ПРОГРАММА ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
/I семестр/

1. Векторные пространства, подпространства, линейные отображения.
2. Линейные комбинации, линейная зависимость, размерность.
3. Базис векторного пространства, связь с размерностью.
4. Классификация конечномерных векторных пространств с точностью до изоморфизма.
5. Системы линейных уравнений в векторной записи. Простейшие критерии определенности и совместности.
6. Переход к новому базису, изменение координат вектора.
7. Запись линейных отображений матрицами.
8. Умножение матриц, его связь с композицией линейных отображений.
9. Обратная матрица, условие ее существования.
10. Сложение матриц и линейных отображений, умножение их на скаляр.
11. Двойственное векторное пространство, двойственный базис.
12. Ранг системы векторов, ранг матрицы.
13. Теорема Кронекера – Капелли.
14. Ядро, образ, ранг и дефект линейного отображения.
15. Связь между рангом и дефектом. Приведение матрицы линейного отображения к каноническому виду.
16. Задание подпространств системами однородных линейных уравнений.
17. Факторпространство, его размерность. Теорема о гомоморфизмах.
18. Суммы и прямые суммы подпространств и векторных пространств.
19. Полилинейные формы на векторном пространстве. Симметрические, кососимметрические и знакопеременные формы. Запись форм в координатах.
20. Оператор альтернирования и его свойства.
21. n-линейные знакопеременные формы на n-мерном пространстве. Определитель матрицы.
22. Основные свойства определителя.
23. Определитель линейного преобразования. Определитель произведения преобразований и матриц.
24. Условие обратимости матрицы в терминах определителя.
25. Правило Крамера.
26. Разложение определителя по столбцу.
27. Вычисление обратной матрицы.
28. Тензорная алгебра полилинейных форм.
29. Внешняя алгебра знакопеременных форм.

30. Инвариантные подпространства, их применение к упрощению матрицы линейного преобразования.
31. Собственные векторы, собственные значения, характеристический многочлен.
32. Теорема Гамильтона – Кэли.
33. Нильпотентные линейные преобразования.
34. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
35. Комплексификация вещественного векторного пространства.
36. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного преобразования конечномерного вещественного пространства.

§ I. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Пусть K - некоторое поле. Векторным пространством над K называется множество V, снабженное операцией сложения $(x,y)\mapsto x+y$ $(x,y,x+y\in V)$ и операцией умножения на элементы поля $(c,x)\mapsto cx$ $(c\in K;\ x,cx\in V)$, так что выполнены следующие условия:

I/ $x+y=y+x$;
2/ $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3/ существует такой элемент $0\in V$, что $x+0=x$;
4/ для любого $x\in V$ существует такой $-x\in V$, что $x+(-x)=0$;
5/ $c(x+y)=cx+cy$;
6/ $(c+d)x=cx+dx$;
7/ $(cd)x=c(dx)$;
8/ $1x=x$.

/Здесь всюду $x,y,z\in V;\ c,d\in K$/.

Элементы пространства V называются векторами, а элементы поля K - скалярами. Условия I/ - 4/ означают, что V является абелевой группой относительно сложения. Элемент $0\in V$ называется нулевым вектором, а элемент $-x$ - противоположным к вектору x. Как известно из теории групп, эти элементы определены однозначно.

Примеры. I. Множество E^3 всех свободных векторов в геометрическом евклидовом пространстве есть векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ относительно хорошо известных из элементарной геометрии операций над векторами. Аналогично определяются пространства E^1 и E^2 векторов на евклидовой прямой и плоскости.

2. Множество K^n всех упорядоченных наборов $(x_1,\dots,x_n)$ элементов поля K есть векторное пространство над K относительно следующих операций:

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n);$$

$$c(x_1,\dots,x_n)=(cx_1,\dots,cx_n).$$

Это пространство называется n-мерным координатным /или арифметическим/ векторным пространством над K. Его нулевым вектором является $0=(0,\dots,0)$, а $-(x_1,\dots,x_n)=(-x_1,\dots,-x_n)$.

3. Множество $C(a,b)$ всех непрерывных функций на интервале $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$ относитель-

но обычных операций над функциями.

Непосредственно из определения выводится

Лемма I. Имеют место следующие свойства:

I/ $0x = c0 = 0$;

2/ если $cx = 0$, то либо $c = 0$, либо $x = 0$;

3/ $(-c)x = c(-x) = -(cx)$;

4/ если определить разность векторов x и y формулой

$$x - y = x + (-y),$$

то $c(x-y) = cx - cy$; $(c-d)x = cx - dx$.

/Здесь всюду $x, y \in V$; $c, d \in K$./

Пусть V и W – векторные пространства над одним и тем же полем K. Линейным отображением /или гомоморфизмом/ пространства V в W называется отображение $f: V \to W$, обладающее следующими свойствами:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(cx) = cf(x) \qquad (x, y \in V, \ c \in K).$$

Если $V = W$, то говорят о линейном преобразовании /или эндоморфизме/ пространства V.

Пример 4. Поворот на некоторый угол вокруг точки является линейным преобразованием пространства E^2.

5. Для произвольного пространства V любой скаляр $c \in K$ определяет линейное преобразование $\lambda_c : x \mapsto cx$ пространства V, называемое гомотетией с коэффициентом c.

6. Оператор дифференцирования $\varphi \mapsto \varphi'$ есть линейное отображение пространства $C^1(a, b)$ всех функций на интервале (a, b), имеющих непрерывную первую производную, в пространство $C(a, b)$.

Лемма 2. Для любого линейного отображения $f: V \to W$ имеем:

$$f(0) = 0 \ ; \quad f(-x) = -f(x) \qquad (x \in V).$$

/В курсе алгебры это доказывается для любых гомоморфизмов групп./

Лемма 3. Если $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ – линейные отображения, то и $f \circ g : U \to W$ – линейное отображение.

Если $f: V \to W$ – обратимое /т.е. биективное/ линейное отображение, то обратное отображение $f^{-1}: W \to V$ также линейно.

Обратимое линейное отображение $f: V \to W$ называют также изоморфизмом пространства V на W. Если такой изоморфизм существует, то пространства V и W называются изоморфными /пишут $V \cong W$ /.

Из леммы 3 легко следует, что произведение двух изоморфизмов есть изоморфизм и что отображение, обратное к изоморфизму, также есть изоморфизм. Отсюда вытекает, что отношение изоморфности $\cong$ является отношением эквивалентности, т.е рефлексивно, симметрично и транзитивно. Значит, векторные пространства разбиваются на классы изоморфных между собой пространств. С точки зрения линейной алгебры два изоморфных пространства существенно не отличаются друг от друга. Поэтому естественно поставить задачу об описании классов изоморфных векторных пространств /или о классификации векторных пространств с точностью до изоморфизмов/. По поводу решения этой задачи см. § 2.

Пример 7. $E^k \cong \mathbb{R}$ / $k = 1,2,3$/. Поясним, как устанавливаются эти изоморфизмы, на примере $k = 2$. Выберем на плоскости декартову систему координат и обозначим через e_1, e_2 определяющие эту систему единичные векторы на осях координат. Координатами вектора $x \in E^2$ называются координаты конца этого вектора, если отложить x от начала координат. Если x_1, x_2 - координаты вектора x, то $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Отсюда легко выводится, что отображение $(x_1, x_2) \mapsto x_1 e_1 + x_2 e_2$ есть изоморфизм пространства $\mathbb{R}^2$ на E^2.

Пусть V - векторное пространство над K. Подмножество $W \subseteq V$ называется <u>подпространством</u> пространства V, если W является векторным пространством, относительно операций, заданных в V.

<u>Лемма 4</u>. Подмножество $W \subseteq V$ является подпространством тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1/ $W \neq \varnothing$;

2/ $x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$;

3/ $x \in W$, $c \in K \Rightarrow cx \in W$.

Пример 8. Множество всех векторов, лежащих на данной плоскости /прямой/ есть подпространство в E^3 /соответственно в E^2 /.

9. В любом векторном пространстве V подмножества $\{0\}$ и V являются подпространствами.

§ 2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ, РАЗМЕРНОСТЬ, БАЗИС

Под системой векторов пространства V понимается любой конечный упорядоченный набор векторов из V. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ – система векторов. Вектор вида $y = c_1x_1 + \ldots + c_sx_s$, где $c_i \in K$, называется линейной комбинацией системы $x_1, \ldots, x_s$. Говорят также, что y линейно выражается через систему $x_1, \ldots, x_s$. Совокупность $[x_1, \ldots, x_s]$ всех линейных комбинаций данной системы называется линейной оболочкой системы $x_1, \ldots, x_s$. Если, в частности, $[x_1, \ldots, x_s] = V$, то говорят, что $x_1, \ldots, x_s$ порождают V или что $x_1, \ldots, x_s$ – система образующих пространства V.

Лемма I. Линейная оболочка $[x_1, \ldots, x_s]$ есть подпространство в V, содержащее $x_1, \ldots, x_s$.

Система векторов $x_1, \ldots, x_s$ называется линейно зависимой, если существует линейная комбинация $c_1x_1 + \ldots + c_sx_s = 0$, в которой хотя бы один $c_i \neq 0$. В противном случае система называется линейно независимой.

Лемма 2. Система $\{x\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда $x = 0$. При $s > 1$ система $x_1, \ldots, x_s$ линейно зависима тогда и только тогда, когда для некоторого i имеем $x_i \in [x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_s]$.

Лемма 3. Система, содержащая линейно зависимую подсистему, сама линейно зависима.

Лемма 4. Если система $x_1, \ldots, x_s$ линейно независима, а $x_1, \ldots, x_s, y$ линейно зависима, то $y \in [x_1, \ldots, x_s]$.

Лемма 5. Пусть $y \in [x_1, \ldots, x_s]$. Система $x_1, \ldots, x_s$ линейно независима тогда и только тогда, когда y выражается через $x_1, \ldots, x_s$ единственным образом.

Пример I. Пусть $V = E^3$. Линейная зависимость системы x, y равносильна коллинеарности векторов x, y /т.е. их принадлежности одной прямой/. Линейная зависимость системы x, y, z равносильна компланарности векторов x, y, z /т.е. их принадлежности одной плоскости/. Нетрудно доказать, что любая система из $s > 3$ векторов в E^3 линейно зависима.

Говорят, что векторное пространство V имеет размерность n, если в V существует линейно независимая система из n векторов, но всякая система из большего числа векторов линейно зависима. Размерность обозначается $\dim V$. Если $V = \{0\}$, то размерность $\dim V$ считается равной 0. Говорят, что V бесконечномерно $/\dim V = \infty/$, если в V существуют линейно независимые системы из сколь угодно большого числа векторов.

Примеры. 2. Имеем $\dim E^k = k$ для $k = 1,2,3$.

3. Пространство $C(-\infty,\infty)$ непрерывных функций на прямой бесконечномерно. Действительно, для любого n система функций $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независима: если $\varphi(t) = c_0 \cdot 1 + c_1 t + \ldots + c_n t^n = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то $c_k = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) = 0$.

4. Рассмотрим в пространстве K^n векторы $e_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$ $/ i = 1, \ldots, n /$. Легко видеть, что $c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n = (c_1, \ldots, c_n)$. Отсюда следует, что система $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима, так что $\dim K^n \geqslant n$. Мы увидим вскоре, что на самом деле $\dim K^n = n$.

Для вычисления размерности полезно следующее понятие. Система векторов $v_1, \ldots, v_n$ пространства V называется базисом, если она линейно независима и если система $v_1, \ldots, v_n, x$ линейно зависима для любого вектора $x \in V$. Из лемм 4 и 5 следует, что любой вектор $x \in V$ единственным образом линейно выражается через базис: $x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$, где $x_i \in K$. Скаляры $x_1, \ldots, x_n$ называются координатами вектора x в базисе $v_1, \ldots, v_n$.

Примеры. 5. Любая линейно независимая система из k векторов в E^k $/ k = 1,2,3/$ составляет базис. Полученные таким образом системы координат в E^k называются аффинными. Частным случаем являются декартовы системы координат. Вообще, в пространстве размерности $n > 0$ любая линейно независимая система из n векторов является базисом.

6. Как видно из примера 4, векторы $e_1, \ldots, e_n$ составляют базис в K^n, называемый стандартным. Координаты вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в стандартном базисе – это его компоненты $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 1 /о замене/. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – базис и $w_1, \ldots, w_m$ – линейно независимая система векторов пространства V. Векторы $v_1, \ldots, v_n$ можно перенумеровать так, чтобы $w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ также составляли базис в V. В частности, $m \leq n$.

Доказательство. Проведем индукцию по m. При $m = 0$ теорема верна. Пусть она верна для линейно независимых систем из $m-1$ векторов. Тогда мы можем считать, что $w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n$ – базис пространства V. Значит, существуют такие $c_1, \ldots, c_n$, что

$$w_m = c_1 w_1 + \ldots + c_{m-1} w_{m-1} + c_m v_m + \ldots + c_n v_n. \qquad /1/$$

Поскольку система $w_1, \dots, w_m$ линейно независима, имеем $n \geq m$, причем не все $c_m, \dots, c_n$ равны 0. Можно считать, что $c_m \neq 0$. Докажем, что тогда $w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ составляют базис. Из /I/ следует, что $v_m \in [w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n]$, откуда без труда выводится, что $V = [w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n]$. Остается доказать линейную независимость системы $w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n$. Пусть $a_1 w_1 + \dots + a_m w_m + a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n = 0$, где $a_i \in K$. Подставляя /I/, получим:

$$(a_1 + a_m c_1) w_1 + \dots + (a_{m-1} + a_m c_{m-1}) w_{m-1} + a_m c_m v_m + \\ + (a_{m+1} + a_m c_{m+1}) v_{m+1} + \dots + (a_n + a_m c_n) v_n = 0.$$

Согласно предположению индукции, все коэффициенты в этой линейной комбинации равны 0. В частности, $a_m c_m = 0$, откуда $a_m = 0$. Но тогда и все $a_i = 0$.

Следствие I. Если V содержит базис из n элементов, то $n = \dim V$.

Следствие 2. $\dim K^n = n$.

Следствие 3. В конечномерном векторном пространстве всякую линейно независимую систему можно дополнить до базиса.

Дадим теперь классификацию конечномерных векторных пространств с точностью до изоморфизма.

Лемма 6. Любое линейное отображение $f: V \to W$ переводит линейно зависимые системы векторов пространства V в линейно зависимые системы векторов пространства W. Если f - изоморфизм, то f переводит линейно независимые системы в линейно независимые и базис - в базис.

Теорема 2. Пусть V и W - векторные пространства над K. Если $V \cong W$ и $\dim V = n < \infty$, то и $\dim W = n$. Обратно, если $\dim V = \dim W < \infty$, то $V \cong W$.

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 6. Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, что $V \cong K^n$, если $\dim V = n$. Выберем в V базис $v_1, \dots, v_n$ и определим отображение $K^n \to V$ формулой

$$f((x_1, \dots, x_n)) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n. \qquad /2/$$

Проверяется, что f - изоморфизм.

Теперь мы остановимся на связи развитой выше теории с системами линейных уравнений. Пусть в пространстве K^n задана система векторов $a_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$ / $i = 1, \dots, s$ / и задан вектор $b = (b_1, \dots, b_n)$. Рассмотрим задачу о представлении вектора b

в виде линейной комбинации векторов $a_1, \ldots, a_s$:

$$x_1 a_1 + \ldots + x_s a_s = b. \qquad /3/$$

Уравнение /3/ равносильно следующей системе линейных уравнений с неизвестными $x_1, \ldots, x_s$:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1s} x_s &= b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{ns} x_s &= b_n . \end{aligned} \qquad /4/$$

Очевидно, что любая система линейных уравнений может быть получена таким способом. Система /4/ совместна, т.е. имеет решение, тогда и только тогда, когда $b \in [a_1, \ldots, a_s]$; эта система определенна, т.е. ее решение единственно, тогда и только тогда, когда вектор b единственным образом выражается через $a_1, \ldots, a_s$. Если $b = 0$, то мы получаем так называемую <u>систему однородных уравнений</u>, которая всегда совместна, так как имеет нулевое решение $(0, \ldots, 0)$.

<u>Теорема 3</u>. При $s = n$ система уравнений /4/ является определенной тогда и только тогда, когда столбцы коэффициентов при ее неизвестных образуют линейно независимую систему векторов в K^n . Если $s > n$, то система /4/ либо несовместна, либо неопределенна /всегда неопределенна, если $b_1 = \ldots = b_n = 0$/.

Доказательство. Заметим, что столбцы из коэффициентов при неизвестных - это векторы $a_1, \ldots, a_n$ из уравнения /3/. Если $s = n$ и столбцы линейно независимы, то в силу следствия 2 $a_1, \ldots, a_n$ составляют базис в K^n . Значит, любой $b \in K^n$ единственным образом выражается через $a_1, \ldots, a_n$, т. е. система уравнений определенна. Обратное утверждение следует из леммы 5.

Если $s > n$, то $a_1, \ldots, a_s$ линейно зависимы в силу следствия 2, и наше утверждение снова следует из леммы 5.

Назовем <u>матрицей</u> над полем K произвольную прямоугольную таблицу элементов поля K :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Коротко такую матрицу обозначают через (c_{ij}) . Например, с системой линейных уравнений /4/ обычно связывают <u>матрицу системы</u> (a_{ij}) , состоящую из коэффициентов при неизвестных, и <u>расширенную матрицу системы</u>, полученную из матрицы системы путем приписывания справа столбца свободных членов. Столбцы матрицы /5/ можно рассматривать как векторы пространства K^m, а строки - как векторы пространства K^n. Элементы $c_{11}, c_{22}, \ldots$ образуют так называемую <u>главную диагональ</u> матрицы.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ - базис пространства V и пусть $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ - некоторая система n векторов из V. Тогда

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad /6/$$

где $c_{ij} \in K$. Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

называется <u>матрицей перехода</u> от базиса $v_1, \ldots, v_n$ к системе $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$.

<u>Лемма 7</u>. Векторы $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ составляют базис пространства V тогда и только тогда, когда столбцы матрицы перехода линейно независимы.

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм $\varphi : K^n \to V$, определенный формулой /2/. Очевидно, $\varphi(v_j)$ - это j-й столбец матрицы C. Поэтому наше утверждение следует из леммы 6.

Предположим теперь, что $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ - также базис в V. Тогда произвольный $x \in V$ можно записать в виде $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ и в виде $x = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \tilde{v}_j$. Связь между координатами x_i и $\tilde{x}_j$ дается следующей теоремой.

<u>Теорема 4</u>. Имеем

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tilde{x}_j \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad /7/$$

где (c_{ij}) - матрица перехода от базиса $v_1, \ldots, v_n$ к базису $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$.

