$ — набор неотрицательных целых чисел. Зададим на $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ следующую градуировку. Многочлен $P \in A_k$, если

$$P(\lambda^{m_1}x_1, \lambda^{m_2}x_2, \dots, \lambda^{m_n}x_n) = \lambda^K P, \quad \lambda \in k.$$

Такой многочлен называется квазиоднородным. Такая градуировка алгебры многочленов однозначно характеризуется условием: $gr(x_i) = m_i$.

Градуированным идеалом называется такой идеал J градуированной алгебры A, что $J = \bigoplus_n J \cap A_n = \bigoplus J_n$. Фактор градуированной алгебры по градуированному идеалу — градуированная алгебра.

Градуированным модулем называется модуль M над градуированной алгеброй A, снабженный градуировкой $M = \bigoplus_{i \geq N} M_i \ (N \in \mathbb{Z})$ так, что $A_i M_j \subset M_{i+j}$.

Гомоморфизм градуированных модулей M и L степени ℓ — это гомоморфизм $\varphi: M \to L$, такой, что $\varphi(M_i) \subset L_{i+\ell}$.

Замечание. Практически все понятия обычной теории колец и модулей над ними имеют градуированные аналоги. Далее мы не будем на этом специально останавливаться.

Пример. Пусть A — алгебра, J — идеал в A, M есть A-модуль.

Положим

$$M_J = M/JM \oplus JM/J^2M \oplus J^2M/J^3M \oplus \dots$$

Легко видеть (покажите!), что M_J есть градуированный A_J-модуль.

2. Проективный спектр.

Пусть $A = k[x_1, \dots, x_n]$ и пусть $gr(x_i) = 1$, J — градуированный идеал в A, kP^{n-1} — множество прямых, проходящих через начало координат в пространстве k^n.

Проективным алгебраическим многообразием, отвечающим идеалу J называется подмножество kP^{n-1}, составленное из таких прямых ℓ, что для всех $Q \in J$, $Q(x)=0$, $x \in \ell$. Кольцо A нетерово, из этого следует, что идеал J порождается конечным набором однородных полиномов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$. Проективное алгебраическое многообразие, отвечающее J состоит, таким образом, из прямых ℓ, таких, что $\forall i, Q_i(x_1, \ldots, x_n)=0$, $(x_1,\ldots,x_n)$ – однородные координаты ℓ. Мы говорим в таком случае, что многообразие задается уравнениями $Q_1, \ldots, Q_s$. . Иногда это алгебраическое многообразие обозначают символом $Proj\,(A/J)$.

<u>Замечание</u>. Если $k = \mathbb{C}$, то $Proj\,(A/J)$ наделено структурой топологического пространства. $Proj\,(A/J)$ есть подпространство $Proj\,(A) = \mathbb{C}P^{n-1}$. Более того, $Proj\,(A/J)$ – многообразие с особенностями чётной размерности $2r$. Мы разовьем впоследствии технику, которая позволит нам в частности чисто алгебраически определить число r.

<u>Определение</u>. Рациональной функцией на kP^{n-1} называется такая функция $f: kP^{n-1} \to \{k \cup \infty\}$, которая прямой ℓ с однородными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ относит число $\dfrac{Q_1(x_1,\ldots,x_n)}{Q_2(x_1,\ldots,x_n)}$. Q_1 и Q_2 – однородные полиномы одинаковых степеней; $f(\ell) = \infty$, если $Q_2(x_1,\ldots,x_n)=0$. Мы исключаем случай, когда $Q_1 = Q_2 \equiv 0$.

Другими словами – рациональная функция на kP^{n-1} – функция определенная на подмножестве kP^{n-1}, состоящем из прямых, на которых $Q_2 \neq 0$.

<u>Пример</u>. $kP^1 = k \cup \infty$ Рациональные функции на kP^1 суть выражения $R(z)/S(z)$, $z \in k$; R, S – многочлены.

<u>Предложение</u>.

Множество всех рациональных функций на kP^n есть поле, изоморфное полю частных алгебры $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

<u>Доказательство</u>. Две рациональные функции можно очевидным образом складывать и умножать. Если f – рациональная функция, то и f^{-1} – тоже рациональная. Наконец, поставим в соответствие дроби Q_1/Q_2 следующий элемент

$\dfrac{Q_1(x_1,\dots,x_{n-1},1)}{Q_2(x_1,\dots,x_{n-1},1)}$ поля частных алгебры $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$.

Это соответствие и дает требуемый изоморфизм.

Пусть $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ – градуированная алгебра без делителей нуля. Полем частных A будем называть поле, элементами которого служат дроби $\frac{a}{b}$, $a \in A_i$, $b \in A_i$. Складываются и умножаются такие дроби по обычным правилам.

<u>Определение</u>. Функция $f\colon \mathrm{Proj}\,(k[x_1,\dots,x_n]/J) \to (k \cup \infty)$ называется рациональной, если

а) $f(\mathrm{Proj}\,(k[x_1,\dots,x_n]/J))$ не равно тождественно ∞;

б) существует такая рациональная функция $\bar f$ на kP^{n-1}, что f есть ограничение $\bar f$ на $\mathrm{Proj}\,(k[x_1,\dots,x_n]/J) \subset kP^{n-2}$.

Если X – проективное алгебраическое многообразие, то символом $k(X)$ мы будем обозначать поле рациональных функций на X.

<u>Определение</u>. Пусть X, Y – два проективных многообразия. Отображение $f\colon X \to Y$ называется морфизмом (алгебраических многообразий), если для любой рациональной функции φ на Y функция $\varphi \circ f$ есть или рациональная функция на X или тождественное отображение $X \to \infty$. Два проективных многообразия X, Y называются изоморфными, если существуют два морфизма $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$, такие, что $fg\colon X \to Y$ и $gf\colon X \to X$ – тождественные отображения.

Определение. Топологией Зарисского на проективном алгебраическом многообразии X называется топология со следующим базисом открытых множеств:

$$U_\varphi = \{x \in X, \varphi(x) \neq \infty\}, \varphi \in k(X).$$

Определение. Квазипроективным многообразием называется открытое по Зарисскому подмножество в проективном алгебраическом многообразии X. Рациональной функцией на квазипроективном многообразии U называется ограничение на U рациональной функции на X. Морфизм квазипроективных многообразий определяется точно так же, как морфизм проективных многообразий.

Множество рациональных функций на U образует поле. Мы его будем обозначать символом $k(U)$.

Определение. Размерностью квазипроективного многообразия называется степень трансцендентности поля рациональных функций на нем.

Напомним, степенью трансцендентности поля K над k называется минимальное число s элементов $t_1, t_2, \dots, t_s$ таких, что расширение $K : k(t_1, \dots, t_s)$ - конечно. $k(t_1, \dots, t_s)$ поле, порожденное k и элементами $t_1, \dots, t_s \in K$.

Задача. Пусть X - проективное многообразие и U - открытое по Зарисскому подмножество в X. Пусть $f: X \to \{k \vee \infty\}$ - рациональная функция. Докажите, что $f \equiv 0$ если f, суженное на U, равно нулю. Из этого следует, что поля $k(X)$ и $k(U)$ изоморфны.

Определение. Рациональная функция на квазипроективном многообразии называется регулярной, если она не принимает значение ∞.

Кольцо регулярных функций на квазипроективном многообразии U мы будем обозначать символом $k[U]$.

Примеры.

1. $kP^n \times kP^m$ – проективное алгебраическое многообразие. Для того, чтобы это показать, нам нужно вложить $kP^n \times kP^m$ в проективное пространство kP^N так, чтобы образ был множеством нулей конечного числа однородных полиномов.

Точка $kP^n \times kP^m$ – пара прямых $l_1 \times l_2$, пусть $x_1, \ldots x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{m+1}$ – их однородные координаты. Поставим в соответствие точке $l_1 \times l_2$ прямую b $k^{(n+1)(m+1)}$ с однородными координатами $(\ldots, x_i y_j, \ldots)$. Иначе говоря, мы построили отображение $\varphi : kP^n \times kP^m \to kP^{nm+n+m}$.

Пространство $k^{(n+1)(m+1)}$ мы отождествим с пространством матриц $\{a_{ij}\}$ $1 \le i \le n+1, 1 \le j \le m+1$. Образ отображения φ состоит, как нетрудно видеть, из матриц ранга 1. (Докажите.) Это значит, что образ задается следующими уравнениями: определители всех миноров матрицы $\{a_{ij}\}$ порядка 2 равны нулю.

2. Пусть $G(l, n)$ – множество подпространств k^n размерности l, содержащих начало координат. $G(l, n)$ – проективное алгебраическое многообразие. Для доказательства удобно воспользоваться языком внешних форм. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в пространстве $V = k^n$. Алгебра форм Λ порождается элементами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, которые удовлетворяют соотношениям $e_i \wedge e_j = - e_j \wedge e_i$. Операцию умножения мы, следуя традиции, обозначаем символом $\wedge$. В частности, $e_i \wedge e_i = - e_i \wedge e_i = 0$. Алгебра $\Lambda^* = \bigoplus_{l=0}^{n} \Lambda^l$, в пространстве l-форм Λ^l можно выбрать базис $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_l$. Произведение базисных элементов вычисляется естественным образом, например:

$$(e_3\wedge e_4)\wedge(e_1\wedge e_2) = e_3\wedge e_4\wedge e_1\wedge e_2 = -e_3\wedge e_1\wedge e_4\wedge e_2 =$$
$$= e_1\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_2 = -e_1\wedge e_3\wedge e_2\wedge e_4 = e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4.$$