Доказательство. Подставляя /6/ в выражение вектора x через $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$, получаем

$$x = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tilde{x}_j \right) v_i .$$

Очевидно, отсюда следует /7/.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И МАТРИЦЫ

Пусть V и W - конечномерные векторные пространства над K. Мы покажем сейчас, что линейные отображения $V \to W$ можно задавать при помощи некоторых матриц. Для этого фиксируем некоторый базис $v_1, \dots, v_n$ в V и базис $w_1, \dots, w_s$ в W. Если $f: V \to W$ - линейное отображение, то имеем

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} w_i \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

называется <u>матрицей линейного отображения</u> f в базисах $v_1, \dots, v_n$ и $w_1, \dots, w_s$. Если $V = W$, то второй базис $w_1, \dots, w_s$ обычно берут совпадающим с первым. Матрица A_f называется тогда <u>матрицей линейного преобразования</u> f в базисе $v_1, \dots, v_n$. В этом случае число строк матрицы A_f равно числу столбцов /такая матрица называется <u>квадратной</u>/.

Покажем, что матрица A_f полностью определяет отображение f. Для этого вычислим координаты y_i образа $f(x)$ произвольного вектора $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in V$ через координаты x_j вектора x. Используя линейность f, получаем

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{s} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{s} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) w_i .$$

Отсюда ясно, что

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \dots, s) \qquad /\mathrm{I}/$$

Эти формулы однозначно определяют $f(x)$, если известны x и матрица A_f. Без труда проверяется также, что для любой матрицы A над K с s строками и n столбцами существует такое линейное отображение $f: V \to W$, что $A_f = A$, - достаточно задать f формулами /I/.

В частности, любое линейное отображение $f: K^n \to K^s$ определяется формулами /I/, где $(y_1, \dots, y_s) = f((x_1, \dots, x_n))$ и (a_{ij}) - матрица отображения f в стандартных базисах.

Пусть $\mathrm{Hom}(V, W)$ - множество всех линейных отображений $V \to W$ и $M_{sn}(K)$ - множество всех матриц над K с s строками и n столбцами. Мы показали, что соответствие $f \mapsto A_f$ /при фиксированных базисах в V и W / есть биективное отображение множества $Hom(V,W)$ на $M_{sn}(K)$. В частности, получаем биективное отображение множества $End\,V$ всех линейных преобразований пространства V на множество $M_n(K)=M_{nn}(K)$ всех квадратных матриц порядка n.

Выясним теперь, как найти матрицу произведения двух линейных отображений, если известны матрицы сомножителей. Пусть заданы линейные отображения

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

и пусть в U, V, W выбраны базисы $u_1,\ldots,u_m$, $v_1,\ldots,v_n$, $w_1,\ldots,w_s$ соответственно. Рассмотрим матрицы $A_f=(a_{ij})$, $A_g=(b_{ij})$, $A_{f\circ g}=(c_{ij})$ в соответствующих базисах. Мы докажем ниже, что

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (i=1,\ldots,s;\ j=1,\ldots,m). \qquad /2/$$

Удобно дать следующее определение. Пусть $A=(a_{ij})\in M_{sn}(K)$, $B=(b_{ij})\in M_{nm}(K)$. Произведением матриц A и B называется матрица $C=AB=(c_{ij})\in M_{sm}(K)$, элементы которой вычисляются по формулам /2/. Тогда наше утверждение примет следующий вид.

Теорема I. $A_{f\circ g}=A_f A_g$.

Доказательство. Формулы /2/ вытекают из следующего вычисления:

$$(f\circ g)(u_j)=f\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}v_k\right)=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}f(v_k)=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\sum_{i=1}^{s} a_{ik}w_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)w_i.$$

Теорема I, в частности, применима к линейным преобразованиям, матрицы которых записаны в одном и том же базисе пространства.

Обозначим через e_V /или просто e / тождественное преобразование пространства V. Очевидно, e_V линейно и его матрица в любом базисе совпадает с матрицей

$$E=E_n=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\in M_n(K), \quad n=\dim V.$$

Матрица E_n называется единичной матрицей порядка n.

Лемма I. Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1/ ассоциативность:

2/ некоммутативность: вообще говоря, $AB\neq BA$ даже для квадратных матриц $A,B\in M_n(K)$.

3/ единичные матрицы играют роль единицы: $E_s A=AE_n=A$ для любой $A\in M_{sn}(K)$.

Пусть $A\in M_n(K)$. Матрица $A^{-1}\in M_n(K)$ называется обратной к A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Пусть $f\in End\,V$ – такое линейное преобразоние некоторого n -мерного пространства V , что $A_f = A$. Тогда $A^{-1} = A_g$,где $g \in End\, V$ удовлетворяет условиям $f \circ g = g \circ f = e$. Эти условия означают, что $g = f^{-1}$ - обратное к f преобразование. Матрица A называется обратимой, если для нее существует обратная матрица A^{-1}. Мы видим, что обратимость матрицы $A = A_f$ равносильна тому, что f является автоморфизмом пространства V , т.е. изоморфизмом пространства V на себя. Заметим, что можно было бы поставить вопрос об обратимости и для произвольных прямоугольных матриц, но, как показывает теорема 2.2, обратимая матрица обязана быть квадратной.

Теорема 2. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно независимы.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ и пусть $f \in End(K^n)$ - линейное преобразование, для которого в стандартном базисе $A_f = A$. Тогда f записывается формулами /I/, причем $n = s$. Очевидно, преобразование f обратимо тогда и только тогда, когда система линейных уравнений с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ и свободными членами $y_1, \dots, y_n$, определяемая формулами /I/, имеет единственное решение для любых $y_1, \dots, y_n$. Но по теореме 2.3 последнее имеет место тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно независимы.

Примеры. I. Согласно лемме 2.7, матрица перехода от одного базиса пространства к другому всегда обратима. Очевидно, обратная к ней матрица будет матрицей перехода от нового базиса к старому.

2. Рассмотрим случай $n = 2$. Из теоремы 2 следует, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обратима тогда и только тогда, когда $ad \neq bc$. Решая соответствующую систему уравнений, находим, что в этом случае

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Из леммы I.3 следует, что автоморфизмы произвольного векторного пространства V составляют подгруппу $GL(V) = Aut\, V$ в группе всех обратимых преобразований множества V . Из соответствия между линейными преобразованиями и матрицами вытекает поэтому, что обратимые квадратные матрицы порядка n образуют группу относительно умножения; эта группа обозначается через $GL_n(K)$. Единицей этой группы является $E = E_n$.

Введем теперь еще две операции над линейными отображениями и матрицами. Пусть V и W - векторные пространства над K, f, $g \in Hom(V,W)$, $c \in K$. Положим

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ ;\quad (cf)(x) = c\,f(x) \quad (x \in V).$$

Легко проверяется, что $f+g$ и cf - линейные отображения. Далее, для матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ из $M_{s,n}(K)$ и $c \in K$ положим

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})\ ,\quad cA = (ca_{ij}).$$

Теорема 3. Если фиксировать в V и W некоторые базисы, то $A_{f+g} = A_f + A_g$, $A_{cf} = cA_f$.

Доказательство мы опускаем ввиду его простоты.

Отметим также следующие свойства введенных операций /мы формулируем их в случае матриц/:

I/ $M_{s,n}(K)$ - абелева группа по сложению и векторное пространство относительно сложения и умножения на элементы из K ;

2/ $(A+B)C = AC+BC$;

3/ $D(A+B) = DA+DB$;

4/ $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ $\quad (c \in K)$.

Множество R называется алгеброй над полем K , если R снабжено операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля K , причем

I/ R - кольцо относительно сложения и умножения;

2/ R - векторное пространство относительно сложения и умножения на элементы из K ;

3/ $c(xy) = (cx)y = x(cy)$ для любых $x,y \in R$, $c \in K$.

Из сказанного выше видно, что введенные нами операции превращают $End\,V$ и $M_n(K)$ в ассоциативные /но не коммутативные/ алгебры с единицами над K .

Заметим еще, что нулем векторного пространства $Hom(V,W)$ является нулевое линейное отображение $O(x) = 0$ для всех $x \in V$, а нулем пространства $M_{sn}(K)$ - нулевая матрица O , все элементы которой равны 0.

Теперь мы рассмотрим подробнее векторное пространство $V^* = Hom(V,K)$. Оно называется двойственным к пространству V , а его элементы - линейными формами на V . Пусть $v_1, \ldots, v_n$ - базис в V , а в K в качестве базиса возьмем 1. Тогда любая $f \in V^*$ определяется матрицей $A_f = (a_1\ a_2 \ldots a_n)$,причем если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, то

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (x \in V). \tag{3}$$

Скаляры $a_1, \ldots, a_n$ называются <u>координатами</u> формы f в базисе $v_1, \ldots, v_n$. Определим <u>координатные формы</u> $v^i \in V^*$ формулой

$$v^i(x) = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad x \in V).$$

Из /3/ следует, что $v^1, \ldots, v^n$ – базис пространства V^*; он называется базисом, <u>двойственным к</u> $v_1, \ldots, v_n$.

Таким образом, для конечномерного пространства V имеем $\dim V = \dim V^*$, т. е. $V \cong V^*$. Проведенное рассуждение не дает, однако, возможности построить естественный /т.е. не зависящий от выбора базиса/ изоморфизм между V и V^*.

Мы построим теперь естественное линейное отображение $V \to V^{**}$, являющееся изоморфизмом в конечномерном случае. Каждому $x \in V$ поставим в соответствие элемент $\hat{x} \in V^{**}$, заданный формулой

$$\hat{x}(\alpha) = \alpha(x) \qquad (\alpha \in V^*).$$

Легко видеть, что $x \mapsto \hat{x}$ – линейное отображение. Если $v_1, \ldots, v_n$ – базис в V, то $\hat{v}_i(v^j) = 0$ при $i \neq j$ и 1 при $i = j$. Поэтому $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n$ – базис пространства V^{**}, двойственный к $v^1, \ldots, v^n$. Поскольку отображение $x \mapsto \hat{x}$ переводит базис в базис, оно является изоморфизмом.

В дальнейшем мы иногда будем отождествлять V с V^{**} при помощи отображения $x \mapsto \hat{x}$. Это отождествление дает возможность рассматривать V как двойственное к V^* пространство, а $v_1, \ldots, v_n$ – как двойственный к $v^1, \ldots, v^n$ базис.

Теперь мы сформулируем без доказательства правило, по которому изменяется матрица линейного отображения при переходе к новым базисам.

<u>Теорема 4.</u> Пусть $f: V \to W$ – линейное отображение, A_f – его матрица в некоторых базисах, выбранных в V и W. Если выбрать в V и W новые базисы с матрицами перехода по отношению к старым базисам C и D соответственно, то матрица $\tilde{A}_f$ отображения f в новых базисах будет иметь вид

$$\tilde{A}_f = D^{-1} A_f C.$$

В частности, матрица линейного преобразования $f: V \to V$ изменяется по правилу $\tilde{A}_f = C^{-1} A_f C$, где C – матрица перехода от старого базиса к новому.

§ 4. ПОДПРОСТРАНСТВА

Пусть $x_1, \dots, x_s$ – система векторов пространства V. Согласно лемме 2.I, линейная оболочка $W = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_s)$ есть подпространство в V. Число $\dim W$ называется рангом системы $x_1, \dots, x_s$ и обозначается через $rg(x_1, \dots, x_s)$. Конечность ранга и способ его вычисления вытекают из следующей теоремы.

Теорема I. $rg(x_1, \dots, x_s)$ равен числу векторов в любой максимальной линейно независимой подсистеме системы $x_1, \dots, x_s$.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_r$ – максимальная линейно независимая подсистема системы $x_1, \dots, x_s$. Согласно лемме 2.4, $x_i \in \mathcal{L}(x_1, \dots, x_r)$ $(i = 1, \dots, s)$. Поэтому $x_1, \dots, x_r$ – базис в $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_s)$. В силу следствия 2.I $\dim \mathcal{L}(x_1, \dots, x_s) = r$.

Следствие I. $rg(x_1, \dots, x_s) = s$ тогда и только тогда, когда система $x_1, \dots, x_s$ линейно независима.

Рангом матрицы $A \in M_{sn}(K)$ называется ранг системы ее столбцов, рассматриваемых как векторы из K^s; он обозначается $rg\, A$.

В качестве первого приложения понятия ранга мы установим критерий совместности системы линейных уравнений. Нам понадобится следующая очевидная

Лемма I. Если W – подпространство в V, то $\dim W \le \dim V$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $W = V$.

Теорема 2 /Кронекер – Капелли/. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство. Рассуждение, проведенное на стр. 7, показывает, что достаточно доказать следующее утверждение:

Пусть $a_1, \dots, a_n, b$ – векторы из некоторого пространства V. Имеем $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $rg(a_1, \dots, a_n) = rg(a_1, \dots, a_n, b)$.

Докажем последнее утверждение. Если $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$, то $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b)$, откуда следует равенство рангов. Обратно, если ранги равны, то из леммы I ясно, что $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$, т.е. $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$.

Важные примеры подпространств возникают при изучении линейных отображений. Ядром линейного отображения $f: V \to W$ называется ядро соответствующего гомоморфизма аддитивных групп, т.е. множество $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$. Как известно, ядро и образ гомоморфизма групп являются подгруппами. В нашем случае легко доказывается

<u>Лемма 2</u>. Ядро $\operatorname{Ker} f$ и образ $\operatorname{Im} f$ линейного отображения $f: V \to W$ являются подпространствами в V и W соответственно.

Число $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$ называется <u>рангом</u> линейного отображения f, а число $\operatorname{def} f = \dim \operatorname{Ker} f$ – <u>дефектом</u> отображения f.

<u>Лемма 3</u>. Имеем $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A_f$, где A_f – матрица отображения f в произвольных базисах.

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_n$ и $w_1, \dots, w_s$ – базисы в V и W. Легко проверить, что $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$. Значит, $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(v_1), \dots, f(v_n))$. Отождествляя W с K^s при помощи изоморфизма, определенного базисом $w_1, \dots, w_s$, видим, что $\operatorname{rg}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ совпадает с рангом системы столбцов матрицы A_f в наших базисах.

<u>Теорема 3</u>. Для любого линейного отображения $f: V \to W$ имеем

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{def} f = \dim V.$$

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_k$ – базис в $\operatorname{Ker} f$. Согласно следствию 2.3, его можно дополнить до базиса $v_1, \dots, v_n$ пространства V. Тогда $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ – базис в $\operatorname{Im} f$. Действительно, как видно из доказательства леммы 3, $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = \mathcal{L}(0, \dots, 0, f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)) = \mathcal{L}(f(v_{k+1}), \dots, f(v_n))$. Далее, если $\sum_{i=1}^{n-k} c_i f(v_{k+i}) = 0$, то $\sum_{i=0}^{n-k} c_i v_{k+i} \in \operatorname{Ker} f$ и поэтому $\sum_{i=0}^{n-k} c_i v_{k+i} = \sum_{j=1}^{k} d_j v_j$, где $d_j \in K$. Значит, $\sum_{j=1}^{k} d_j v_j + \sum_{i=0}^{n-k} (-c_i) v_{k+i} = 0$, откуда все $d_j = 0$ и все $c_i = 0$. Из доказанного следует, что $\operatorname{rg} f = n - k = n - \operatorname{def} f$.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $n = \dim V = \dim W$. Линейное отображение $f: V \to W$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} f = n$ или когда $\operatorname{def} f = 0$.

<u>Следствие 3</u>. Пусть $f: V \to W$ – линейное отображение. Тогда в V и W можно выбрать такие базисы, что соответствующая матрица A_f имеет вид

$$A_f = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $r = \operatorname{rg} f$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3 легко следует существование таких базисов $v_1, \dots, v_n$ и $w_1, \dots, w_s$ пространств V и W, что $\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}(v_{r+1}, \dots, v_n)$, $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_r)$ и $f(v_i) = w_i$ / $i = 1, \dots, r$ /. Эти базисы и являются искомыми.

Перейдем теперь к заданию подпространств системами однородных линейных уравнений. Пусть V – векторное пространство с фиксированным базисом $v_1, \dots, v_n$, и пусть задана система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, \dots, s), \qquad /I/$$

с матрицей $A=(a_{ij})$. Рассмотрим в V множество W всех векторов, координаты которых $x_1,\dots,x_n$ в базисе $v_1,\dots,v_n$ составляют решение системы /I/. Мы говорим, что W <u>определяется системой уравнений /I/</u>.

<u>Теорема 4</u>. Множество W является подпространством в V, причем $\dim W = n - \operatorname{rg} A$.

Доказательство. Для любого $x=\sum_{j=1}^n x_j v_j \in V$ положим $\alpha_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Очевидно, $\alpha_i \in V^*$. Определим отображение $\alpha: V \to K^s$ формулой $\alpha(x) = (\alpha_1(x),\dots,\alpha_s(x))$. Ясно, что α линейно и что $W=\operatorname{Ker}\alpha$. Из леммы 2 следует, что W – подпространство в V, а по теореме 3 $\dim W = n-\operatorname{rg} f$. Далее, A совпадает с матрицей A_f в базисах $v_1,\dots,v_n$, $e_1,\dots,e_s$, и по лемме 3 $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$.

Вычислим теперь $\dim W$ другим способом. Как видно из доказательства теоремы 4, имеем $W=\{x \mid \alpha_i(x)=0,\ i=1,\dots,s\}$ /этот способ задания подпространства имеет то преимущество, что не требует выбора базиса/.

<u>Теорема 4'</u>. Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_s \in V^*$ и $W=\bigcap_{i=1}^s \operatorname{Ker}\alpha_i$. Тогда $\dim W = \dim V - \operatorname{rg}(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ – максимальная линейно независимая подсистема в $\alpha_1,\dots,\alpha_s$. Тогда $\alpha_i \in \mathcal{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ / $i=1,\dots,s$ /. Отсюда легко следует, что $W=\bigcap_{i=1}^r \operatorname{Ker}\alpha_i$. Дополним $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ до базиса пространства V^*. Отождествляя V^{**} с V, мы можем рассматривать полученный базис как двойственный $v^1,\dots,v^n$ к некоторому базису $v_1,\dots,v_n$ пространства V. Поскольку $\alpha_i = v^i$ / $i=1,\dots,r$ /, имеем $W=\mathcal{L}(v_{r+1},\dots,v_n)$. Значит, $\dim W = n-r$.

<u>Следствие 4</u>. Ранг системы строк любой матрицы $A\in M_{sn}(K)$ совпадает с $\operatorname{rg} A$.

Доказательство. Рассмотрим систему однородных линейных уравнений с матрицей A и определяемое ей подпространство $W\subseteq K^n$. По теореме 4 $\dim W = n-\operatorname{rg} A$, а из теоремы 4' следует, что $\dim W = n-r$, где r – ранг системы строк матрицы A. Отсюда $r = \operatorname{rg} A$.