Пусть W – ℓ-мерное подпространство в V. Выберем в W базис $v_1,\dots,v_\ell$ и рассмотрим ℓ-форму $v_1\wedge v_2\wedge\dots\wedge v_\ell\in\Lambda^\ell$. Если $v_1',\dots,v_\ell'$ – другой базис в W, то $v_1'\wedge v_2'\wedge\dots\wedge v_\ell' = (\operatorname{Det} A)\, v_1\wedge v_2\wedge\dots\wedge v_\ell$, где A – матрица перехода от $(v_1,\dots,v_\ell)$ к $v_1', v_2',\dots,v_\ell'$. Это значит, что ℓ-форма $v_1\wedge\dots\wedge v_\ell$ с точностью до константы определяется пространством W. Мы получаем вложение

$$\varphi:\ G(\ell,n)\to P(\Lambda^\ell),$$

где $P(\Lambda^\ell)$ – множество прямых, содержащих нуль в Λ^ℓ.

Каждый элемент $\omega\in\Lambda^\ell$ определяет линейное отображение $\theta(\omega): V=\Lambda^1\to\Lambda^{\ell+1}$, которое переводит $v\to v\wedge\omega$

<u>Лемма</u>. $\omega\in\Lambda^\ell$ лежит на прямой $\varphi(W)\in G(\ell,n)$ в том и только в том случае, если

$$\operatorname{Ker}\theta(\omega) = W.$$

Если ω не лежит на такой прямой, то $\dim\operatorname{Ker}\theta(\omega)<\ell$.

<u>Доказательство</u>. Если ω лежит на прямой $\varphi(W)$, то $\operatorname{Ker}\theta(\omega)=W$ (проверьте!). Обратно, пусть $W=\operatorname{Ker}\theta(\omega)$. Выберем в V базис $v_1,v_2,\dots,v_n$ так, что $v_1,\dots,v_\ell$ – – базис в W. Пусть $\omega = \sum\limits_{i_1<\dots<i_\ell} a_{i_1,\dots,i_\ell} v_{i_1}\wedge v_{i_2}\wedge\dots\wedge v_{i_\ell}$. Если набор $(i_1,\dots,i_\ell)$ не включает числа r и $a_{i_1,\dots,i_\ell}\neq 0$, то $v_r\wedge\omega\neq 0$. Это означает, что все $a_{i_1,\dots,i_\ell}=0$, кроме $a_{1,2,3,\dots,\ell}$. Если размерность ядра $>\ell$, то $\omega=0$. Лемма доказана.

Каждому $\omega\in\Lambda^\ell(V)$ ставится в соответствие матрица преобразования $V\to\Lambda^{\ell+1}V$. Миноры порядка $\dim V-\ell+1$ этой матрицы – однородные полиномы на $\Lambda^\ell(V)$. Они и определяют алгебраическое многообразие $G_r(l,n)$.

Предложение. Пусть X, Y – проективные алгебраические многообразия, тогда $X\times Y$ – алгебраическое многообразие.

Доказательство.

Многообразие X вложено в kP^{n_1} и задается там уравнениями $f_1,\dots,f_s$, а Y вложено в kP^{n_2} и задается там уравнениями $G_1, G_2,\dots,G_t$. Согласно примеру 1 $kP^{n_1}\times kP^{n_2}$ вложено в $kP^{n_1n_2+n_1+n_2}$. В этом пространстве многообразие $X\times Y$ задается следующими уравнениями. Пусть $\{a_{ij}\}$ – – координаты в $k^{(n_1+1)(n_2+1)}$ $(1\le i\le n_1+1,\ 1\le j\le n_2+1)$.

I. группа уравнений:

Все миноры (2x2) матрицы $\{a_{ij}\}$ равны нулю.

II. группа уравнений:

$$f_i(a_{1,j},a_{2,j},\dots,a_{n_1+1,j})=0\quad(1\le i\le s,\ 1\le j\le n_2+1)$$

$$G_p(a_{q,1},a_{q,2},\dots,a_{q,n_2+1})=0\quad(1\le p\le t,\ 1\le q\le n_1+1)$$

Задача. Пусть V – n-мерное пространство над k. Флагом в V называется набор подпространств

$$0=V_0\subset V_1\subset V_2\subset\dots\subset V_n=V,\ \dim V_i=i.$$

Пусть F – множество всех флагов. Покажите, что F – проективное алгебраическое многообразие.

Задача. Докажите, что kP^{n-1} изоморфно многообразию, заданному уравнением $x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n+1}^2=0$

Мы привели основной (неполный) список определений о проективных алгебраических многообразиях. Неформально говоря, проективное многообразие – геометрический объект, отвечающий однородному идеалу в алгебре $k[x_1,\dots,x_n]$.

§ 6

Многочлены Гильберта. Теорема Гильберта о сизигиях

1. Многочлены Гильберта.

В этом параграфе A – градуированная нетерова алгебра такая, что A_0 – конечномерная алгебра. Пусть M – конечнопорожденный градуированный A-модуль.

Алгебра A конечнопорождена, это, в частности, означает, что $\dim_k A_i < \infty$. Из конечнопорожденности модуля M вытекает, что $\dim M_i < \infty$. Поставим в соответствие модулю M следующий формальный ряд Лорана

$$\tau(M,t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k M_i \, t^i$$

Лемма. Пусть $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to \ldots \to M_n \to 0$ – точная последовательность градуированных модулей, причем гомоморфизм f_i имеет степень z_i. Тогда

$$\tau(M_1,t) - t^{-z_1}\tau(M_2,t) + t^{-z_1-z_2}\tau(M_3,t) -$$
$$- t^{-z_1-z_2-z_3}\tau(M_4,t) + \ldots = 0$$

Доказательство непосредственно вытекает из определений и мы оставляем его читателю.

Пример. а) Пусть $A = k[x_1,\ldots,x_n]$, $\operatorname{gr} x_i = 1$ и M – свободный одномерный модуль, $M_i = A_i$. Тогда $\dim M_i$ равняется числу разбиений (упорядоченных) числа i в сумму не более, чем n слагаемых. Число таких разбиений равно

$$g(i) = \frac{(i+1)(i+2)\ldots(i+n-1)}{(n-1)!}, \text{ а}$$

$$\tau(M,t) = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Заметим, что

$g(i)$ при $i \geq 0$ – многочлен от i степени $n-1$.

б) Пусть $A = k[x_1, \dots, x_n]$, $\deg x_i = m_i$, $M = A$ и пусть N – наименьшее общее кратное чисел $m_1, \dots, m_n$. Тогда для любого l функция $g(l+iN)$ – многочлен от i при достаточно большом i (докажите).

$$\tau(M,t) = \frac{1}{(1-t^{m_1})(1-t^{m_2})\dots(1-t^{m_n})} \text{ (проверьте).}$$

<u>Теорема</u> (Гильберт-Серр).

Пусть $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ – градуированная алгебра, A_0 – конечномерная алгебра и A порождается множеством A_1. Пусть M – градуированный конечнопорожденный A-модуль. Тогда существует такой многочлен одной переменной P, что $g(i) = \dim M_i = P(i)$ при достаточно большом i (т.е. $g(i) = P(i)$ при $i > N$).

Такой многочлен мы будем обозначать символом $P_M(\ )$ и называть многочленом Гильберта.

<u>Доказательство</u> теоремы. Проведем ~~индукцию~~ индукцией по размерности A_1. Если $\dim_k A_1 = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Выберем в A_1 элемент x и рассмотрим ~~такую~~ точную последовательность

$$0 \to N_1 \to M \xrightarrow{x} M \to N_2 \to 0$$

$\xrightarrow{x}$ – это оператор умножения на x, ясно, что $\xrightarrow{x}$ – – гомоморфизм степени 1. На модулях N_1 и N_2 оператор умножения на x действует тривиально. Иначе говоря, N_1 и N_2 – градуированные $A/(x)$-модули. Алгебра $A/(x)$ градуирована и $\dim (A/(x))_1 = \dim A_1 - 1$. Таким образом к N_1 и N_2 применимо предположение индукции. Пользуясь леммой, получим, что $g(i)-g(i-1)$ – многочлен при достаточно больших i.

Пусть $g(i)-g(i-1)=R(i)$, где $R(i)$ – полином. Легко показать (покажите), что существует полином Q, такой, что

$$Q(i)-Q(i-1)=R(i)$$

Указание. Примените индукцию по степени многочлена R.

Положим $T(i)=g(i)-Q(i)$

Тогда при достаточно больших i $T(i)-T(i-1)=0$, т.е. $T(i)=const$.

Иначе говоря, $g(i)=Q(i)+const$ при достаточно больших i. Теорема доказана.

Многочлен Гильберта одномерного свободного модуля мы будем называть многочленом Гильберта алгебры и обозначать $P_A(\ )$.

Замечание 1. Из доказательства теоремы вытекает, что степень многочлена P_M не превосходит $\dim A_1 - 1$.

Замечание 2. Пусть $A=A_0\oplus A_1\oplus\ldots$ – градуированное кольцо, порожденное элементами $x_1, \ldots x_e$, где $x_i=m_i$ и пусть ~~где~~ M – градуированный конечнопорожденный A-модуль. N – наименьшее общее кратное чисел $m_1, m_2, \ldots$. Тогда можно показать, что при достаточно большом i выражение $\dim M_{r+iN}$ – многочлен от i $(r\in\mathbb{Z})$.

Замечание 3. Пусть A (неградуированная) нетерова алгебра и J – идеал в A конечной коразмерности. Положим $g(i)=\dim J^i/J^{i+1}$. Из теоремы Гильберта-Серра вытекает, что при достаточно больших i $g(i)$ – полином.