<u>Теорема 5</u>. Пусть V – векторное пространство с фиксированным базисом $v_1,\dots,v_n$. Тогда всякое подпространство $W\subseteq V$ задается некоторой системой однородных линейных уравнений.

Доказательство. Выберем в V такой базис $\tilde v_1,\dots,\tilde v_n$, что $W=\mathcal{L}(\tilde v_1,\dots,\tilde v_r)$, и пусть $\tilde x_1,\dots,\tilde x_n$ – координаты в этом базисе. Тогда W определяется уравнениями $\tilde x_{r+1}=\dots=\tilde x_n=0$. Используя теорему 2.4, нетрудно получить отсюда систему линейных однородных уравнений относительно координат в исходном базисе, определяющую W.

Пусть V - векторное пространство над K, W - его подпространство. Тогда в факторгруппе V/W аддитивной группы V можно определить умножение на элементы из K по формуле

$$c(x+W) = cx + W \quad (c \in K,\ x \in V).$$

Легко проверить, что V/W превращается тем самым в векторное пространство над K; оно называется факторпространством пространства V по подпространству W. Естественное отображение $\pi : V \to V/W$, переводящее x в $x+W$, является линейным. Справедлива следующая теорема о гомоморфизмах: если $f: V \to U$ - сюръективное линейное отображение, то $V/\operatorname{Ker} f \cong U$. Кроме того, отметим следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть V - конечномерное векторное пространство, W - его подпространство. Тогда $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\pi : V \to V/W$. Как известно из алгебры, $\operatorname{Ker}\pi = W$. Затем применяем теорему 3.

Заметим, что смежные классы $x+W$ пространства V по некоторому подпространству W называются часто плоскостями /или линейными многообразиями/, параллельными W. В случае $V = E^3$ - это обычные плоскости, прямые или точки. Можно показать, что в координатах плоскости могут быть заданы системами линейных неоднородных уравнений, но мы не будем на этом останавливаться.

Пусть V - векторное пространство, V_1 и V_2 - два его подпространства. Легко видеть, что множества

$$V_1 + V_2 = \{ x_1 + x_2 \mid x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2 \}$$

и

$$V_1 \cap V_2 = \{ x \in V \mid x \in V_1 \text{ и } x \in V_2 \}$$

являются подпространствами в V; они называются суммой и пересечением подпространств V_1 и V_2 соответственно. Говорят, что V_1 и V_2 образуют прямую сумму /такую сумму записывают в виде $V_1 \dot{+} V_2$ /, если каждый элемент $x \in V_1 + V_2$ представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, единственным образом.

Лемма 4. Сумма $V_1 + V_2$ является прямой тогда и только тогда, когда $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Доказательство. Если сумма прямая и $x \in V_1 \cap V_2$, то из единственности разложения ясно, что $x = 0$. Обратно, если $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ и если $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, где $x_i, y_i \in V_i$ / $i = 1,2$/, то $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in V_1 \cap V_2$, откуда $x_i = y_i$ / $i = 1,2$/.

Лемма 5. Пусть $V = V_1 \dot{+} V_2$. Тогда объединение базисов подпространств V_1 и V_2 является базисом в V. В частности, $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Определения суммы, пересечения, а также прямой суммы подпространств переносятся на произвольные /даже бесконечные/ семейства подпространств; очевидным образом обобщается лемма 5. Справедливо также некоторое обобщение леммы 4.

Имеется также так называемый "внешний" вариант понятия прямой суммы. Пусть V_1, V_2 - два векторных пространства над K; введем в их прямом произведении $V_1 \times V_2$ операции сложения и умножения на элемент поля K следующим образом:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) \qquad (x_i, y_i \in V_i,\ c \in K),$$
$$c(x_1, x_2) = (cx_1,\ cx_2)$$

Легко проверить, что получится векторное пространство над K. Оно называется прямой суммой /иногда прямым произведением/ пространств V_1 и V_2 и обозначается $V_1 \oplus V_2$.

Два введенных выше понятия прямой суммы по существу равносильны. А именно, если $V = V_1 \dotplus V_2$, где V_i - подпространства в V, то соответствие $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ есть изоморфизм пространства $V_1 \oplus V_2$ на V. Далее, если $V = V_1 \oplus V_2$, то подмножества $\tilde{V}_1 = \{(x, 0) \mid x \in V_1\}$ и $\tilde{V}_2 = \{(0, y) \mid y \in V_2\}$ суть подпространства в V и $V = \tilde{V}_1 \dotplus \tilde{V}_2$.

Сказанное выше непосредственно обобщается на случай любого конечного семейства векторных пространств $V_1, \ldots, V_s$. Прямая сумма такого семейства обозначается через $V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ или $\bigoplus\limits_{i=1}^{s} V_i$. Пишут также $V^n = \underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{n \text{ раз}}$. Например, $K^n = \underbrace{K \oplus \ldots \oplus K}_{n \text{ раз}}$. Можно определить понятие прямой суммы и для бесконечных семейств векторных пространств. Например, рассмотрим счетное семейство $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ векторных пространств над K. Прямая сумма $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ этого семейства определяется как множество всевозможных последовательностей $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, где $x_n \in V_n$ и все x_n, кроме конечного числа, равны 0; операции в этом множестве определяются покомпонентно.

§ 5. ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определители естественно возникают при попытке обобщить теорию площадей и объемов на евклидовой плоскости или в пространстве на многомерный случай. Поэтому мы начнем с понятия ориентированной площади параллелограмма в E^2. Фиксируем на плоскости E^2 некоторую ориентацию, т.е. положительное направление вращения вокруг точки, и обозначим через $s(x,y)$ обычную площадь параллелограмма, натянутого на линейно независимые векторы $x, y \in E^2$. Для произвольных $x, y \in E^2$ положим

$$\sigma(x,y)=\begin{cases} s(x,y), & \text{если пара } x,y \text{ линейно независима и положительно ориентирована,}\\ -s(x,y), & \text{если пара } x,y \text{ линейно независима и отрицательно ориентирована,}\\ 0, & \text{если пара } x,y \text{ линейно зависима.}\end{cases}$$

При этом пара x,y называется положительно /отрицательно/ ориентированной, если направление кратчайшего вращения от x к y положительно /отрицательно/. Функция σ называется ориентированной площадью параллелограмма. Из геометрических соображений без труда проверяется, что она обладает следующими свойствами:

I/ $\sigma(x+x', y) = \sigma(x,y) + \sigma(x',y)$;

2/ $\sigma(cx,y) = c\sigma(x,y)$;

3/ $\sigma(y,x) = -\sigma(x,y)$;

3'/ $\sigma(x,x) = 0$ $\quad (x, x', y \in E^2, \ c \in \mathbb{R})$.

Из 3/ легко следует, что свойства I/ и 2/ справедливы также и по отношению ко второму аргументу. Кроме того, нетрудно проверить, что 3/ и 3'/ можно вывести друг из друга, если справедливо свойство I/ по обоим аргументам. Функция $\gamma(x,y)$, где $x,y \in E^2$, обладающая всеми перечисленными свойствами, называется знакопеременной билинейной формой на E^2 /в дальнейшем это понятие будет обобщено и несколько уточнено/.

Теорема I. Пусть v_1, v_2 - базис в E^2, $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$, $y = y_1 v_1 + y_2 v_2$. Тогда всякая знакопеременная билинейная форма γ на E^2 имеет вид

$$\gamma(x,y) = c\,(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

где $c = \gamma(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пользуясь свойствами знакопеременной билинейной формы, легко получаем, что $\gamma(x,y) = \gamma\left(\sum_{i=1}^{2} x_i v_i, \sum_{j=1}^{2} y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \gamma(v_i, v_j) = x_1 y_2 \gamma(v_1,v_2) - x_2 y_1 \gamma(v_2, v_1) = c\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Следствие I. Предположим, что базис v_1, v_2 положительно ориентирован и определяет декартову систему координат. Тогда ориентированная площадь параллелограмма вычисляется по формуле

$$\sigma(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Выражение $x_1 y_2 - x_2 y_1$ называют <u>определителем</u> матрицы $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ и обозначают обычно $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Перейдем теперь к общим определениям. Пусть V – некоторое векторное пространство над K, k – натуральное число. <u>k-линейной формой</u> на V называется любая функция $\gamma(x_1,\dots,x_k)$ от k векторов пространства V, принимающая значения в поле K и обладающая следующими свойствами:

1/ $\gamma(x_1,\dots,x_{i-1}, x+y, x_{i+1},\dots,x_k) = \gamma(x_1,\dots,x,\dots,x_k) + \gamma(x_1,\dots,y,\dots,x_k)$;

2/ $\gamma(x_1,\dots,x_{i-1}, cx, x_{i+1},\dots,x_k) = c\,\gamma(x_1,\dots,x,\dots,x_k)$,

для любого $i = 1,\dots,k$ и любых $x, y \in V$, $c \in K$.

k-линейная форма γ называется <u>симметрической</u>, если для любых $i \neq j$ имеем

3/ $\gamma(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_k) = \gamma(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_k)$,

и <u>кососимметрической</u>, если для любых $i \neq j$ имеем

4/ $\gamma(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_k) = -\gamma(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_k)$.

Форма называется <u>знакопеременной</u>, если для любых $i \neq j$ имеем

5/ $\gamma(x_1,\dots,\underset{i}{x},\dots,\underset{j}{x},\dots,x_k) = 0$.

В случае $k = 1$ получаем линейные формы на V, определенные в § 3; они по определению считаются симметрическими, кососимметрическими и знакопеременными. 2-линейные формы называются также <u>билинейными</u>.

Обозначим через $\mathcal{L}_k(V)$ множество всех k-линейных форм на V, а через $\mathcal{L}_k^s(V)$, $\mathcal{L}_k^{ss}(V)$, $\mathcal{L}_k^a(V)$ – подмножества симметрических, кососимметрических и знакопеременных форм соответственно. Множество $\mathcal{L}_k(V)$ легко превратить в векторное пространство над K, определив сумму форм и произведение формы на скаляр так, как это обычно делается для функций. Тогда $\mathcal{L}_k^s(V)$, $\mathcal{L}_k^{ss}(V)$ и $\mathcal{L}_k^a(V)$ станут подпространствами в $\mathcal{L}_k(V)$. Имеем $\mathcal{L}_1(V) = \mathcal{L}_1^s(V) = \mathcal{L}_1^{ss}(V) = \mathcal{L}_1^a(V) = V^*$. Положим также по определению $\mathcal{L}_0(V) = \mathcal{L}_0^s(V) = \mathcal{L}_0^{ss}(V) = \mathcal{L}_0^a(V) = K$.

<u>Лемма I</u>. Имеем $\mathcal{L}_k^a(V) \subseteq \mathcal{L}_k^{ss}(V)$, а если $\operatorname{char} K \neq 2$, то $\mathcal{L}_k^a(V) = \mathcal{L}_k^{ss}(V)$. Если же $\operatorname{char} K = 2$, то $\mathcal{L}_k^{ss}(V) = \mathcal{L}_k^s(V)$.

Доказательство. Если γ знакопеременна, то для любых $x, y \in V$ имеем

$$0 = \gamma(x_1,\dots,\underset{i}{x+y},\dots,\underset{j}{x+y},\dots,x_k) = \gamma(x_1,\dots,\underset{i}{x},\dots,\underset{j}{x},\dots,x_k) +$$
$$+ \gamma(x_1,\dots,\underset{i}{x},\dots,\underset{j}{y},\dots,x_k) + \gamma(x_1,\dots,\underset{i}{y},\dots,\underset{j}{x},\dots,x_k) +$$
$$+ \gamma(x_1,\dots,\underset{i}{y},\dots,\underset{j}{y},\dots,x_k) = \gamma(x_1,\dots,\underset{i}{x},\dots,\underset{j}{y},\dots,x_k) + \gamma(x_1,\dots,\underset{i}{y},\dots,\underset{j}{x},\dots,x_k) = 0.$$

Если γ кососимметрична, то для любого $x \in V$ имеем

$$\gamma(x_1,\dots,\underset{i}{x},\dots,\underset{j}{x},\dots,x_k) = -\gamma(x_1,\dots,\underset{i}{x},\dots,\underset{j}{x},\dots,x_k),$$

откуда $2\gamma(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_k)=0$. Если $\mathrm{char}K\neq 2$, отсюда следует,что $\gamma(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_k)=0$. Последнее утверждение очевидно.

Лемма 2. Форма $\gamma\in L_k(V)$ симметрична тогда и только тогда, когда для любой $s\in S_k$

$$\gamma(x_{s(1)},\dots,x_{s(k)})=\gamma(x_1,\dots,x_k).$$

Форма γ кососимметрична тогда и только тогда, когда для любой $s\in S_k$

$$\gamma(x_{s(1)},\dots,x_{s(k)})=(\operatorname{sign}s)\,\gamma(x_1,\dots,x_k).$$

Доказательство легко следует из разложения подстановок в произведение транспозиций.

Пусть $v_1,\dots,v_n$ - базис пространства V . Если $\gamma\in L_k(V)$, то скаляры $c_{i_1\dots i_k}=\gamma(v_{i_1},\dots,v_{i_k})$ / $1\le i_\alpha\le n$ / называются координатами формы γ в данном базисе. Рассмотрим векторы $x_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}v_i\in V$ / $j=1,\dots,k$ /. Тогда $\gamma(x_1,\dots,x_k)=$
$=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}x_{i_1 1}x_{i_2 2}\dots x_{i_k k}\,\gamma(v_{i_1},\dots,v_{i_k})$, т.е.

$$\gamma(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}c_{i_1\dots i_k}x_{i_1 1}\dots x_{i_k k}. \qquad /I/$$

Таким образом, координаты полностью определяют форму γ . Кроме того, координаты могут принимать произвольные значения, т.е. формула /I/ определяет k-линейную форму в V для любых $c_{i_1\dots i_k}\in K$.

Определим $v^{i_1\dots i_k}\in L_k(V)$ формулой

$$v^{i_1\dots i_k}(x_1,\dots,x_k)=x_{i_1 1}\dots x_{i_k k}. \qquad /2/$$

Лемма 3. Формы $v^{i_1\dots i_k}$ /$1\le i_\alpha\le n$ / составляют базис в $\mathcal{L}_k(V)$, причем координаты формы γ суть координаты в этом базисе. В частности, $\dim\mathcal{L}_k(V)=n^k$.

Изучим теперь более подробно знакопеременные формы.

Лемма 4. Координаты $c_{i_1\dots i_k}$ знакопеременной формы γ обладают следующими свойствами:

$c_{i_1\dots i_k}=0$, если $i_\alpha=i_\beta$ для некоторых $\alpha\neq\beta$;

$c_{i_{s(1)}\dots i_{s(k)}}=(\operatorname{sign}s)\,c_{i_1\dots i_k}$,если все $i_1,\dots,i_k$ различны и $s\in S_k$.

Доказательство непосредственно вытекает из лемм I и 2.

Следствие 2. Имеем $\mathcal{L}_k^a=0$, если $k>n$.

Из леммы 4 видно, что все ненулевые координаты формы $\gamma\in\mathcal{L}_k^a(V)$ выражаются через координаты $c_{\alpha_1\dots\alpha_k}$,где $\alpha_1<\dots<\alpha_k$. Последние координаты называются существенными координатами формы γ , их будет $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Мы покажем ниже, что $\dim\mathcal{L}_k^a(V)=C_n^k$, если $0\le k\le n$.

Определим теперь преобразование Alt пространства $\mathcal{L}_k(V)$ формулой

$$(Alt\,\gamma)(x_1,\dots,x_k)=\sum_{s\in S_k}(\operatorname{sign}s)\,\gamma(x_{s(1)},\dots,x_{s(k)}) \qquad (x_i\in V). \quad (3)$$

Легко видеть, что это преобразование линейно. Нам потребуется также

Лемма 5. Имеем

$$\mathrm{Alt}\, v^{i_1\dots i_k} = \sum_{s\in S_k}(\mathrm{sign}\, s)\, v^{i_{s(1)}\dots i_{s(k)}}.$$

Доказательство. Используя /2/, получаем для любых $x_1,\dots,x_k\in V$

$$(\mathrm{Alt}\, v^{i_1\dots i_k})(x_1,\dots,x_k) = \sum_{s\in S_k}(\mathrm{sign}\, s)\, x_{i_1 s(1)}\dots x_{i_k s(k)}.$$

Преобразование $s\mapsto s^{-1}$ группы S_k является биективным. Поэтому в полученной формуле мы можем заменить индекс суммирования s на s^{-1}. Поскольку $\mathrm{sign}(s^{-1})=\mathrm{sign}\, s$, получаем

$$(\mathrm{Alt}\, v^{i_1\dots i_k})(x_1,\dots,x_k) = \sum_{s\in S_k}(\mathrm{sign}\, s)\, x_{i_1 s^{-1}(1)}\dots x_{i_k s^{-1}(k)} =$$

$$= \sum_{s\in S_k}(\mathrm{sign}\, s)\, x_{i_{s(1)}1}\dots x_{i_{s(k)}k} = \sum_{s\in S_k}(\mathrm{sign}\, s)\, v^{i_{s(1)}\dots i_{s(k)}}(x_1,\dots,x_k).$$

Теорема 2. Преобразование Alt отображает $\mathcal{L}_k(V)$ на $\mathcal{L}_k^a(V)$.

Доказательство. Покажем, что для любой $\gamma\in\mathcal{L}_k(V)$ форма $\mathrm{Alt}\,\gamma$ знакопеременна. Для простоты обозначений докажем, что $(\mathrm{Alt}\,\gamma)(x_1,x_2,\dots,x_k)=0$, если $x_1=x_2$. Разобьем S_k на различные смежные классы Hs по подгруппе $H=\{e,(12)\}$. Члены правой части формулы /3/ разбиваются на пары, соответствующие смежным классам. Покажем, что при $x_1=x_2$ члены в каждой паре сокращаются. Очевидно, подстановкам s и $(12)\circ s$ соответствуют члены

$$(\mathrm{sign}\, s)\,\gamma(x_{s(1)},\dots,\underset{i}{x_1},\dots,\underset{j}{x_2},\dots,x_{s(k)}),$$

$$-(\mathrm{sign}\, s)\,\gamma(x_{s(1)},\dots,\overset{i}{x_2},\dots,\overset{j}{x_1},\dots,x_{s(k)}),$$

где $1=s(i)$, $2=s(j)$. Отсюда и следует наше утверждение.