Определение. Пусть $A=A_0\oplus A_1\oplus\ldots$ – градуированная нетерова алгебра, $\dim A_0<\infty$, порождаемая A_1. Размерностью $\dim A$ такой алгебры называется степень ее многочлена Гильберта.

2. ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О СИЗИГИЯХ.

Пусть B -кольцо и M -модуль.

Определение. Резольвентой модуля M называется точная последовательность B - модулей:

$$0 \leftarrow M \leftarrow R_0 \leftarrow R_1 \leftarrow R_2 \leftarrow R_3 \leftarrow \ldots \quad (*)$$

Пример. Пусть $f_1, \ldots, f_\ell$ - система образующих модуля M. Число ℓ - целое неотрицательное или равно бесконечности. Положим $F_0 = B \oplus B \oplus \ldots \oplus B$ (ℓ раз). Иначе говоря, F_0 -свободный B - модуль ранга ℓ. Любой элемент F_0 записывается в виде $\sum_1^\ell b_i \varepsilon_i$, ε_i -образующие F_0, $b_i \in B$. Естественное отображение $d_0 : F_0 \to M$ ($d_0(\sum b_i \varepsilon_i) = \sum b_i f_i$) есть сюръекция. Ядро $\ker d_0$ интерпретируется как модуль соотношений между образующими $f_1, \ldots, f_\ell$. Действительно, элемент $\sum b_i \varepsilon_i \in \ker d_0$, если $\sum b_i f_i = 0$. Выберем в $\ker d_0$ систему образующих $g_1, \ldots, g_n$ (n, быть может, равно ∞) и отобразим на $\ker d_0$, свободный B -модуль F_1 ранга n.
$\bar{d}_1 : F_1 \to \ker d_0$. Гомолирфизм d_1 определим как композицию $d_1 : F_1 \to \ker d_0$ и вложения $\ker d_0 \to F_0$. Образ d_1 есть в точности ядро d_0. Мы построили следующую точную последовательность:

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{d_0} F_0 \xleftarrow{d_1} F_1$$

Этот процесс можно продолжить, т.е. построить свободный модуль F_2 и отображение $d_2 : F_2 \to F_1$ так, чтобы была точна последовательность

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{d_0} F_0 \xleftarrow{d_1} F_1 \xleftarrow{d_2} F_2 \leftarrow \ldots$$

Таким образом, шаг за шагом мы строим резольвенту M.
Смысл этой резольвенты: F_0 отвечает системе образующих в M, F_1-соотношениям между образующими, F_2-соотношениям между соотношениями, и т.д.

Определение. Резольвента ($*$), в которой все модули $R_0, R_1, \ldots$ свободны называется свободной резольвентой.
Резольвента ($*$), в которой все модули $R_0, R_1, \ldots$ проективны, называется проективной резольвентой.

Определение. Конечной резольвентой длины n называется следующая резольвента:

$$0 \leftarrow M \leftarrow R_0 \leftarrow R_1 \leftarrow \ldots \leftarrow R_n \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \ldots$$

Пример. Пусть $B = k[X]$ и 1_B -тривиальный модуль, т.е. 1_B -одномерное пространство над k, на котором умножение на x тривиально. Тогда свободная резольвента 1_B выглядит следующим образом:

$$0 \leftarrow 1_B \xleftarrow{d_0} k[x]\varepsilon_0 \xleftarrow{d_1} k[x]\varepsilon_1 \leftarrow 0$$

Здесь $k[x]\varepsilon_0$ и $k[x]\varepsilon_1$ -свободные модули с образующими ε_0 и ε_1, $d_1\varepsilon_1 = x\varepsilon_0$ и $d_0(x\varepsilon_0)=0$

$d_0(\varepsilon_0)$ -образующая модуля 1_B

Пример. Пусть $B = k[x]/(x^n)$ и 1_B-тривиальный B-модуль. Свободная резольвента модуля 1_B:

$$1_B \xleftarrow{d_0} B\varepsilon_0 \xleftarrow{d_1} B\varepsilon_1 \xleftarrow{d_2} B\varepsilon_2 \xleftarrow{d_3} B\varepsilon_3 \xleftarrow{d_4} \ldots\ldots$$

$d_0\varepsilon_0$ -образующая 1_B, $d_0(x\varepsilon_0)=0$,

$d_{2i+1}\varepsilon_{2i+1} = x\varepsilon_{2i}$, $i=0,1,2,\ldots$

$d_{2i}\varepsilon_{2i} = x^{n-1}\varepsilon_{2i-1}$, $i=1,2,3,\ldots$

Проверку точности этой последовательности мы оставляем читателю.

Напомним важное для нас понятие комплекса. Комплексом модулей называется последовательность модулей и гомоморфизмов

$$M_0 \xleftarrow{d_1} M_1 \xleftarrow{d_2} M_2 \xleftarrow{d_3} \ldots\ldots \leftarrow M_n$$

такая,что при любом i композиция $d_i\, d_{i+1} = 0$.

Число n -длина комплекса, n может быть равно ∞.