Пусть теперь $\gamma\in\mathcal{L}_k^a(V)$. Согласно лемме 3, имеем $\gamma = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} c_{i_1\dots i_k}v^{i_1\dots i_k}$. Используя лемму 4, мы можем в этой формуле оставить только члены, отвечающие различным наборам $i_1,\dots,i_k$, и записать ее в виде

$$\gamma = \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_k}\sum_{s\in S_k} c_{\alpha_{s(1)}\dots\alpha_{s(k)}}v^{\alpha_{s(1)}\dots\alpha_{s(k)}} =$$

$$= \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_k} c_{\alpha_1\dots\alpha_k}\sum_{s\in S_k}(\mathrm{sign}\, s)\, v^{\alpha_{s(1)}\dots\alpha_{s(k)}}.$$

Применяя лемму 5, получаем

$$\gamma = \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_k} c_{\alpha_1\dots\alpha_k}\mathrm{Alt}\, v^{\alpha_1\dots\alpha_k} = \mathrm{Alt}\sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_k} c_{\alpha_1\dots\alpha_k}v^{\alpha_1\dots\alpha_k}.$$

Следствие 3. Если $1\le k\le n$, то формы $\mathrm{Alt}\, v^{\alpha_1\dots\alpha_k}$ $(\alpha_1<\dots<\alpha_k)$ составляют базис в $\mathcal{L}_k^a(V)$. В частности, $\dim\mathcal{L}_k^a(V)=C_n^k$.

Доказательство. Как показано при доказательстве теоремы 2, любая $\gamma\in\mathcal{L}_k^a(V)$ записывается в виде

$$\gamma = \sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_k} c_{\alpha_1\dots\alpha_k}\mathrm{Alt}\, v^{\alpha_1\dots\alpha_k}, \qquad /4/$$

Остается показать, что формы $\mathrm{Alt}\, v^{\alpha_1\dots\alpha_k}$ линейно независимы. Это следует из леммы 3 и из того, что формы $Alt\, v^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ для различных наборов $\alpha_1<\ldots<\alpha_k$ выражаются через попарно не пересекающиеся множества форм $v^{i_1\ldots i_k}$.

Рассмотрим теперь знакопеременные n -линейные формы на n -мерном пространстве V. Согласно следствию 3, $\dim \mathcal{L}_n^{a}(V) = 1$. Формула /4/ приобретает вид $\gamma = c_{12\ldots n} Alt\, v^{12\ldots n}$, где

$$(Alt\, v^{12\ldots n})(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{s\in S_n}(\operatorname{sign} s)\, x_{1s(1)}\ldots x_{ns(n)}.$$

Многочлен, составляющий правую часть этой формулы, называется <u>определителем</u> матрицы $X=(x_{ij})$ и обозначается

$$\det X = \begin{vmatrix} x_{11}\ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ x_{n1}\ldots & x_{nn}\end{vmatrix} = \det(x_1,\ldots,x_n)$$

для произвольной квадратной матрицы порядка n над K со столбцами $x_1,\ldots,x_n$. Очевидно, $\det$ - функция от n векторов пространства K^n, имеющая вид $\det = Alt\, e^{12\ldots n}$, где $e_1,\ldots,e_n$ - стандартный базис в K^n. Согласно теореме 2, $\det$ -знакопеременная n-линейная функция.

Пусть $X=(x_{ij})$ - произвольная, не обязательно квадратная, матрица над K. <u>Минором порядка</u> k матрицы X называется определитель любой ее квадратной подматрицы порядка k, состоящей из элементов, находящихся в некоторых выделенных k строках и k столбцах. Например, если $X\in M_{n,k}(K)$, то для любых $\alpha_1<\ldots<\alpha_k$ значение $Alt\, e^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_1,\ldots,x_k)$, где $x_1,\ldots,x_k$ - столбцы матрицы X, есть ее минор порядка k, стоящий в строках с номерами $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$.

Если $X\in M_{n,s}(K)$, то матрицей, <u>транспонированной</u> по отношению к X, называется матрица $X^T\in M_{s,n}(K)=(y_{ij})$, где $y_{ij}=x_{ji}$.

<u>Теорема 3 /свойства определителя/</u>. 1/ $\det$ - знакопеременная n -линейная функция от столбцов матрицы $X\in M_n(K)$;

2/ $\det X^T = \det X$;

3/ $\det$ - знакопеременная n-линейная функция от строк матрицы $X\in M_n(K)$;

4/ $\det E = 1$; вообще,

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{nn}\end{vmatrix} = x_{11}x_{22}\ldots x_{nn}. \qquad (5)$$

5/ Для любых $i\neq j$ и любого $c\in K$ имеем

$$\det(x_1,\ldots,\underset{i}{x_i},\ldots,\underset{j}{x_j+cx_i},\ldots,x_n) = \det(x_1,\ldots,x_n).$$

Доказательство. Свойство 1/ доказано выше. Свойство 2/ вытекает из леммы 5, а свойство 3/ – из 2/. Свойство 4/ легко выводится из определения определителя. Свойство 5/ легко следует из 1/.

Из теоремы 3/ вытекает следующий способ вычисления определителей: при помощи преобразований, указанных в свойстве 5/, а также перестановок столбцов матрицы /см. свойство 1// приводим матрицу к треугольному виду, т.е. к виду, указанному в формуле /5/, а затем применяем эту формулу.

Заметим также, что, как легко следует из одномерности пространства $\mathcal{L}^a_n(V)$, свойства 1/ и 4/ однозначно определяют определитель как функцию от квадратной матрицы порядка n.

Перейдем теперь к понятию определителя линейного преобразования. Пусть $f: V \to W$ – произвольное линейное отображение. Определим отображение $f^*_k: \mathcal{L}_k(W) \to \mathcal{L}_k(V)$ формулой

$$(f^*_k\gamma)(x_1,\dots,x_k) = \gamma(f(x_1),\dots,f(x_k)). \qquad (6)$$

Лемма 6. Отображение f^*_k линейно. Имеем $(f\circ g)^*_k = g^*_k \circ f^*_k$, $e^*_k = e$. Если f – изоморфизм, то и f^*_k – изоморфизм, причем $(f^{-1})^*_k = (f^*_k)^{-1}$.

со стр 25

Пусть, в частности, $f \in \mathrm{End}\,V$ и $n = \dim V$. Поскольку $\dim \mathcal{L}^a_n(V) = 1$, f^*_n есть умножение на некоторый скаляр $c \in K$, т.е. $f^*_n\gamma = c\gamma$ для всех $\gamma \in \mathcal{L}^a_n(V)$. Скаляр c называется определителем преобразования f и обозначается $\det f$.

Теорема 4. Имеем $\det f = \det A_f$ для произвольного базиса $v_1,\dots,v_n$ пространства V.

Доказательство. Положим $\gamma = v^{12\dots n}$. Очевидно, $\gamma(v_1,\dots,v_n) = 1$ и $\gamma(f(v_1),\dots,f(v_n)) = \det A_f$. Поэтому $\det f = \det f\cdot\gamma(v_1,\dots,v_n) = (f^*_n\gamma)(v_1,\dots,v_n) = \gamma(f(v_1),\dots,f(v_n)) = \det A_f$.

Теорема 5. Имеем $\det(f\circ g) = \det f\cdot\det g$ $(f, g \in \mathrm{End}\,V)$ и $\det XY = \det X\cdot\det Y$ / $X, Y \in M_n(K)$ /.

Доказательство. Достаточно доказать первое из этих равенств. Для любого $\gamma \in \mathcal{L}^a_n(V)$ имеем $(f\circ g)^*_n(\gamma) = g^*_n(f^*_n(\gamma)) = (\det g\cdot\det f)\gamma$. С другой стороны, $(f\circ g)^*_n(\gamma) = \det(f\circ g)\gamma$.

Теорема 6. Преобразование $f \in \mathrm{End}\,V$ обратимо тогда и только тогда, когда $\det f \neq 0$. Матрица $X \in M_n(K)$ обратима тогда и только тогда, когда $\det X \neq 0$. При этом $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$, $\det X^{-1} = (\det X)^{-1}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для матриц. Если X обратима, то $XX^{-1} = E$. Применяя теоремы 5 и 3, получим, что $\det X\cdot\det X^{-1} = 1$, откуда $\det X \neq 0$ и $\det X^{-1} = (\det X)^{-1}$. Обратно, пусть $\det X \neq 0$. Докажем, что столбцы матрицы X линейно независимы, откуда по теореме 3.2 будет следовать, что X обратима. Если столбцы линейно зависимы, то по лемме 2.2 один из столбцов матрицы X, например, x_n, линейно выражается через остальные столбцы: $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$. Тогда $\det X = \det(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \det(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_i) = 0$.

со стр. 26

Следствие 4. Столбцы квадратной матрицы X линейно независимы тогда и только тогда, когда $\det X \neq 0$.

на стр. 24

Лемма 7. Отображение f_k^* переводит $\mathcal{L}_k^s(W)$ в $\mathcal{L}_k^s(V)$ и $\mathcal{L}_k^a(W)$ в $\mathcal{L}_k^a(V)$.

Следующей нашей целью является теорема о разложении по столбцу, которая сводит вычисление определителя матрицы к вычислению ее миноров порядка на I меньше порядка матрицы. Нам потребуется

Лемма 8. Имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}. \qquad /7/$$

Доказательство. Рассмотрим левую часть формулы /7/ как функцию $\delta(y_1, \ldots, y_{n-1})$ от $n-1$ векторов $y_i = (x_{i+1,2}, \ldots, x_{i+1,n}) \in K^{n-1}$. Согласно теореме 3, $\delta \in \mathcal{L}_{n-1}^a(K^{n-1})$ и $\delta(E) = E$. Поэтому $\delta(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \begin{vmatrix} x_{22} & \ldots & x_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{2n} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$.

Обозначим теперь через M_{ij} минор порядка $n-1$ матрицы $X \in M_n(K)$, полученный вычеркиванием из этой матрицы i-й строки и j-го столбца.

Теорема 7. Для любого j имеем $\det X = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{ij} M_{ij}$.

Доказательство. Поскольку $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$, имеем $\det X = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \det(x_1, \ldots, \underset{j}{e_i}, \ldots, x_n)$. В матрице со столбцами $x_1, \ldots, e_i, \ldots, x_n$ мы можем переставить столбцы и строки так, чтобы она приобрела вид матрицы из леммы 8, причем потребуется $i-1$ перестановок строк и $j-1$ перестановок столбцов. Используя теорему 3 и лемму 8, получим, что $\det(x_1, \ldots, \underset{j}{e_i}, \ldots, x_n) = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Применим теперь определители к системам линейных уравнений и к задаче об обращении матрицы.

Теорема 8. Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

является определенной тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$, где $A = (a_{ij})$ - матрица системы. При этом решение $x_1, \ldots, x_n$ находится по следующим формулам Крамера: $x_j = \frac{d_j}{\det A}$, где

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \underset{j}{b_n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Сформулированный нами критерий определенности системы непосредственно вытекает из теоремы 2.3 и следствия 4. Пусть теперь $\det A \neq 0$. Подставим решение $x_1, \ldots, x_n$ нашей системы в эту систему и тем самым превратим ее в систему равенств. Тогда будем иметь $b = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, где a_i – столбцы матрицы A, b – столбец свободных членов. Поэтому $d_j = \sum_{i=1}^n x_i \det(a_1, \ldots, \underset{j}{\underline{a_i}}, \ldots, a_n) = x_j \det A$, откуда $x_j = \frac{d_j}{\det A}$.

<u>Теорема 9</u>. Пусть $A \in GL_n(K)$ – обратимая матрица и пусть $A^{-1} = (b_{ij})$. Тогда $b_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{M_{ji}}{\det A}$, где M_{ji} – определенные выше миноры матрицы A. Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Доказательство. Как мы знаем из § 3, линейное преобразование пространства K^n, отвечающее матрице A, выражается в координатах формулами

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, n), \quad A = (a_{ij}). \qquad /8/$$

Мы можем рассматривать /8/ как систему линейных уравнений с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, определенную при любых значениях свободных членов $y_1, \ldots, y_n$. Решая эту систему по формулам Крамера из теоремы 8, получим $y_i = \frac{1}{\det A} d_i$, где

$$d_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & y_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \underset{i}{y_n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}_n.$$

Согласно теореме 7, имеем $d_i = \sum_{j=1}^n M_{ji} y_j (-1)^{i+j}$. Таким образом, $y_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{M_{ji}}{\det A} x_j$. Следовательно, $b_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{M_{ji}}{\det A}$.

<u>Следствие 5</u>. Отображения $\det: GL(V) \to K^*$ и $\det: GL_n(K) \to K^*$ являются гомоморфизмами групп. Ядра этих гомоморфизмов $SL(V) = \{f \in \operatorname{End} V \mid \det f = 1\}$ и $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$ – нормальные подгруппы в $GL(V)$ и $GL_n(K)$ соответственно.

на стр. 25

В заключение этого параграфа мы изучим некоторые замечательные операции умножения полилинейных форм.

Пусть $\alpha \in \mathcal{L}_p(V)$, $\beta \in \mathcal{L}_q(V)$. Тогда определена форма $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{L}_{p+q}(V)$, заданная формулой

$$(\alpha \otimes \beta)(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \alpha(x_1, \ldots, x_p)\, \beta(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}).$$

Форма $\alpha \otimes \beta$ называется <u>тензорным произведением</u> /или просто <u>произведением</u>/ форм α и β. Легко видеть, что тензорное умножение ассоциативно. Если $v_1, \ldots, v_n$ – базис пространства V, то

$$v^{i_1\dots i_n} = v^{i_1}\otimes\dots\otimes v^{i_n}. \qquad /9/$$

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}_k(V)$. Определяя по линейности тензорное произведение для любых двух элементов из $\mathcal{L}(V)$ мы, очевидно, превратим $\mathcal{L}(V)$ в ассоциативную алгебру над K. При этом $c\otimes\alpha = c\alpha$ для $c\in K=\mathcal{L}_0(V)$, $\alpha\in\mathcal{L}(V)$. Поэтому $1\in K=\mathcal{L}_0(V)$ есть единица алгебры $\mathcal{L}(V)$. Из /9/ и из леммы 3 следует, что $v^1,\dots,v^n$ – система образующих алгебры $\mathcal{L}(V)$. Более того, $\mathcal{L}(V)$ есть алгебра некоммутативных многочленов от $v^1,\dots,v^n$.

Положим $\mathcal{L}^a(V)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}^a_k(V)$. Подпространство $\mathcal{L}^a(V)\subset\mathcal{L}(V)$ не является, вообще говоря, подалгеброй. Мы введем теперь в $\mathcal{L}^a(V)$ новую операцию умножения, относительно которой $\mathcal{L}^a(V)$ также станет ассоциативной алгеброй с единицей. Для этого мы рассмотрим линейное отображение $Alt:\mathcal{L}(V)\to\mathcal{L}^a(V)$, определяемое введенными выше отображениями $Alt:\mathcal{L}_k(V)\to\mathcal{L}^a_k(V)$. Согласно теореме 2, Alt сюръективно /мы считаем, что Alt тождественно на $\mathcal{L}_0(V)=K$ и на $\mathcal{L}_1(V)=V^*$ /.

Лемма 9. $Ker\ Alt$ есть идеал алгебры $\mathcal{L}(V)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $Alt(\alpha\otimes\gamma)=Alt(\gamma\otimes\alpha)=0$ для любой $\alpha\in V^*$ и любой $\gamma\in\mathcal{L}_k(V)$, такой, что $Alt\,\gamma=0$. Для любых $x_1,\dots,x_{k+1}\in V$ имеем

$$Alt(\gamma\otimes\alpha)(x_1,\dots,x_{k+1}) = \sum_{s\in S_{k+1}}(\operatorname{sign} s)\,\gamma(x_{s(1)},\dots,x_{s(k)})\,\alpha(x_{s(k+1)}).$$

Группа S_{k+1} разбивается на $k+1$ левых смежных классов a_iS_k / $i=1,\dots,k+1$ / по подгруппе $S_k=\{s\in S\mid s(k+1)=k+1\}$, причем можно считать, что $a_i(k+1)=i$. Поэтому

$$Alt(\gamma\otimes\alpha)(x_1,\dots,x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{s\in a_iS_k}(\operatorname{sign} s)\,\gamma(x_{s(1)},\dots,x_{s(k)})\,\alpha(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1}(\operatorname{sign} a_i)\,\alpha(x_i)\sum_{t\in S_k}(\operatorname{sign} t)\,\gamma(x_{a_it(1)},\dots,x_{a_it(k)}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1}(\operatorname{sign} a_i)\,\alpha(x_i)\,(Alt\,\gamma)(x_{a_i(1)},\dots,x_{a_i(k)}) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $Alt(\alpha\otimes\gamma)=0$.

Определим в $\mathcal{L}^a(V)$ операцию умножения $\wedge$ формулой

$$(Alt\,\alpha)\wedge Alt\,\beta = Alt(\alpha\otimes\beta) \qquad (\alpha,\beta\in\mathcal{L}(V)). \qquad /10/$$

Из леммы 9 следует, что это определение корректно. Операция $\wedge$ называется <u>внешним умножением</u>. Очевидно, внешнее умножение превращает $\mathcal{L}^a(V)$ в ассоциативную алгебру с единицей, естественно изоморфную факторалгебре $\mathcal{L}(V)/Ker\ Alt$.

Если $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in V^*$, то $Alt\,\alpha_i=\alpha_i$, так что

$$\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k = Alt(\alpha_1\otimes\dots\otimes\alpha_k)$$

Доказательство леммы 5 показывает также, что

$$\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_k = \sum_{s\in S_k}(\operatorname{sign} s)\,\alpha_{s(1)}\otimes\dots\otimes\alpha_{s(k)}.$$

В частности, для любых $\alpha,\beta\in V^*$ имеем $\alpha\wedge\beta=\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha$.

Отсюда следует, что

$$\alpha\wedge\alpha=0, \qquad \alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha \qquad (\alpha,\beta\in V^*). \qquad (11)$$

Используя ассоциативность, можно обобщить формулу /II/ следующим образом:

Лемма IO. Если $\alpha \in \mathcal{L}^a_p(V)$, $\beta \in \mathcal{L}^a_q(V)$, то $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$. Если $\alpha \in \mathcal{L}^a_{\text{нет}}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^a_{2k+1}(V)$, то $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Заметим еще, что в случае, когда $\operatorname{char} K = 0$, любая форма $\alpha \in \mathcal{L}^a_p(V)$ может быть записана в виде

$$\alpha = \operatorname{Alt}\left(\frac{1}{p!}\alpha\right).$$

Поэтому формула /IO/ приобретает вид

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!\,q!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta) \qquad (\alpha \in \mathcal{L}^a_p(V),\ \beta \in \mathcal{L}^a_q(V)).$$

Пусть V конечномерно и обладает базисом $v_1, \dots, v_n$. Тогда в силу следствия 3 формы $v^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge v^{\alpha_k} = \operatorname{Alt} v^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ $(\alpha_1 < \dots < \alpha_k)$ составляют базис пространства $\mathcal{L}^a_k(V)$. Согласно /4/, имеем

$$\gamma = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} c_{\alpha_1 \dots \alpha_k} v^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge v^{\alpha_k}$$

для любой $\gamma \in \mathcal{L}^a_k(V)$. Таким образом, элементы $v^1, \dots, v^n$ составляют систему образующих алгебры $\mathcal{L}^a(V)$.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Мы будем рассматривать конечномерное векторное пространство V над некоторым полем K. Задача будет состоять в том, чтобы для заданного линейного преобразования $\alpha \in \operatorname{End} V$ найти базис пространства V, в котором матрица A_α имела бы по возможности простой вид /смысл этого выражения уточняется ниже/.

Подпространство $W \subset V$ называется <u>инвариантным</u> относительно α, если $\alpha(x) \in W$ для любого $x \in W$. В инвариантном подпространстве W преобразование α индуцирует линейное преобразование, которое обозначается $\alpha|W$ и называется <u>ограничением</u> /или <u>сужением</u>/ преобразования α на W. Кроме того, α индуцирует линейное преобразование $\tilde\alpha$ факторпространства V/W, действующее по формуле

$$\tilde\alpha(x+W) = \alpha(x) + W \qquad (x \in V).$$

<u>Лемма I</u>. Линейные преобразования, оставляющие инвариантным заданное подпространство $W \subset V$, составляют подалгебру $\operatorname{End}^W(V)$ в алгебре $\operatorname{End} V$. Соответствия $\alpha \mapsto \alpha|W$ и $\alpha \mapsto \tilde\alpha$ являются гомоморфизмами алгебр $\operatorname{End}^W(V) \to \operatorname{End} W$ и $\operatorname{End}^W(V) \to \operatorname{End}(V/W)$ соответственно.

<u>Лемма 2</u>. Пусть W – подпространство в V, инвариантное относительно α и пусть в V выбран базис $v_1, \dots, v_n$, такой, что первые его k векторов составляют базис W. Тогда матрица A_α преобразования α в базисе $v_1, \dots, v_n$ имеет вид

$$A_\alpha = \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array}\left(\begin{array}{c|c} A_{\alpha|W} & * \\ \hline 0 & A_{\tilde\alpha} \end{array}\right), \qquad \begin{array}{cc} k & n-k \end{array}$$

где $A_{\alpha|W}$ – матрица преобразования $\alpha|W$ в базисе $v_1, \dots, v_k$, а $A_{\tilde\alpha}$ – матрица преобразования $\tilde\alpha$ в базисе $v_{k+1}+W, \dots, v_n+W$.

Еще большее упрощение матрицы достигается в случае, когда V разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $V = W \dotplus W'$, где W и W' инвариантны относительно α. В любом базисе пространства V, являющемся объединением базисов подпространств W и W', имеем

$$A_\alpha = \left(\begin{array}{c|c} A_{\alpha|W} & 0 \\ \hline 0 & A_{\alpha|W'} \end{array}\right).$$

Эта лемма легко обобщается на случай любого числа слагаемых.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании одномерных инвариантных подпространств. Если W – такое подпространство и v –

ненулевой вектор из W, то

$$\alpha(v) = \lambda v, \qquad /I/$$

где $\lambda \in K$. Ненулевой вектор $v \in W$, удовлетворяющий условию /I/, называется собственным для преобразования α, а скаляр λ называется собственным значением преобразования α, соответствующим вектору v. Очевидно, всякий собственный вектор натягивает одномерное инвариантное подпространство.

Уравнение /I/ можно переписать в виде $(\alpha-\lambda e)(v)=0$, т.е. $v \in Ker(\alpha-\lambda e)$. Но, как следует из теоремы 5.6, $Ker(\alpha-\lambda e) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\det(\alpha-\lambda e)=0$. Тем самым мы приходим к рассмотрению функции

$$p_\alpha(t) = \det(\alpha - te), \qquad /2/$$

аргумент которой t и значения принадлежат полю K. Легко видеть, что p_α является многочленом от t. Действительно, если выбрать в V базис, то по теореме 5.4

$$p_\alpha(t) = \det A_{\alpha-te} = \det(A_\alpha - tE) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{vmatrix}.$$

Из определения определителя легко следует, что

$$p_\alpha(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \dots + \det\alpha.$$

Можно показать, что коэффициенты этого многочлена не зависят от выбора базиса. В частности, $Tr\,\alpha = a_{11} + \dots + a_{nn}$ называется следом линейного преобразования α. Многочлен p_α, определенный формулой /2/, называется характеристическим многочленом преобразования α. Очевидно, $\deg p_\alpha = n = \dim V$. Из доказанного выше следует

Теорема I. Элемент $\lambda \in K$ есть собственное значение преобразования α тогда и только тогда, когда $p_\alpha(\lambda)=0$, т.е. когда λ является корнем характеристического многочлена.

Следствие I. Пусть поле K алгебраически замкнуто /например, $K = \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел/. Тогда любое линейное преобразование ненулевого конечномерного пространства над K обладает собственным вектором.

Пример I. Для поля действительных чисел $K = \mathbb{R}$ утверждение следствия I неверно. Действительно, поворот плоскости E^2 на угол, не кратный π, не имеет собственных векторов.

Пусть $\lambda \in K$ и $p_\alpha(\lambda)=0$. Положим

$$V_\lambda = \{ x \in V \mid \alpha(x) = \lambda x \}.$$

Подпространство V_λ называется собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ. Оно состоит из всех собственных векторов, отвечающих λ, и нулевого вектора. Очевидно, V_λ ...

вариантно относительно α и $\alpha|V_\lambda$ – гомотетия с коэффициентом λ.

Лемма 4. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные собственные значения преобразования α. Тогда $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k}$ – прямая сумма.

Доказательство. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ лемма верна. Пусть она верна для $k-1$ слагаемого. Предположим, что

$$x_1 + \ldots + x_k = 0, \qquad /3/$$

где $x_i \in V_{\lambda_i}$. Применяя α, получим

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0. \qquad /4/$$

Умножая /3/ на λ_k и вычитая из /4/, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = 0.$$

В силу предположения индукции, $(\lambda_i - \lambda_k) x_i = 0$, откуда $x_i = 0$ для $i = 1, \ldots, k-1$. Из /3/ видно, что и $x_k = 0$.

Линейное преобразование α называется диагонализируемым, если существует базис, в котором матрица A_α диагональна, т.е. все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны 0.

Теорема 2. Линейное преобразование α диагонализируемо тогда и только тогда, когда в V существует базис из собственных векторов преобразования α или когда $V = V_{\lambda_1} \dot{+} \ldots \dot{+} V_{\lambda_k}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – полный набор различных собственных значений преобразования α. При этом матрица A_α в базисе $v_1, \ldots, v_n$ из собственных векторов имеет вид

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}, \qquad /5/$$

где μ_i – собственное значение, отвечающее вектору v_i.

Доказательство. Первое утверждение и формула /5/ непосредственно следуют из определений. Согласно лемме 4, V содержит подпространство $V_{\lambda_1} \dot{+} \ldots \dot{+} V_{\lambda_k}$. Если существует базис из собственных векторов, то ясно, что $V = V_{\lambda_1} \dot{+} \ldots \dot{+} V_{\lambda_k}$. Из леммы 4.5 видно, что верно и обратное.

Следствие 2. Если α диагонализируемо, то многочлен

$$p_\alpha(t) = (\mu_1 - t) \ldots (\mu_n - t)$$

разлагается на линейные множители над полем K.

Пример 2. Рассмотрим линейное преобразование $\alpha: K^2 \to K^2$, заданное матрицей $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, $p_\alpha(t) = (1-t)^2$ разлагается на линейные множители, но в K^2 не существует базиса из собственных векторов для α. Таким образом, утверждение, обратное к следствию 2, неверно.

Тем не менее справедлива

Теорема 3. Если p_α обладает n различными корнями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то α диагонализируемо.

Доказательство. Согласно лемме 4.5, $\dim(V_{\lambda_1} \dotplus \ldots \dotplus V_{\lambda_n}) \geqslant n = \dim V$. Значит, $V = V_{\lambda_1} \dotplus \ldots \dotplus V_{\lambda_n}$, и применима теорема 2.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности приведения матрицы линейного преобразования к треугольному виду.

Теорема 4. Для того, чтобы в V существовал базис, в котором матрица A_α треугольна:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}, \qquad /6/$$

необходимо и достаточно, чтобы многочлен p_α разлагался на линейные множители над полем K. При этом μ_i - корни многочлена p_α, взятые столько раз, каковы их кратности.

Доказательство. Если A_α имеет вид /6/, то, как следует из /5.5/, $p_\alpha(t) = (\mu_1 - t)\ldots(\mu_n - t)$. Обратное утверждение несложно доказать при помощи индукции по размерности. Мы, однако, этого делать не будем, поскольку ниже будет доказано более точное утверждение.

Нам потребуется следующая алгебраическая конструкция. Пусть $f \in K[t]$ - некоторый многочлен и $\alpha \in \operatorname{End} V$. Если $f = c_0 + c_1 t + \ldots + c_m t^m$, где $c_i \in K$, то положим

$$f(\alpha) = c_0 e + c_1 \alpha + \ldots + c_m \alpha^m.$$

Лемма 5. Для любых $f, g \in K[t]$ и $c \in K$ имеем $(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$, $(fg)(\alpha) = f(\alpha) g(\alpha)$, $(cf)(\alpha) = c f(\alpha)$. Иначе говоря, соответствие $f \mapsto f(\alpha)$ есть гомоморфизм алгебр $K[t] \to \operatorname{End} V$.

Отметим также, что из леммы 2 легко следует

Лемма 6. Если W - инвариантное относительно V подпространство, то $p_\alpha = p_{\alpha|W} \cdot p_{\tilde\alpha}$.

Следствие 3. Если p_α разлагается над K на линейные множители, то тем же свойством обладают $p_{\alpha|W}$ и $p_{\tilde\alpha}$.

Теорема 5 /теорема Гамильтона - Кэли/. Имеем $p_\alpha(\alpha) = 0$.

Доказательство. Мы проведем его в предположении, что p_α разлагается над K на линейные множители. Применим индукцию по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема, очевидно, верна. Пусть она верна для пространств размерности $n-1$. Согласно теореме I, из нашего предположения следует, что в V существует собственный вектор v, отвечающий некоторому собственному значению λ. Применяя к $W = \mathcal{L}(v)$ лемму 6, получаем $p_\alpha = (\lambda - t)\, p_{\tilde\alpha}$. Согласно следствию 3, $p_{\tilde\alpha}$ разлагается на линейные множители. Применяя к преобразованию $\tilde\alpha$ пространства V/W предположение индукции, видим, что $p_{\tilde\alpha}(\tilde\alpha) = 0$. Далее,

$$p_\alpha'(\alpha) = (\lambda e - \alpha)\, p_{\tilde\alpha}(\alpha),$$

Из леммы I видно, что $p_{\tilde\alpha}(\tilde\alpha) = \widetilde{p_{\tilde\alpha}(\alpha)}$. Значит, $p_{\tilde\alpha}(\alpha)(x) \in W$ для всех $x \in V$. Отсюда для любого $x \in V$ имеем

$$p_\alpha(\alpha)(x) = (\lambda e - \alpha)(p_{\tilde\alpha}(\alpha)(x)) = 0.$$

Теперь мы рассмотрим важный класс линейных преобразований, в известном смысле противоположный классу диагонализируемых преобразований. Линейное преобразование $\alpha \in End\, V$ называется нильпотентным, если $\alpha^m = 0$ для некоторого натурального m.

Теорема 6. Следующие свойства преобразования $\alpha \in End\, V$ эквивалентны:

I/ α нильпотентно;

2/ существует такая последовательность подпространств $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$, где $\dim V_i = i$, что $\alpha(V_i) \subseteq V_{i-1}$ / $i = 1, \ldots, n$ /;

3/ существует базис, в котором матрица преобразования α имеет вид

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & * \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

4/ $p_\alpha(t) = (-t)^n$.

Доказательство. Пусть α нильпотентно и m - минимальное натуральное число, для которого $\alpha^m = 0$. Если α обратимо, то $\alpha^{m-1} = \alpha^m \alpha^{-1} = 0$, что дает противоречие. Итак, α не обратимо. Согласно следствию 4.2, $W_1 = Im\,\alpha$ - собственное подпространство в V. Если $W_1 \neq 0$, то рассмотрим $\alpha | W_1$, которое по лемме I также нильпотентно, и положим $W_2 = \alpha(W_1)$. Продолжая этот процесс, мы получим цепочку подпространств $V = W_0 \supset W_1 \supset \ldots \supset W_m = \{0\}$, обладающую свойством $\alpha(W_i) \subseteq W_{i+1}$ / $i = 0, \ldots, m-1$ /. Вставляя между W_i подпространства так, чтобы получилась цепочка вложенных друг в друга подпространств с разностями размерностей I, мы, очевидно, получим цепочку, удовлетворяющую условию 2/. Значит, I/ $\Rightarrow$ 2/.

2/ $\Rightarrow$ 3/. Выберем последовательно базис $v_1, \ldots, v_n$ пространства V так, чтобы $V_i = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, A_α будет иметь вид /7/.

3/ $\Rightarrow$ 4/. Очевидно.

4/ $\Rightarrow$ I/. Применим теорему 5.

Пусть снова $\alpha \in End\, V$, $\lambda \in K$. Вектор $x \in V$ называется корневым относительно α, отвечающим корню λ, если $(\alpha - \lambda e)^m(x) = 0$ для некоторого натурального m. Пусть V^λ - множество всех корневых векторов, отвечающих данному λ. Если корневой вектор $x \neq 0$, то можно выбрать наименьшее натуральное m, такое, что

$(\alpha-\lambda e)^m(x)=0$. Тогда ясно, что $(\alpha-\lambda e)^{m-1}(x)$ – собственный вектор, отвечающий λ. Таким образом, если $V^\lambda \neq \{0\}$, то λ – собственное значение и по теореме I $p_\alpha(\lambda)=0$. Очевидно, $V_\lambda \subseteq V^\lambda$.

Лемма 7. Подмножество V^λ является подпространством в V, инвариантным относительно α. Пусть $V^\lambda \neq 0$. Имеем $\alpha=\beta+\lambda e$, где β – нильпотентное преобразование. В подходящем базисе имеем

$$A_{\alpha|V^\lambda}=\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \qquad /8/$$

Доказательство. Пусть $x, y \in V^\lambda$. Тогда $(\alpha-\lambda e)^m(x)=(\alpha-\lambda e)^\ell(x)=0$ для некоторых натуральных m, ℓ. Если $m \geq \ell$, то ясно, что $(\alpha-\lambda e)^m(x+y)=(\alpha-\lambda e)^m(x)+(\alpha-\lambda e)^m(y)=0$. Далее, $(\alpha-\lambda e)^m(cx)=0$ для любого $c \in K$. Значит, V^λ – подпространство.

Если $V^\lambda \neq 0$, то выберем в нем базис $v_1, \ldots, v_k$. Пусть $(\alpha-\lambda e)^{m_i}(v_i)=0$ и пусть $m=\max(m_1,\ldots,m_k)$. Тогда легко видеть, что $(\alpha-\lambda e)^m(x)=0$ для любого $x \in V^\lambda$. Значит, $(\alpha-\lambda e)|V^\lambda=\beta$ нильпотентно. По теореме 6 в V^λ существует базис, в котором A_β имеет вид /7/. Тогда $A_{\alpha|V^\lambda}=A_\beta+\lambda E$ имеет вид /8/.

Лемма 8. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные собственные значения преобразования α. Тогда $V^{\lambda_1}+\ldots+V^{\lambda_k}$ – прямая сумма.

Доказательство. Покажем сначала, что $V^\lambda \cap V^\mu=0$, если $\lambda \neq \mu$. Если $V^\lambda \cap V^\mu \neq 0$, то в V^μ найдется ненулевой корневой вектор относительно $\alpha|V^\mu$, отвечающий λ, а потому найдется и собственный вектор с собственным значением λ. Но из леммы 7 видно, что это невозможно.

Докажем теперь лемму индукцией по k. Пусть $x_1+\ldots+x_k=0$, где $x_i \in V^{\lambda_i}$. Если $(\alpha-\lambda_k e)^m x_k=0$, то $(\alpha-\lambda_k e)^m x_1+\ldots+(\alpha-\lambda_k e)^m x_{k-1}=0$. Очевидно, $(\alpha-\lambda_k e)^m x_i \in V^{\lambda_i}$, так что в силу предположения индукции $(\alpha-\lambda_k e)^m x_i=0$, т.е. $x_i \in V^{\lambda_k}$ для $i=1,\ldots,k-1$. По доказанному выше $x_i=0$ для $i=1,\ldots,k-1$. Ясно, что и $x_k=0$.

Ненулевые подпространства V^λ называются <u>корневыми подпространствами</u> для линейного преобразования α.

Теорема 7. Если характеристический многочлен p_α разлагается над K на линейные множители, то V разлагается в прямую сумму корневых подпространств относительно α.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ – полный набор различных собственных значений преобразования α. Тогда

$$p_\alpha(t)=(-1)^n(t-\lambda_1)^{k_1}\ldots(t-\lambda_r)^{k_r},$$

где k_i – натуральные числа. Рассмотрим многочлены $f_i=\frac{p_\alpha}{(t-\lambda_i)^{k_i}}$ / $i=1,\ldots,r$ /. Очевидно, они взаимно просты в совокупности. Поэтому существуют такие $g_i \in K[t]$, что $\sum_{i=1}^{r} g_i f_i=1$. Используя лемму 5, получаем отсюда $e=\sum_{i=1}^{r} g_i(\alpha)f_i(\alpha)$. Значит, произвольный $x \in V$ представим в виде $x=\sum_{i=1}^{r} x_i$, где $x_i=g_i(\alpha)f_i(\alpha)(x)$. Имеем $(\alpha-\lambda_i e)^{k_i}(x_i)=\pm g_i(\alpha)p_\alpha(\alpha)(x)=0$, т.е. $x_i \in V^{\lambda_i}$. Итак, $V=\sum_{i=1}^{r} V^{\lambda_i}$. По лемме 8 сумма является прямой.

Следствие 4. Если p_α разлагается на линейные множители над K, то в пространстве V существует базис, в котором

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} \lambda_r & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix} \end{pmatrix}. \qquad /9/$$

Следствие 5. Если p_α разлагается на линейные множители над K, то $\alpha = \beta + \gamma$, где γ – диагонализируемое, а β – нильпотентное линейные преобразования, причем $\gamma\beta = \beta\gamma$.

Доказательство. Пусть $\alpha_i = \alpha|V^{\lambda_i}$ / $i = 1,\dots,r$ /. Согласно лемме 7, $\alpha_i = \beta_i + \lambda_i e$, где $\beta_i^{k_i} = 0$. Определим преобразования β и γ пространства V формулами

$$\beta\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(x_i), \quad \gamma\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \qquad (x_i \in V^{\lambda_i}).$$

Ясно, что $\beta^k = 0$, где $k = \max(k_1,\dots,k_r)$, т.е. β нильпотентно, а γ диагонализируемо. Кроме того, $\beta_i(\lambda_i e) = (\lambda_i e)\beta_i$, откуда легко следует, что $\beta\gamma = \gamma\beta$.