Определение. Модуль $H_i = \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i+1}$ называется модулем i-мерных гомологий комплекса; $H_0 = M_0/\operatorname{Im} d_1$, $H_n = \operatorname{Ker} d_n$.

Определение. Комплекс называется ацикличным,если все модули $H_i = 0$.

Резольвента-ацикличный комплекс.

Теорема Гильберта о сизигиях.

Пусть $A = k[x_1,\ldots\ldots x_n]$.

1.У любого A-модуля существует проективная резольвента длины n

2.Пусть

$$0 \leftarrow M \leftarrow R_0 \leftarrow R_1 \leftarrow R_2 \leftarrow \ldots \leftarrow R_n \leftarrow R_{n+1} \leftarrow \ldots$$

-проективная резольвента модуля M. Тогда образ гомоморфизма $R_n \to R_{n-1}$ -проективным модуль. Иначе говоря, проективной резольвентой является следующая последовательность:

$$0 \leftarrow M \leftarrow R_0 \leftarrow R_1 \leftarrow \ldots \leftarrow R_{n-1} \leftarrow \operatorname{Im}(R_n \to R_{n-1}) \leftarrow 0$$

Подготовка к доказательству.

Тензорное произведение($\otimes$) модулей.

Модуль над алгеброй $k[x]$ -линейное пространство V над полем k и оператор умножения на $x: V \to V$. Аналогично, модуль над алгеброй $k[x_1, \dots, x_n]$ -линейное пространство V над k и n линейных преобразований $x_i : V \to V$ коммутируют друг с другом. $x_i x_j = x_j x_i$.

Предложение.

1. Пусть M -модуль над алгеброй $k[x_1, \dots, x_n]$, а N -модуль над алгеброй $k[y_1, \dots, y_m]$. Тогда на линейном пространстве $M \otimes N$ есть естественная структура $k[x_1, \dots, x_{n+m}]^k$ -модуля. А именно

$$x_i(m \otimes f) = (x_i m) \otimes f \quad \text{,если} \quad 1 \le i \le n$$
$$x_i(m \otimes f) = m \otimes (y_{i-n} f) \text{,если} \quad n < i \le n+m.$$

здесь $m \in M$, $f \in N$. Эту операцию над модулями мы будем называть внешним тензорным произведением и обозначать символом $\boxtimes$

2. Пусть $u: M_1 \to M_2$ -гомоморфизм $k[x_1, \dots x_n]$ -модулей и $v: N_1 \to N_2$ -гомоморфизм $k[y_1, \dots, y_m]$ -модулей. Тогда отображение $u \boxtimes v$: $M_1 \boxtimes N_1 \to M_2 \boxtimes N_2$ определяемое формулой: $u \boxtimes v\ (m \otimes n) = u(m) \otimes v(n)$ $(m \in M_1,\ n \in N_1)$, есть гомоморфизм $k[x_1, \dots, x_{n+m}]$ -модулей.

<u>Доказательство.</u> Для доказательства утверждения пункта I достаточно проверить, что отображения $x_i : M \boxtimes N \to M \boxtimes N$ коммутируют. Это очевидно. Отображение $u \boxtimes v$ -гомоморфизм. Действительно,

$$u \boxtimes v\ (x_i\ (m \otimes n)) = u \boxtimes v\ (x_i m \otimes n) =$$
$$= u(x_i(m)) \otimes v(n) = x_i\ (um \otimes vn) =$$
$$= x_i (u \boxtimes v)(m \otimes n). \quad (i \le n).$$ При $i > n$ проверка аналогична.

Замечание. это Предложение означает, что мы построили функтор, ставящий в соответствие двум модулям над алгебрами $k[x_1, \dots, x_n]$ и $k[y_1, \dots, y_m]$ модуль над алгеброй $k[x_1, \dots, x_{n+m}]$.

Лемма. Внешнее тензорное произведение двух свободных модулей - свободный модуль.

Проверку этого простого факта мы оставляем читателю.

<u>Тензорное произведение комплексов.</u>

Пусть

$$V_0 \xleftarrow{d_1} V_1 \xleftarrow{d_2} V_2 \longleftarrow \quad \dots\dots (V)$$
$$W_0 \xleftarrow{d_1} W_1 \xleftarrow{d_2} W_2 \longleftarrow \quad \dots\dots (W)$$

~~Это значит, что композиция~~ $\cancel{d_{i+1} d_i = \bar{d}_{i+1} \bar{d}_i = 0}$

два комплекса векторных пространств.