Заметим, что матрица вида /9/ на самом деле может быть приведена к еще более специальной /так называемой жордановой нормальной/ форме. Мы не будем этим заниматься.

Теорема 7 и следствия из нее применимы, в частности, в случае, когда K – алгебраически замкнутое поле /например, $K = \mathbb{C}$ /. Если многочлен p_α не разлагается над K на линейные множители, то, как известно из теории полей, существует конечное расширение L поля K, над которым такое разложение имеет место. Теорема 7 может быть применена к продолжению линейного преобразования α на некоторое векторное пространство V^L над L, полученное из V при помощи так называемого расширения поля скаляров. Сейчас мы изучим это расширение в частном случае $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$.

Пусть V – произвольное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Рассмотрим пространство $V \oplus V$ и определим в нем умножение на комплексные числа следующим образом:

$$(a + bi)(x, y) = (ax - by,\ ay + bx) \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Непосредственно проверяется, что в $V \oplus V$ возникает структура векторного пространства над $\mathbb{C}$; обозначим это пространство через $V^{\mathbb{C}}$. Как обычно, прямые слагаемые в $V \oplus V$ отождествляются с некоторыми подпространствами. Условимся отождествить $x \in V$ с $(x, 0)$ и обозначим через $V \subset V^{\mathbb{C}}$ подпространство всех векторов такого вида. Тогда $i(x,0) = ix = (0,x)$. Таким образом, $V^{\mathbb{C}} = V \dotplus iV$ /прямая сумма подпространств над $\mathbb{R}$ /.

Пусть $z = x + iy$, где $x, y \in V$. Положим $\bar{z} = x - iy$. Легко проверить, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{cz} = \bar{c}\bar{z} \qquad (z_1, z_2, z \in V^{\mathbb{C}},\ c \in \mathbb{C})$$

/преобразования, обладающие такими свойствами, называются полулинейными/. Ясно, что $V = \{ z \in V^{\mathbb{C}} \mid \bar{z} = z \}$.

Лемма 9. Всякий базис пространства V над $\mathbb{R}$ является базисом пространства $V^{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$. В частности, $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Пусть теперь $\alpha \in \operatorname{End} V$. Определим преобразование $\alpha^{\mathbb{C}}$ пространства $V^{\mathbb{C}}$ формулой

$$\alpha^{\mathbb{C}}(x + iy) = \alpha(x) + i\alpha(y) \qquad (x, y \in V).$$

Легко проверить, что $\alpha^{\mathbb{C}}$ – линейное преобразование, причем $\alpha^{\mathbb{C}}|V = \alpha$. Если A_α – матрица линейного преобразования α в некотором базисе пространства V, то матрица $A_{\alpha^{\mathbb{C}}}$ в том же базисе /см. лемму 9/ совпадает с A_α. Поэтому $p_{\alpha^{\mathbb{C}}} = p_\alpha$. Имеем $\alpha(\bar{z}) = \overline{\alpha(z)}$ $(z \in V^{\mathbb{C}})$.

В качестве применения этих конструкций докажем следующую теорему.

Теорема 8. Пусть α – линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над $\mathbb{R}$. Тогда в V существует одномерное или двумерное подпространство, инвариантное относительно α.

Доказательство. Многочлен $p_\alpha = p_{\alpha^{\mathbb{C}}}$ имеет либо вещественный, либо комплексный невещественный корень λ. В первом случае по теореме I в V существует одномерное инвариантное подпространство. В случае $\lambda \notin \mathbb{R}$ по той же теореме в $V^{\mathbb{C}}$ существует собственный вектор z для преобразования $\alpha^{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ. Из равенства $\alpha^{\mathbb{C}}(z) = \lambda z$ получаем $\alpha^{\mathbb{C}}(\bar{z}) = \bar{\lambda}\bar{z}$. Таким образом, $\bar{z}$ – собственный вектор с собственным значением $\bar{\lambda}$. По лемме 4 и из того, что $\lambda \neq \bar{\lambda}$, следует, что векторы z и $\bar{z}$ линейно независимы. Пусть $z = u + iv$, где $u, v \in \mathbb{R}$. Тогда $u = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $v = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ и $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{vmatrix} \neq 0$. Поэтому u и v линейно независимы над $\mathbb{C}$ и тем более над $\mathbb{R}$. Плоскость $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u, v)$ инвариантна относительно α, поскольку $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u, v) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(z, \bar{z}) \cap V$, а $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(z, \bar{z})$ инвариантна относительно $\alpha^{\mathbb{C}}$. На самом деле легко видеть, что

$$\alpha(u) = \mu u - \nu v,$$
$$\alpha(v) = \nu u + \mu v,$$

где $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

§ 7. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Пусть V – векторное пространство над полем K. В соответствии с § 5 через $\mathcal{L}_2(V)$ обозначается пространство всех билинейных форм на V, а через $\mathcal{L}_2^s(V)$ и $\mathcal{L}_2^a(V)$ – подпространства симметрических и знакопеременных форм соответственно. Имеем сюръективное линейное отображение $Alt: \mathcal{L}_2(V) \to \mathcal{L}_2^a(V)$. Кроме того, определим линейное отображение $Sym: \mathcal{L}_2(V) \to \mathcal{L}_2^s(V)$ формулой

$$(Sym\,\beta)(x,y) = \beta(x,y) + \beta(y,x) \qquad (x,y \in V).$$

Лемма I. Если $\mathrm{char}\, K \neq 2$, то $\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{L}_2^s(V) \dotplus \mathcal{L}_2^a(V)$.

Доказательство. Очевидно, для любой $\beta \in \mathcal{L}_2(V)$ имеем $\beta = \frac{1}{2}\, Sym\,\beta + \frac{1}{2}\, Alt\,\beta$. Кроме того, $\mathcal{L}_2^s(V) \cap \mathcal{L}_2^a(V) = \{0\}$.

Пусть $v_1, \dots, v_n$ – базис пространства V. Если $\beta \in \mathcal{L}_2(V)$, то координаты $b_{ij} = \beta(v_i, v_j)$ формы β образуют матрицу $B = (b_{ij})$, которая называется матрицей формы β в базисе $v_1, \dots, v_n$.

Квадратная матрица $B = (b_{ij})$ называется симметрической, кососимметрической или знакопеременной, если соответственно $B^T = B$, $B^T = -B$, $B^T = -B$ и $b_{ii} = 0$ / $i = 1, \dots, n$ /. Легко доказывается

Лемма 2. Билинейная форма тогда и только тогда является симметрической, кососимметрической или знакопеременной, когда тем же свойством обладает ее матрица в некотором базисе.

Пусть $\beta \in \mathcal{L}_2(V)$. Сопоставляя каждому $x \in V$ линейную форму $l_x(y) = \beta(x,y)$ на V, получаем линейное отображение $\lambda: V \to V^*$. Аналогично определяется линейное отображение $\rho: V \to V^*$, которое сопоставляет каждому $x \in V$ линейную форму $r_x(y) = \beta(y,x)$. Если β симметрична, то $\rho = \lambda$, а если β кососимметрична, то $\rho = -\lambda$. Подпространства $Ker_l\,\beta = Ker\,\lambda$ и $Ker_r\,\beta = Ker\,\rho$ называются соответственно левым и правым ядрами формы β. Как мы сейчас увидим, $\dim Ker_l\,\beta = \dim Ker_r\,\beta$, если V конечномерно. Число $rg\,\beta = \dim V - \dim Ker_l\,\beta$ называется рангом формы β. Согласно теореме 4.3, $rg\,\beta = rg\,\lambda$.

Лемма 3. Число $rg\,\beta = rg\,\lambda = rg\,\rho$ совпадает с рангом матрицы формы β в любом базисе.

Доказательство. Пусть $B = (b_{ij})$ – матрица формы β в базисе $v_1, \dots, v_n$. Рассмотрим в V^* двойственный базис $v^1, \dots, v^n$. Легко видеть, что в базисах $v_1, \dots, v_n$ и $v^1, \dots, v^n$ матрицы отображений λ и ρ имеют вид: $A_\lambda = B^T$, $A_\rho = B$. Используя следствие 4.4, получаем отсюда $rg\,\lambda = rg\,B^T = rg\,B = rg\,\rho$.

Форма β называется невырожденной, если $Ker_l\,\beta = 0$. Это свойство равносильно любому из следующих: $rg\,\beta = \dim V$, $\det B \neq 0$,

λ - изоморфизм /мы предполагаем, что $\dim V < \infty$ /.

Лемма 4. При изменении базиса матрица B формы β заменяется матрицей $\widetilde{B} = C^T B C$, где C - матрица перехода от старого базиса к новому.

Функция $q: V \to K$ называется квадратичной формой на пространстве V, если $q(cx) = c^2 q(x)$ / $c \in K$ / и если функция $\ell(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ является билинейной формой на V.

Пример I. Пусть $V = E^3$. Функция $(x,y) = |x||y|\cos\gamma$, где γ - угол между векторами x и y, называется скалярным произведением векторов x и y. Как известно, это симметрическая билинейная форма на E^3. Функция $q(x) = |x|^2$ есть квадратичная форма на E^3. Действительно, согласно теореме косинусов имеем $|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2 = 2(x,y)$.

Заметим, что билинейная форма ℓ, соответствующая квадратичной форме q, всегда симметрична. Легко видеть также, что $\ell(x,x) = 2q(x)$.

Пусть теперь β - любая билинейная форма. Тогда функция $q(x) = \beta(x,x)$ - квадратичная форма. Действительно, $q(cx) = \beta(cx,cx) = c^2\beta(x,x) = c^2 q(x)$ $(x \in K)$. Далее, для любых $x, y \in V$ имеем $\ell(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y) = \beta(x,y) + \beta(y,x)$, т.е. $\ell = \operatorname{Sym}\beta$. Можно доказать, что любая квадратичная форма q на V получается таким способом из некоторой билинейной симметрической формы β. Нам потребуется следующий, более точный вариант этого утверждения:

Лемма 5. Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то для любой квадратичной формы q на V существует единственная симметрическая билинейная форма β, для которой $q(x) = \beta(x,x)$.

Доказательство. Пусть ℓ - симметрическая билинейная форма, соответствующая квадратичной форме q. Положим $\beta = \frac{1}{2}\ell$. Тогда $\beta(x,x) = q(x)$. Пусть теперь β_1 - любая симметрическая билинейная форма, удовлетворяющая условию $\beta_1(x,x) = q(x)$ / $x \in V$ /. Приведенное выше вычисление показывает, что $\ell = \operatorname{Sym}\beta_1 = 2\beta_1$. Таким образом, $2\beta_1 = 2\beta$, откуда $\beta_1 = \beta$.

В дальнейшем мы всегда будем иметь в виду биективное соответствие между квадратичными и симметрическими билинейными формами, установленное в лемме 5. Заметим, что β определяется по квадратичной форме q формулой

$$\beta(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) \qquad (x,y \in V).$$

Пример I приводит нас к следующему обобщению евклидовой геометрии. Квадратичная форма q на векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ называется положительно определенной, если $q(x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Евклидовым пространством называется пара (V, q), где q - положительно определенная квадратичная форма на V. Согласно лемме 5, форме q отвечает симметрическая билинейная форма $\beta(x,y)=(x,y)$, которая называется <u>скалярным произведением</u>. <u>Длиной</u> вектора $x \in V$ называется число $|x| = \sqrt{q(x)} = \sqrt{(x,x)}$. Для любых ненулевых $x, y \in V$ определяется <u>угол</u> γ <u>между</u> x <u>и</u> y формулой

$$\cos \gamma = \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

То, что эта формула имеет смысл, следует из <u>неравенства Коши - Буняковского</u>: $(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$ /равенство в нем имеет место тогда и только тогда, когда x и y коллинеарны/.

Еще более общим является следующее определение. <u>Ортогональным пространством</u> называется пара (V,q), где q - квадратичная форма в векторном пространстве V над произвольным полем K. Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то по лемме 5 вместо q можно рассматривать соответствующую симметрическую билинейную форму β; мы будем писать $(V,q)=(V,\beta)$. Векторы $x, y \in V$ называются <u>ортогональными</u>, если $\beta(x,y)=0$. Заметим, что всякое подпространство W в ортогональном пространстве (V,q) определяет ортогональное пространство $(W, q|W) = (W, \beta|W)$. В частности, подпространство евклидова пространства всегда евклидово.

Базис векторного пространства V, снабженного симметрической билинейной формой β, называется <u>ортогональным</u>, если его векторы $v_1, \ldots, v_n$ попарно ортогональны, т.е. $\beta(v_i, v_j)=0$ для $i \neq j$. Это свойство равносильно тому, что матрица B формы β в нашем базисе диагональна, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix},$$

или тому, что β в координатах в этом базисе записывается в виде

$$\beta(x,y) = b_1 x_1 y_1 + \ldots + b_n x_n y_n.$$

При этом имеем

$$\beta(x,x) = q(x) = b_1 x_1^2 + \ldots + b_n x_n^2.$$

<u>Теорема I</u>. Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то в любом конечномерном ортогональном пространстве над K существует ортогональный базис.

Доказательство. Проведем индукцию по $\dim V$. Пусть для пространств размерности $n-1$ теорема доказана и пусть $\dim V = n$. Возьмем произвольный базис $v_1, \ldots, v_n$ в V и обозначим через $B=(b_{ij})$ матрицу формы β в этом базисе. Можно считать, что $B \neq 0$, ибо в противном случае наш базис ортогонален. Покажем, что надлежащим изменением базиса можно добиться того, чтобы $b_{11} \neq 0$. Если $b_{ii} \neq 0$ для некоторого i, то достаточно переставить векторы базиса. Если же все $b_{ii}=0$, то определим новый базис формулами: $W_1 = V_1 + V_2$, $w_i = v_i$ для $i > I$. Тогда $\beta(w_1, w_1) = 2b_{12}$. Мы можем считать, что $b_{12} \neq 0$, и тогда $\beta(w_1, w_1) \neq 0$.

Предположим теперь, что $b_{11} \neq 0$. Определим новый базис формулами

$$w_1 = v_1, \quad w_i = v_i + c_i v_1 \qquad (i = 2, \dots, n)$$

и подберем c_i так, чтобы $\beta(w_1, w_i) = 0$ для $i > I$. Очевидно, достаточно положить $c_i = -\frac{b_{1i}}{b_{11}}$. Рассмотрим теперь подпространство $W = \mathcal{L}(w_2, \dots, w_n)$. Согласно предположению индукции, в W существует ортогональный базис $\tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n$. Тогда ясно, что $w_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n$ – ортогональный базис пространства V.

Приведенное доказательство дает на самом деле алгоритм, позволяющий по произвольному базису пространства V построить ортогональный базис /алгоритм Лагранжа/. Отметим, что на координатном языке этот алгоритм выглядит следующим образом. Мы имеем

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j .$$

Если $B \neq 0$, то сначала добиваемся того, чтобы $b_{11} \neq 0$. Для этого достаточно перенумеровать координаты, если некоторый $b_{ii} \neq 0$. Если же все $b_{ii} = 0$, но $b_{12} \neq 0$, то полагаем $x_i = y_i$ $/ i \neq 2/$, $x_2 = y_1 + y_2$. Если $b_{11} \neq 0$, то преобразуем форму q следующим образом /точками обозначаются члены, не содержащие x_1 /:

$$q(x) = b_{11} x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} b_{1i} x_1 x_i + \ldots =$$
$$= b_{11} \left(x_1 + \frac{1}{b_{11}} \sum_{i=2}^{n} b_{1i} x_i\right)^2 + \ldots$$

Если теперь положить $y_1 = x_1 + \frac{1}{b_{11}} \sum_{i=2}^{n} b_{1i} x_i$, $y_i = x_i$ $/ i > I/$, то будем иметь

$$q(x) = b_{11} y_1^2 + \tilde{q}(y_2, \dots, y_n).$$

Тот же процесс применяем затем к форме $\tilde{q}$ и т.д.

Пример 2. В пространстве K^2 над полем K характеристики 2 не существует ортогонального базиса относительно формы

$$\beta(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 .$$

Действительно, форма β знакопеременна. Поэтому ее матрица знакопеременна в любом базисе. В ортогональном базисе она должна быть нулевой, что невозможно.

Мы укажем теперь другой метод построения ортогонального базиса, пригодный не во всех случаях. Он называется алгоритмом Якоби /а в случае евклидова пространства – алгоритмом Грама – Шмидта/.

Пусть $B = (b_{ij})$ – некоторая квадратная матрица над K. Миноры

$$\Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det B$$

называются угловыми минорами матрицы B. Заметим, что если B – матрица билинейной формы β в базисе $v_1, \dots, v_n$, то матрица минора Δ_i – это матрица формы $\beta | V_i$, где $V_i = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_i)$.

Отметим также, что из леммы 4 вытекает

Следствие I. $\det \widetilde{B} = \det B \cdot (\det C)^2$.

Теорема 2. Пусть V - конечномерное пространство с билинейной формой β, $v_1, \ldots, v_n$ - такой базис пространства V, что все угловые миноры матрицы B формы β в этом базисе $\Delta_i \neq 0$ /т.е. $\beta | V_i$ невырождена для всех $i = 1, \ldots, n$ /. Тогда в V существует базис $w_1, \ldots, w_n$, в котором матрица формы β имеет вид

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix},$$

а матрица перехода к этому базису имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Проведем индукцию по $\dim V$. Пусть теорема доказана для $\dim V = n-1$ и пусть $\dim V = n$. Применим предположение индукции к форме $\beta | W$, где $W = V_{n-1}$. Пусть $w_1, \ldots, w_{n-1}$ - такой базис в W, что выполнены все наши условия, и пусть

$$w_n = v_n + c_1 w_1 + \ldots + c_{n-1} w_{n-1}.$$

Очевидно, $w_1, \ldots, w_n$ - базис в V, матрица перехода к которому C имеет нужный нам вид. Подберем c_i так, чтобы w_n был ортогонален к $w_1, \ldots, w_{n-1}$. Для этого достаточно положить $c_i = -\frac{\beta(v_n, w_i)}{\beta(w_i, w_i)}$, что возможно, поскольку $\beta(w_i, w_i) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \neq 0$. В полученном ортогональном базисе матрица формы β имеет вид

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & & 0 \\ & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & \\ & & & \widetilde{b}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\det \widetilde{B} = \Delta_{n-1} \cdot \widetilde{b}_{nn}$. Но в силу следствия I $\det \widetilde{B} = \Delta_n \cdot (\det C)^2 = \Delta_n$. Значит, $\widetilde{b}_{nn} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Следствие 2. Квадратичная форма $q(x) = \beta(x, x)$ в конечномерном пространстве V над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда в некотором базисе все угловые миноры матрицы формы β положительны.

Доказательство. Пусть все $\Delta_i > 0$. По теореме 2 существует ортогональный базис, в котором q записывается в виде

$$q(x) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2.$$

Поскольку все коэффициенты положительны, q положительно определена.

Обратно, пусть q положительно определена. По теореме I существует базис, в котором q имеет вид

$$q(x) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2.$$

Из положительной определенности следует, что все $b_i > 0$. Следовательно, в этом базисе $\det B = b_1 \dots b_n > 0$. Следствие I показывает, что на самом деле $\det B > 0$ в любом базисе. Итак, мы доказали, что $\Delta_n > 0$. Но для любого i форма $q|V_i$ также положительно определена, откуда следует, что $\Delta_i > 0$.

Пусть снова (V, β) – ортогональное пространство над полем K характеристики $\neq 2$. По теореме I в V существует базис $v_1, \dots, v_n$ в котором

$$\beta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i y_i ,$$

$$q(x) = \beta(x, x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 ,$$

где $b_i = q(v_i) \in K$. Мы будем всегда упорядочивать ортогональный базис таким образом, чтобы вначале шли ненулевые, а затем – нулевые коэффициенты b_i. Очевидно, число r ненулевых коэффициентов совпадает с $\operatorname{rg} \beta$, а $\operatorname{Ker}_l \beta = \mathcal{L}(v_{r+1}, \dots, v_n)$. Рассмотрим теперь вопрос об упрощении коэффициентов b_i в случаях $K = \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

Пусть $K = \mathbb{C}$. Базис $v_1, \dots, v_n$ называется <u>ортонормированным</u>, если он ортогонален и $b_i = q(v_i) = 1$ $(i = 1, \dots, r)$.

Пусть $K = \mathbb{R}$. Ортогональный базис $v_1, \dots, v_n$ называется <u>ортонормированным</u>, если $b_1 = \dots = b_p = 1$, $b_{p+1} = \dots = b_r = -1$ для некоторого $p \leq r$.

<u>Теорема 3</u>. В конечномерном ортогональном пространстве над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ всегда существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – такой ортогональный базис, что $b_i = q(v_i) \neq 0$ для $1 \leq i \leq r$, $q(v_i) = 0$ для $i > r$. Ортонормированный базис $w_1, \dots, w_n$ определяется формулами

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{b_i}} v_i \quad (1 \leq i \leq r), \qquad w_j = v_j \quad (j > r),$$

если $K = \mathbb{C}$. Если же $K = \mathbb{R}$, то пусть $b_i > 0$ для $1 \leq i \leq p$ и $b_i < 0$ для $p+1 \leq i \leq r$. Тогда ортонормированный базис $w_1, \dots, w_n$ определяется формулами

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{|b_i|}} v_i \quad (1 \leq i \leq r), \qquad w_j = v_j \quad (j > r).$$

Если $K = \mathbb{C}$, то в ортонормированном базисе матрица формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{r} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \ 0 \end{pmatrix}$$

Она определяется лишь числом $r = \operatorname{rg} \beta$ и поэтому определена однозначно. В случае же $K = \mathbb{R}$ матрица формы в ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{p} & & & \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{q} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix},$$

где $p + q = r = \operatorname{rg} \beta$. Мы покажем сейчас, что и в этом случае матрица формы в ортонормированном базисе определена однозначно.

Теорема 4. В вещественном векторном пространстве матрица симметрической билинейной формы в ортонормированном базисе не зависит от выбора этого базиса.

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ – два ортонормированных базиса. Квадратичная форма q, отвечающая нашей билинейной форме, записывается в этих базисах следующим образом:

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,$$

$$q(x) = y_1^2 + \ldots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \ldots - y_{p'+q'}^2.$$

При этом $p+q = p'+q' = \operatorname{rg}\beta$, так что достаточно доказать, что $p = p'$. Рассмотрим подпространства $W_1 = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_p)$ и $W_2 = \mathcal{L}(w_{p'+1}, \ldots, w_n)$ и покажем, что $W_1 \cap W_2 = 0$. Если $x \in W_1 \cap W_2$, то $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 \geq 0$ и $q(x) = -y_{p'+1}^2 - \ldots - y_{p'+q'}^2 \leq 0$. Значит, $q(x) = 0$ и $x_1 = \ldots = x_p = 0$, т.е. $x = 0$. Таким образом, V содержит подпространство $W_1 \dotplus W_2$ размерности $p+n-p'$, откуда $p+n-p' \leq n$ и $p \leq p'$. Аналогично доказывается, что $p' \leq p$.

Теорема 4 показывает, что с каждым конечномерным ортогональным пространством над $\mathbb{R}$ можно связать пару чисел (p, q), где $p+q = \operatorname{rg}\beta$, называемую сигнатурой пространства. Если форма β невырождена, то вещественное ортогональное пространство называется псевдоевклидовым. В этом случае $p+q = \dim V$. В частности, псевдоевклидово пространство сигнатуры $(n, 0)$ – это евклидово пространство.

Чтобы придать полученным результатам более геометрическую форму, мы введем сейчас понятие изометричности двух ортогональных пространств. Пусть (V, q) и (V', q') – два ортогональных пространства над одним и тем же полем K. Линейное отображение $f: V \to V'$ называется изометрическим, если $q'(f(x)) = q(x)$ для всех $x \in V$. Если $\operatorname{char} K \neq 2$ и β, β' – соответствующие q, q' симметрические билинейные формы, то условие изометричности равносильно условию

$$\beta'(f(x), f(y)) = \beta(x, y) \qquad (x, y \in V).$$

Пространства (V, q) и (V', q') называются изометричными, если существует изометрический изоморфизм векторных пространств $V \to V'$. Полученные выше результаты без труда переформулируются следующим образом.

Теорема 5. Если $K = \mathbb{C}$ /или K – любое алгебраически замкнутое поле характеристики $\neq 2$/, то два конечномерных ортогональных пространства над K изометричны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые ранги и размерности. Два конечномерных ортогональных пространства над $\mathbb{R}$ изометричны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые сигнатуры и размерности. Два псевдоевклидовых пространства изометричны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые сигнатуры, а два евклидовых пространства - когда имеют одинаковые размерности.

Теперь мы займемся обобщением полученных результатов на случай произвольного поля K характеристики $\neq 2$. Пусть $E=(V,q)=(V,\beta)$ - ортогональное пространство над K. Вектор $x\in V$ называется изотропным, если $q(x)=0$. Пространство E называется изотропным, если оно содержит ненулевые изотропные векторы, и анизотропным в противном случае. Пространство E называется вполне изотропным, если все его векторы изотропны, т. е. если $q=0$. Из леммы 5 следует, что в этом случае $\beta=0$. Пространство E называется невырожденным, если β невырождена.

Пример 3. Ортогональное пространство размерности n над $\mathbb{R}$ анизотропно тогда и только тогда, когда имеет сигнатуру $(n,0)$ или $(0,n)$. Ортогональное пространство над $\mathbb{C}$ анизотропно тогда и только тогда, когда невырождено и одномерно.

Пусть W - подпространство в V. Тогда множество

$$W^{\perp}=\{x\in V \mid \beta(x,y)=0 \quad \forall\, y\in W\}$$

является подпространством в V; оно называется ортогональным дополнением к W в E. Мы выясним сейчас, в каком случае $W^{\perp}$ действительно является дополнением к W.

Лемма 6. Если $\dim V=n<\infty$, то $V=W\dotplus W^{\perp}$ в том и только том случае, когда W невырождено. Если W и E невырождены, то и $W^{\perp}$ невырождено и $(W^{\perp})^{\perp}=W$. Обратно, если $V=W\dotplus W'$ - разложение в прямую сумму невырожденных ортогональных друг другу подпространств, то V невырождено, $W'=W^{\perp}$ и $W=W'^{\perp}$.

Доказательство. Если $V=W\dotplus W^{\perp}$, то $W\cap W^{\perp}=0$, что и означает невырожденность формы $\beta|W$. Обратно, если W невырождено, то $W\cap W^{\perp}=0$. Оценим размерность подпространства $W^{\perp}$. Для этого рассмотрим линейное отображение $\lambda_W : V\to W^*$, сопоставляющее каждому $x\in V$ форму $l_x|W$. Очевидно, $W^{\perp}=\operatorname{Ker}\lambda_W$, так что по теореме 4.3 $n-\dim W^{\perp}\leq \dim W^*=\dim W$. Значит, $\dim W^{\perp}\geq n-\dim W$, откуда $\dim(W\dotplus W^{\perp})\geq n$ и $V=W\dotplus W^{\perp}$.

Если $V=W\dotplus W^{\perp}$, то любой $x\in W^{\perp}$, ортогональный к $W^{\perp}$, ортогонален ко всему V, откуда $x=0$, если E невырождено. Поскольку $W\subseteq(W^{\perp})^{\perp}$, из соображений размерности ясно, что $W=(W^{\perp})^{\perp}$.

Если $V=W\dotplus W'$, W и W' невырождены и ортогональны друг другу, то любой $x\in\operatorname{Ker}\beta$ представим в виде $x=y+z$, где $y\in W$, $z\in W'$. Очевидно, $y=x-z\in W^{\perp}$, откуда $y=0$, и аналогично $z=0$, так что E невырождено. Последнее утверждение вытекает из соображений размерности.

Лемма 7. Пусть (V,β) – невырожденное ортогональное пространство и $x\in V$ – ненулевой изотропный вектор. Найдется такой изотропный вектор $y\in V$, не коллинеарный x, что $\beta(x,y)=1$.

Доказательство. В силу невырожденности найдется такой вектор $z\in V$, что $\beta(x,z)\neq 0$. Можно выбрать z так, чтобы $\beta(x,z)=1$. Тогда вектор $y=z-\frac{1}{2}q(z)x$ изотропен и $\beta(x,y)=1$. Очевидно, x и y не коллинеарны.

Двумерное ортогональное пространство (V,β) называется гиперболическим, если в V существует базис v_1, v_2, в котором матрица формы β есть $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Например, плоскость $\mathcal{L}(x,y)$ из леммы 7 является гиперболической. Ортогональное пространство $E=(V,\beta)$ называется гиперболическим, если E разлагается в ортогональную прямую сумму гиперболических плоскостей. Это значит, что $\dim V=2n$ и в V существует такой базис $v_1,\dots,v_{2n}$, что матрица формы β в нем имеет вид

$$\begin{pmatrix}\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\end{pmatrix}.$$

Очевидно, гиперболическое пространство невырождено.

Лемма 8. Для двумерного ортогонального пространства $E=(V,\beta)$ следующие условия эквивалентны: E гиперболично; в V существует базис $\tilde v_1, \tilde v_2$, в котором матрица формы β имеет вид $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$; E изотропно и невырождено.

Доказательство. Пусть v_1, v_2 – базис из определения гиперболической плоскости. Тогда в базисе $\tilde v_1=v_1+\frac{1}{2}v_2$, $\tilde v_2=-v_1+\frac{1}{2}v_2$ матрица формы имеет вид $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Далее, если существует базис $\tilde v_1, \tilde v_2$, дающий такую матрицу, то вектор $\tilde v_1+\tilde v_2$ изотропен, так что E изотропно и невырождено. Пусть теперь E изотропно и невырождено. Тогда из леммы 7 следует, что E гиперболично.

Мы сформулируем теперь теорему, доказательство которой будет основной целью в оставшейся части этого параграфа.

Теорема 6. Любое конечномерное невырожденное ортогональное пространство над полем K характеристики $\neq 2$ допускает ортогональное прямое разложение

$$E=E_0\dotplus E_h\dotplus E_a,$$

где E_0 – вполне изотропное, E_h – гиперболическое, а E_a – анизотропное подпространства. Любые два таких разложения переводятся друг в друга некоторой изометрией пространства E на себя.

Разложение, о котором идет речь в теореме 7, называется разложением Витта.

Пример 4. Пусть $E = (V, \beta)$ - конечномерное ортогональное пространство над полем $K = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ и пусть $v_1, \dots, v_n$ - его ортонормированный базис. Тогда разложение Витта можно построить следующим образом. Пусть $K = \mathbb{C}$ и $r = r_g \beta$. Тогда $E_0 = \mathcal{L}(v_{r+1}, \dots, v_n) = \operatorname{Ker} \beta$, $E_a = \mathcal{L}(v_1)$, если r нечетно, $E_a = 0$, если r четно, $E_h = \mathcal{L}(v_2, \dots, v_r)$ или $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$. Пусть $K = \mathbb{R}$ и (p, q) - сигнатура формы β, $r = p+q$. Тогда $E_0 = \mathcal{L}(v_{r+1}, \dots, v_n) = \operatorname{Ker} \beta$. Если $p \leq q$, то $E_h = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{2p})$, $E_a = \mathcal{L}(v_{2p+1}, \dots, v_r)$, а если $p \geqslant q$, то $E_a = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{p-q})$, $E_h = \mathcal{L}(v_{p-q+1}, \dots, v_r)$.

Докажем теперь существование разложения Витта. Положим $E_0 = \operatorname{Ker} \beta$ и обозначим через E_1 произвольное прямое дополнение к E_0: $E = E_0 \dotplus E_1$. Тогда E_1 - невырожденное подпространство. Пусть E_h - максимальное гиперболическое подпространство в E_1 и пусть E_a - его ортогональное дополнение в E_1. По лемме 6 имеем $E_1 = E_h \dotplus E_a$, причем E_a невырождено. Покажем, что E_a анизотропно. Если x - ненулевой изотропный вектор в E_a, то по лемме 7 в E_a найдется гиперболическая плоскость $\mathcal{L}(x, y) = H$. Тогда $E_h \dotplus H$ - гиперболическое подпространство в E_1, что противоречит максимальности подпространства E_h.

Единственность разложения Витта будет выведена из следующей теоремы, называемой теоремой Витта.

Теорема 7. Пусть $E = (V, \beta)$ - конечномерное невырожденное ортогональное пространство над полем K характеристики $\neq 2$ и пусть W, W' - два его изометричных подпространства. Всякая изометрия $\alpha : W \to W'$ продолжается до изометрии $\tilde{\alpha}$ пространства E на себя.

Доказательство. Мы рассмотрим сначала случай, когда W /и W'/ невырождено, и докажем теорему в этом случае индукцией по $\dim W$. Пусть сначала $\dim W = 1$, $W = \mathcal{L}(x)$, $W' = \mathcal{L}(y)$, где $y = \alpha(x)$. Имеем $q(x) = q(y) \neq 0$. Векторы $x+y$ и $x-y$ ортогональны /диагонали ромба/. Легко видеть, что по крайней мере один из них не изотропен. Пусть $x+y$ не изотропен. По лемме 6 имеем $V = \mathcal{L}(x+y) \dotplus H$, где $H = \mathcal{L}(x+y)^{\perp}$. Обозначим через σ отражение в H, легко видеть, что оно является изометрией. Тогда $\sigma(x-y) = x-y$, и $\sigma(x+y) = -x-y$, откуда $\sigma(x) = -y$. Значит, $-\sigma$ продолжает α.

Пусть теорема доказана для невырожденных подпространств размерности $m-1$ и пусть $\dim W = m$. Согласно теореме 1, имеем ортогональное разложение $W = W_1 \dotplus W_2$, где W_1, W_2 невырождены и $\dim W_2 = 1$. По предположению индукции существует такая изометрия $\beta : V \to V$, что $\beta | W_1 = \alpha | W_1$. Тогда изометрия $\alpha_1 = \beta^{-1} \circ \alpha : W \to \beta^{-1}(W')$

тождественна на W_1. Согласно лемме 6, $V = W_1 \dotplus V_1$, где $V_1 = W_1^{\perp}$ – невырожденное подпространство, причем W_2, $\alpha_1(W_2) \subset V_1$. По доказанному выше существует такая изометрия $\gamma : V_1 \to V_1$, что $\gamma | W_2 = \alpha_1$. Если теперь продолжить γ на все V, считая его тождественным на W_1, то $\beta \circ \gamma$ будет искомой изометрией, продолжающей α.

Теперь предположим, что W вырождено, и покажем, что α можно изометрически продолжить на некоторое подпространство, содержащее W и имеющее размерность $\dim W + 1$. Сделав конечное число таких продолжений, мы дойдем до невырожденного подпространства, и теорема будет доказана.

Пусть $x \in (\operatorname{Ker}\beta) \cap W$, $x \neq 0$. С помощью леммы 7 построим такой изотропный вектор $y \in V$, не коллинеарный x, что $\beta(x, y) = 1$. Очевидно, $y \notin W$, так что $W_1 = W \dotplus \mathcal{L}(y)$ имеет размерность $\dim W + 1$. Рассмотрим линейную форму $\ell = \alpha^{*-1} \ell_y$ на подпространстве W' и продолжим ее произвольно /по линейно/ на V; тогда $\ell(\alpha(x)) = \beta(y, x)$ для $x \in W$. Поскольку β невырождена, соответствующее отображение $\lambda : V \to V^*$ сюръективно, т.е. существует такой $z' \in V$, что $\ell = \ell_{z'}$. Так же, как в лемме 7, заменим теперь z' вектором $y' = z' - \frac{1}{2} q(z') \alpha(x)$. Легко видеть, что $q(y') = 0$ и что $\beta(y', \alpha(x)) = \beta(y, x)$ $(x \in W)$. Отсюда следует, что продолжение отображения α на W_1, равное y' на y, является изометрией.

<u>Следствие 3</u>. Пусть W, W' – два изометричные подпространства невырожденного ортогонального пространства V. Тогда $W^{\perp}$ и $W'^{\perp}$ также изометричны.

<u>Следствие 4</u>. Любые два максимальных гиперболических подпространства невырожденного ортогонального пространства V переводятся друг в друга некоторой изометрией пространства V.

<u>Следствие 5</u>. Любые два максимальных вполне изотропных подпространства невырожденного ортогонального пространства V переводятся друг в друга некоторой изометрией пространства V.

Размерность максимального вполне изотропного подпространства называется <u>индексом Витта</u> пространства V. Из леммы 7 следует, что индекс Витта равен также половине размерности максимального гиперболического подпроостранства.