Построим теперь следующую систему линейных пространств и гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
W_2\otimes V_0 \arrow[d] & W_2\otimes V_1 \arrow[l] \arrow[d] & W_2\otimes V_2 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
W_1\otimes V_0 \arrow[d, "A_{1,0}"'] & W_1\otimes V_1 \arrow[l, "B_{11}"'] \arrow[d, "A_{11}"'] & W_1\otimes V_2 \arrow[l] \arrow[d, "A_{12}"'] & \dots \arrow[l] \\
W_0\otimes V_0 & W_0\otimes V_1 \arrow[l, "B_{0,1}"'] & W_0\otimes V_2 \arrow[l] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Здесь $W_i \otimes V_j$ -тензорное произведение линейных пространств. Гомоморфизмы $A_{ij} : W_i\otimes V_j \to W_{i-1}\otimes V_j$ есть тензорное произведение гомоморфизма $W_i \xrightarrow{d_i} W_{i-1}$ и тождественного гомоморфизма $V_j \to V_j$, аналогично гомоморфизм $B_{ij} : W_i\otimes V_j \to W_i\otimes V_{j-1}$ есть тензорное произведение тождественного гомоморфизма $W_i \to W_i$ и гомоморфизма $V_j \to V_{j-1}$.

Положим $W\otimes V = \oplus_{i,j} W_i\otimes V_j$. На линейном пространстве $W\otimes V$ действуют два оператора A и B. А именно, $A\varphi = A_{ij}\varphi$, и $B\varphi = B_{ij}\varphi$, если $\varphi\in W_i\otimes V_j \subset W\otimes V$; Нетрудно видеть, что $A^2 = B^2=0$ и $AB=BA$.

Построим теперь на $W\otimes V$ оператор $\bar B$. Этот оператор действует на вектор $\varphi\in W_j\otimes V_i$ следующим образом

$$\bar B\varphi = (-1)^i B_{ji}\varphi$$

Нетрудно показать, что $\bar B^2=0$ и $A\bar B + \bar B A = 0$. Заметим, что $(A+\bar B)^2 = A^2 + A\bar B + \bar B A + B^2 = 0$.

Положим $(W\otimes V)_j = \oplus_{r+s=j} W_r\otimes V_s$. Оператор $A\oplus\bar B\,((W\otimes V)_j) \subset (W\otimes V)_{j-1}$.

Определение. Тензорным произведением двух комплексов (V) и (W) называется комплекс $(W\otimes V)_0 \xleftarrow{D_1} (W\otimes V)_1 \leftarrow \dots$ где $D_i(\varphi) = (A+\bar B)\varphi$.

Предложение. Предположим, что комплекс W ацикличный. Тогда комплекс $W\otimes V$ ацикличный.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A$. Действительно, пусть $A\varphi = 0$. Запишем φ в виде $\varphi = \sum w_\alpha\otimes v_\alpha$, где $w_\alpha \in \oplus_i W_i$, $v_\alpha \in \oplus_j V_j$ и вектора v_α линейно независимы. (Докажите, что такое представление возможно).

Тогда $A\varphi = \sum A(w_\alpha) \otimes v_\alpha = 0$, т.е. $A(w_\alpha)=0$ при каждом α. Комплекс (W) ацикличен, т.е. существуют элементы $\bar{w}_\alpha$, что $d\bar{w}_\alpha = w_\alpha$. Это значит, $A(\sum \bar{w}_\alpha \otimes v_\alpha) = \sum w_\alpha \otimes v_\alpha$. Теперь приступим непосредственно к доказательству предложения. Пусть $\theta \in (W \otimes V)_j$ и $D_j\theta = 0$;
$\theta = \theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_j$, где $\theta_\alpha \in W_\alpha \otimes V_{j-\alpha}$.
Из равенства $D_j\theta = 0$ следует, что $A(\theta_0)=0$. Существует элемент $\bar{\theta}_1 \in W_1 \otimes V_j$, что $A\theta_1 = \theta_0$. Тогда
$\theta - D_{j+1}\bar{\theta}_1 = \theta_1' + \theta_2' + \ldots$, где $\theta_\beta' \in W_\beta \otimes V_{j-\beta}$.
Аналогично $A\theta_1' = 0$ и существует $\bar{\theta}_2 \in W_2 \otimes V_{j-1}$, что $\theta_1' = A\bar{\theta}_2$. Тогда $\theta - D_{j+1}(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) = \theta_2'' + \theta_3'' + \ldots$, где $\theta_\gamma'' \in W_\gamma \otimes V_{j-\gamma}$. и.т.д.
В результате получим, что
$\theta = D_{j+1}(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \ldots + \quad)$.
Предложение доказано.

Предложение. Пусть (W) -комплекс $k[x_1,\ldots,x_n]$ -модулей, а (V) -комплекс $k[y_1,\ldots,y_m]$ -модулей. Отождествим каждое пространство $W_i \otimes_k V_j$ с $k[x_1,\ldots,x_{n+m}]$ -модулем $W_i \boxtimes V_j$, а все $(W \otimes V)$ с прямой суммой таких модулей. Тогда $(W\otimes V)_0 \leftarrow (W \otimes V)_1 \ldots$ - комплекс $k[x_1,\ldots,x_{n+m}]$ -модулей. Мы этот комплекс будем обозначать символом $(W \boxtimes V)$.
Доказательство этого предложения получается прямой проверкой. (Нужно проверить, что D_j -гомоморфизмы $k[x_1,\ldots,x_{n+m}]$ -модулей.) Мы оставляем это читателю.

Основной пример.
Пусть A_i -кольцо многочленов $k[x_i]$ от одной переменной x_i и W_i -следующий ациклический комплекс -модулей.

$$1_{A_i} \xleftarrow{\varepsilon} M_0 \xleftarrow{\ell_i} M_1 \leftarrow 0$$

Здесь 1_{A_i} -тривиальный одномерный A_i -модуль, M_0, M_1 - свободные A_i -модули ранга I с образующими f_0, f_1 $M_0 = A_i f_0$, $M_1 = A_i f_1$; $\varepsilon(f_0)$ есть образующая в 1_{A_i} и $\ell_i(f_1) = x_i f_0$. Ацикличность этого комплекса очевидна.

Предложение. Комплекс $k[x_1,\ldots,x_n]$ -модулей $\mathcal{K} = W_1 \boxtimes W_2 \boxtimes W_3 \boxtimes \ldots \boxtimes W_n$ ацикличен, состоит из свободных модулей и имеет вид:

$$1 \leftarrow \mathcal{K}_0 \leftarrow \mathcal{K}_1 \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{K}_n \leftarrow 0$$

Все утверждения этого предложения уже доказаны.
Этот комплекс называется комплексом Кошуля.

Доказательство пункта I теоремы Гильберта о сизигиях.

Пусть M – A –модуль, $A = k[x_1,\dots,x_n]$

$\tilde{M}$ –комплекс A –модулей длины 0. (см. определение комплекса)

$\mathcal{K}$ –комплекс Кошуля $k[y_1,\dots,y_n]$ –модулей и $M\otimes\mathcal{K}$ – –ациклический комплекс $k[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{2n}]$ –модулей.

Комплекс $\widetilde{M\otimes\mathcal{K}}$ выглядит следующим образом:

$$0 \leftarrow \tilde{M} \leftarrow \mathcal{K}_0(M) \leftarrow \mathcal{K}_1(M) \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{K}_n(M) \leftarrow 0 \quad (*)$$

$\tilde{M}$, $\mathcal{K}_i(M)$ суть – $k[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{2n}]$ – модули

Пусть φ –гомоморфизм $A \to k[\bar{x}_1,\dots\bar{x}_{2n}]$ такой, что $\varphi(x_i) = \bar{x}_i + \bar{x}_{i+n}$. Гомоморфизм φ определяет на каждом $k[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{2n}]$ – модуле структуру A –модуля. Таким образом, последовательность $(*)$ можно рассматривать как точную последовательность A –модулей. По другому это можно сказать так: A –модуль–это линейное пространство и n коммутирующих линейных преобразований. Эти преобразования на $k[\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{2n}]$ – модуле суть $\bar{x}_1+\bar{x}_{n+1}$, $\bar{x}_2+\bar{x}_{n+2}$, ...

Нам осталось сказать, что A –модули $\mathcal{K}_i(M)$ свободны.

Вообще, справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть M ~~–модуль~~ A –модуль. Определим на $M\otimes_k A$ структуру A модуля следующей формулой

$$x_i(m\otimes p) = (x_i m)\otimes p + m\otimes(x_i p), \quad m\in M,\ p\in A$$

A –модуль $M\otimes_k A$ свободен.

Доказательство. Выберем в модуле M базис (над k) $m_1, m_2, m_3, \dots$. Элементы $m_i\otimes 1$ свободно порождают $M\otimes_k A$. Для того, чтобы это показать введем на $M\otimes_k A$ следующую фильтрацию. Положим $N_i = M\otimes_k A_i$, где A_i –пространство многочленов степени $\le i$.

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$$

N_0 –пространство, натянутое на образующие (т.е. с базисом $m_i\otimes 1$). Множество $\{m_i\otimes 1\}$ есть система образующих.

Действителньо, пусть $v\in M\otimes_k A$ и $v = \sum m_j\otimes p_j$, $p_j\in A$ и $v\in N_r$, $v\notin N_{r-1}$. Нетрудно проверить, что $v-\sum p_j(m_j\otimes 1)\in N_{r-1}$. К вектору $v-\sum p_j(m_j\otimes 1)$ применим ту же процедуру, в конце концов получим $v = \sum Q_j(m_j\otimes 1)$. Между образующими $\{m_i\otimes 1\}$ нет соотношений. Пусть $\sum Q_i(m_i\otimes 1)=0$. Выберем в множестве многочленов $Q_1,\dots,$ многочлены максимальной степени, пусть это $Q_{r_1}, Q_{r_2},\dots$ Тогда $\sum m_{r_i}\otimes Q_{r_i}=0$, а это невозможно.

Первая часть теоремы Гильберта о сизигиях доказана.