Перейдем теперь к к доказательству единственности разложения Витта из теоремы 6. Пусть $E = E_0 \dotplus E_h \dotplus E_a$ – произвольное разложение Витта. По лемме 6 подпространство $E_1 = E_h \dotplus E_a$ невырождено. Далее, ясно, что $E_0 \subseteq \operatorname{Ker}\beta$, откуда $\operatorname{Ker}\beta = E_0 \dotplus (\operatorname{Ker}\beta) \cap E_1 = E_0$. Таким образом, E_0 определяется однозначно. Если есть другое ортогональное разложение $E = E_0 \dotplus E_1'$, то любой $x \in E_1$ представляется в виде

$x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in E_0$, $x_1 \in E_1'$. Определим теперь отображение α: $E \to E$, полагая $\alpha(y + x) = y + x_1$, где $y \in E_0$, $x \in E_1$. Легко видеть, что α – изометрия, тождественная на E_0 и переводящая E_1 в E_1'. Отсюда видно, что достаточно ограничиться случаем невырожденного пространства E. Пусть $E = E_h \dotplus E_a$ – разложение Витта такого пространства. Тогда E_h – максимальное гиперболическое подпространство. Действительно, если $H \subset E$ – гиперболическое подпространство, содержащее E_h, то $H = E_h \dotplus (H \cap E_a)$. Подпространство $H \cap E_a$ анизотропно и является ортогональным дополнением в H к его гиперболическому подпространству E_h. В то же время ясно, что в H найдется гиперболическое подпространство H_1, такое, что $\dim H_1 = \dim E_h$ и что $H_1^{\perp}$ гиперболично. Поскольку E_h и H_1 изометричны, $H_1^{\perp}$ и $H \cap E_a$ изометричны в силу следствия 3, что (если они ненулевые.) невозможно. Значит, $H \cap E_a = \{0\}$ и $H = E_h$. Если теперь $E = E_h' \dotplus E_a'$ – другое разложение Витта, то в силу следствия 4 существует изометрия пространства E на себя, переводящая E_h в E_h'. По лемме 6 $E_a = E_h^{\perp}$, $E_a' = E_h'^{\perp}$, так что E_a переходит при этом в E_a'.

Если E – ортогональное пространство, то все изометрические отображения $E \to E$ образуют группу, обозначаемую $O(E)$; ее называют /обычно в невырожденном случае/ <u>ортогональной группой</u> пространства E. Термин <u>ортогональная группа</u> часто употребляется также по отношению к ортогональной группе евклидова пространства. Ортогональная группа n-мерного евклидова пространства обозначается через $O(n)$. Ортогональная группа псевдоевклидова пространства сигнатуры (p,q) называется <u>псевдоортогональной группой сигнатуры (p,q)</u> и обозначается $O(p,q)$. В частности, $O(n,0) = O(n)$. Группа $O(1,3)$ /или изоморфная ей $O(3,1)$/ называется <u>группой Лоренца</u>.

Остановимся теперь коротко на знакопеременных билинейных формах, теория которых оказывается более простой, чем для симметрических форм.

<u>Теорема 8</u>. Пусть B – знакопеременная билинейная форма в векторном пространстве V конечной размерности над произвольным полем K. Тогда в V существует базис $v_1, \ldots, v_n$, в котором матрица формы имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{|cc|} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array} \ \ddots \ \begin{array}{|cc|} \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array}}^{k} & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

При этом $\operatorname{rg}\beta = 2k$ и $\operatorname{Ker}\beta = \mathcal{L}(v_{2k+1},\dots,v_n)$.

Доказательство. Пусть $v_1,\dots,v_n$ - произвольный базис в V и пусть (b_{ij}) - матрица формы β в этом базисе. Мы можем считать, что $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i \neq j$. Переставляя векторы базиса, добиваемся того, чтобы $b_{12} \neq 0$. Умножая v_1 на подходящий скаляр, получим b_{12} = I. Положим теперь

$$\tilde{v}_i = v_i + a_i v_1 + b_i v_2 \qquad (i = 3,\dots,n),$$

где a_i, $b_i \in K$ находятся из условий $\beta(v_1, \tilde{v}_i) = \beta(v_2, \tilde{v}_i) = 0$. Очевидно, достаточно взять $a_i = b_{2i}$, $b_i = -a_{1i}$. Получили новый базис $v_1, v_2, \tilde{v}_3,\dots,\tilde{v}_n$, в котором матрица формы β имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \tilde{B} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

То же рассуждение можно применить к форме $\beta | L$, где $L = \mathcal{L}(\tilde{v}_3,\dots,\tilde{v}_n)$ и к базису $\tilde{v}_3,\dots,\tilde{v}_n$ пространства L. Повторяя этот процесс, мы придем, очевидно, к нужному результату.

<u>Замечание</u>. Пусть $v^1,\dots,v^n$ - базис в V^*, двойственный к базису, построенному в теореме 8. Тогда

$$\beta = v^1 \wedge v^2 + v^3 \wedge v^4 + \dots + v^{2k-1} \wedge v^{2k}.$$

Векторное пространство V, снабженное знакопеременной билинейной формой β, часто называют <u>симплектическим пространством.</u> Так же, как для ортогональных пространств, определяются изометрические преобразования симплектического пространства, которые, очевидно, составляют группу. Если форма β невырождена, то группа изометрических преобразований симплектического пространства размерности $2n$ называется <u>симплектической группой</u> и обозначается через $Sp_{2n}(K)$ /из теоремы 8 следует, что с точностью до изоморфизма симплектическая группа полностью определяется размерностью невырожденного симплектического пространства и полем K /.

§ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мы будем рассматривать n-мерное евклидово пространство E со скалярным произведением $(\ ,\ )$. Наличие скалярного произведения позволяет выделить некоторые специальные классы линейных преобразований пространства E. С одним из таких классов мы уже познакомились в § 7. А именно, линейное преобразование $f \in \operatorname{End} E$ называется <u>ортогональным</u> /или изометрическим/, если $(f(x), f(y)) = (x, y)$ для любых $x, y \in E$ или, что равносильно, если $|f(x)| = |x|$ для любых $x \in E$. Если f ортогонально, то $\operatorname{Ker} f = 0$, так что f обратимо. Легко проверить, что ортогональные преобразования составляют группу, которую мы обозначили через $O(n)$.

Важным примером евклидова пространства является пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Оно называется <u>стандартным n-мерным евклидовым пространством</u>. Как мы видели в § 7, всякое n-мерное евклидово пространство изометрично стандартному.

Пусть $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Матрица C называется <u>ортогональной</u>, если ее столбцы составляют ортонормированный базис стандартного пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. если

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki} c_{kj} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \qquad (i, j = 1, \dots, n).$$

<u>Лемма I</u>. Пусть $f \in \operatorname{End} E$ и $v_1, \dots, v_n$ - ортонормированный базис пространства E. Преобразование f ортогонально тогда и только тогда, когда его матрица A_f в данном базисе ортогональна.

Доказательство получается непосредственной проверкой.

<u>Лемма 2</u>. Ортогональность матрицы C равносильна любому из следующих ее свойств:

1/ $C^T C = E$;

2/ $C^T = C^{-1}$;

3/ $C C^T = E$;

4/ Строки матрицы составляют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$;

Для ортогональной матрицы C имеем $\det C = \pm 1$.

Доказательство. Из определения умножения матриц непосредственно видно, что ортогональность равносильна свойству 1/ и что 3/ $\Leftrightarrow$ 4/. Из 1/ следует, что $(\det C)^2 = 1$, т.е. $\det C = \pm 1$. Значит, существует C^{-1}, откуда видно, что 1/ $\Leftrightarrow$ 2/. Аналогично, 2/ $\Leftrightarrow$ 3/.

Легко доказывается также

<u>Лемма 3</u>. Матрица перехода от ортонормированного базиса к некоторому новому базису евклидова пространства ортогональна тогда и только тогда, когда новый базис также ортонормирован.

Пример I. Непосредственно из определения легко следует, что ортогональные матрицы порядка 2 имеют следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (\det C = 1) \ ; \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (\det C = -1).$$

Если $\det C = 1$, то C - матрица поворота плоскости r_φ. Если же $\det C = -1$, то легко проверить, что C - матрица симметрии относительно некоторой прямой. Отсюда и из леммы I следует, что всякое ортогональное преобразование плоскости есть либо поворот, либо симметрия относительно прямой.

Теперь мы выясним строение ортогонального преобразования n-мерного евклидова пространства при любом n. Для этого понадобятся следующие леммы.

Лемма 4. Собственные значения ортогонального преобразования равны ± 1.

Лемма 5. Если $W \subset E$ - подпространство, инвариантное относительно ортогонального преобразования f, то $W^\perp$ также инвариантно относительно f.

Доказательство. Отображение $f|W$ пространства W в себя изометрично и потому обратимо. В частности, $f(W) = W$. Произвольный $y \in W$ представим в виде $y = f(z)$, где $z \in W$. Теперь для произвольного $x \in W^\perp$ имеем $(f(x), y) = (f(x), f(z)) = (x, z) = 0$, т.е. $f(x) \in W^\perp$.

Теорема I. Если $f \in O(n)$, то в пространстве E существует такой ортонормированный базис $v_1, \dots, v_n$, что матрица A_f имеет вид

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix}} & \\ & 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_s & -\sin\varphi_s \\ \sin\varphi_s & \cos\varphi_s \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

где φ_j не кратны π.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть теорема доказана для пространств размерности $< n$. Согласно теореме 6.8, в E существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство W. В силу леммы 7.6 $E = W \dotplus W^\perp$, а по лемме 5 $W^\perp$ также инвариантно. Поскольку $\dim W^\perp < n$, к $W^\perp$ применимо предположение индукции, т.е. там существует базис $v_1, \dots, v_{n-1}$ или $v_1, \dots, v_{n-2}$ соответственно, в котором матрица $A_{f|W^\perp}$ имеет искомый вид. Выберем в W ортонормированный базис v_n или v_{n-1}, v_n. В первом случае по лемме 4 $A_{f|W} = (\pm 1)$, а во втором случае можно считать, что в W нет собственных векторов. Тогда, в силу примера I, $A_{f|W} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, где $\varphi \neq k\pi$.

В базисе $v_1, \ldots, v_n$ матрица A_f имеет, очевидно, искомый вид с точностью /в первом случае/ до перестановки клеток.

<u>Следствие I</u>. Всякое ортогональное преобразование трехмерного евклидова пространства является либо поворотом вокруг некоторой оси, либо поворотом вокруг оси с последующим отражением в плоскости, ортогональной к этой оси.

Пусть теперь E и F два евклидовых пространства и пусть $f: E \to F$ - некоторое линейное отображение. Тогда определено двойственное линейное отображение / см. /5.6// $f^*: F^* \to E^*$. С другой стороны, скалярные произведения в E и F определяют естественные изоморфизмы $\lambda_E : E \to E^*$ и $\lambda_F : F \to F^*$ /см. § 7/. Поэтому возникает линейное отображение $f^T = \lambda_E^{-1} \circ f^* \circ \lambda_F$, делающее коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f^T} & E \\ {\scriptstyle \lambda_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_E} \\ F^* & \xrightarrow{f^*} & E^* \end{array}$$

Отображение f^T называется <u>сопряженным</u> к отображению f. Преобразование f^T обладает следующим /полностью определяющим его/ свойством:

$$(f^T(y), x) = (y, f(x)) \qquad (x \in E,\ y \in F).$$

Действительно, $(f^T(y), x) = \lambda_E(f^T(y))(x) = f^*(\lambda_F(y))(x) = \lambda_F(y)(f(x)) = (y, f(x))$.

<u>Пример 2</u>. Преобразование $f \in \operatorname{End} E$ ортогонально тогда и только тогда, когда $f^T = f^{-1}$.

Непосредственно проверяется

<u>Лемма 6</u>. В ортонормированных базисах пространств E и F имеем $A_{f^T} = A_f^T$.

<u>Лемма 7</u>. Имеем $(f \circ g)^T = g^T \circ f^T$, $(f^{-1})^T = (f^T)^{-1}$, если f обратимо.

Доказательство. Легко следует из леммы 5.6 при $k = I$.

Линейное преобразование f евклидова пространства E называется <u>симметрическим</u> /или <u>самосопряженным</u>/, если $f^T = f$. Из леммы 6 следует, что f симметрично тогда и только тогда, когда матрица A_f симметрична в некотором ортонормированном базисе пространства E. Симметричность преобразования f по определению равносильна свойству

$$(f(y), x) = (y, f(x)) \qquad (x, y \in E).$$

Мы изучим теперь строение симметрических преобразований, для чего нам потребуется несколько лемм.

<u>Лемма 8</u>. Если $f \in \operatorname{End} E$ - симметрическое преобразование, то характеристический многочлен p_f имеет над $\mathbb{C}$ только действительные корни.

Доказательство. Предположим, что наше утверждение неверно. Из теоремы 6.8 и ее доказательства следует, что всякому недействительному корню $\lambda = \mu + i\nu$ многочлена p_f соответствует инвариантная плоскость $\mathcal{L}(u,v) \subset E$, такая, что

$$f(u) = \mu u - \nu v,$$
$$f(v) = \nu u + \mu v.$$

Имеем $(f(u), v) = \mu(u,v) - \nu(v,v)$, $(u, f(v)) = \nu(u,u) + \mu(u,v)$, откуда $\nu((u,u) + (v,v)) = 0$. Поскольку $\nu \neq 0$, отсюда следует, что $u = v = 0$, и мы пришли к противоречию.

Лемма 9. Если $\lambda \neq \mu$, то $E_\lambda \perp E_\mu$.

Доказательство. Если $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$, то $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \mu y$, откуда $(f(x), y) = \lambda(x,y)$, $(x, f(y)) = \mu(x,y)$. Значит, $(\lambda - \mu)(x,y) = 0$ и $(x,y) = 0$.

Лемма 10. Если подпространство $W \subset E$ инвариантно относительно симметрического преобразования f, то и $W^\perp$ инвариантно.

Теорема 2. Линейное преобразование $f \in \operatorname{End} E$ является симметрическим тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства E, в котором A_f – диагональная матрица.

Доказательство. Достаточность очевидна, поскольку диагональная матрица симметрична. Докажем необходимость. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ все различные действительные корни многочлена p_f. Тогда E содержит инвариантное относительно f подпространство $W = \sum_{i=1}^{t} E_{\lambda_i}$ /см. лемму 6.4/. По лемме 7.6 $E = W \dotplus W^\perp$. Если $W \neq E$, то $W^\perp \neq 0$. В силу леммы 10 подпространство $W^\perp$ инвариантно относительно f. Применяя к $f|W^\perp$ лемму 8, видим, что в $W^\perp$ существует вектор, собственный относительно $f|W^\perp$ и, значит, относительно f. Но все собственные векторы преобразования f содержатся в W, что приводит к противоречию. Итак, $E = W = \sum_{i=1}^{t} E_{\lambda_i}$. Выбрав теперь в каждом E_{λ_i} ортонормированный базис и объединив эти базисы, мы получим, в силу леммы 9, ортонормированный базис из собственных векторов, в котором A_f будет диагональной матрицей.

Теперь мы хотим вывести из теоремы 2 важное следствие, относящееся к симметрическим билинейным формам. Для этого мы установим важную связь, существующую в евклидовом пространстве между билинейными формами и линейными преобразованиями.

Пусть $\lambda : E \to E^*$ – изоморфизм, определяемый скалярным произведением. Каждому линейному преобразованию $f \in \operatorname{End} E$ отвечает линейное отображение $\lambda \circ f : E \to E^*$, причем соответствие $f \mapsto \lambda \circ f$ есть, как легко видеть, изоморфизм пространства $\operatorname{End} E$ на $\operatorname{Hom}(E, E^*)$. В то же время линейные отображения $E \to E^*$ находятся в естественном соответствии с билинейными формами на E /см. § 7/. Таким образом, мы получили естественный изоморфизм $\operatorname{End} E \to \mathcal{L}_2(E)$.

Легко видеть, что билинейная форма β, соответствующая преобразованию $f \in \mathrm{End}\, E$ при этом изоморфизме, имеет вид

$$\beta(x, y) = (f(x); y) \qquad (x, y \in E).$$

Отсюда видно, что f симметрично тогда и только тогда, когда β симметрична.

Лемма II. В произвольном ортонормированном базисе пространства E матрица формы β имеет вид $B = A_f^T$. Если f симметрично, то $B = A_f$.

Доказательство. Если $v_1, \ldots, v_n$ – наш базис, а $A_f = (a_{ij})$, то $\beta(v_i, v_j) = (f(v_i), v_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k, v_j\right) = a_{ji}$.

Теорема 3. Для любой симметрической билинейной формы β в евклидовом пространстве E существует ортонормированный в E базис, ортогональный для β.

Доказательство. Пусть f – симметрическое линейное преобразование, соответствующее форме β при установленном выше изоморфизме. По теореме 2 существует ортонормированный базис, в котором A_f диагональна. Но по лемме II матрица формы $B = A_f$ также диагональна.

Заметим, что в базисе, построенном в теореме 3, диагональные элементы матрицы B равны собственным значениям преобразования f.

Симметрическое линейное преобразование $f \in \mathrm{End}\, E$ называется положительно определенным, если соответствующая квадратичная форма положительно определена, т.е. если $(f(x), x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Из теоремы 3 и последующего замечания вытекает, что f положительно определено тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны. Мы докажем теперь теорему об извлечении квадратного корня из положительно определенных преобразований.

Теорема 4. Если f – положительно определенное симметрическое преобразование, то существует, и притом единственное, положительно определенное симметрическое преобразование g, для которого $g^2 = f$.

Доказательство. Докажем сначала единственность. Пусть $g^2 = f$. Рассмотрим для f и g разложения на собственные подпространства, существующие в силу теоремы 2:

для f : $E = \sum_{i=1}^{r} {}^{\cdot}\, E_{\lambda_i}$; для g : $E = \sum_{j=1}^{s} {}^{\cdot}\, \tilde{E}_{\mu_j}$.

Мы хотим показать, что $r = s$ и что после перенумерации имеем $\lambda_i = \mu_i^2$ и $E_{\lambda_i} = \tilde{E}_{\mu_i}$. Тогда μ_i будут определены однозначно, как положительные квадратные корни из λ_i, и преобразование g будет однозначно определяться по f. Ясно, что если $x \in \tilde{E}_{\mu_j}$, то $g(x) = \mu_j x$ и потому $f(x) = \mu_j^2 x$, так что $\tilde{E}_{\mu_j} \subseteq E_{\mu_j^2}$. В силу положительности собственных значений различные $\tilde{E}_{\mu_j}$ будут при этом содержаться в различных E_{λ_i}, откуда легко следует совпадение разложений.

Теперь ясно, как доказать существование преобразования g. Используя указанное выше собственное разложение для f, положим

$$g(x_1 + \ldots + x_i) = \sum_{i=1} \sqrt{\lambda_i}\, x_i ,$$

где $x_i \in E_{\lambda_i}$.

В заключение этого параграфа докажем важную теорему о полярном разложении произвольного невырожденного преобразования евклидова пространства.

Теорема 5. Любое преобразование $f \in GL(E)$ единственным образом представляется в виде $f = up$, где u – ортогональное, а p – положительно определенное симметрическое преобразования.

Доказательство. Заметим сначала, что если $f \in GL(E)$, то $f^T f$ – положительно определенное симметрическое преобразование. Действительно, его симметричность сразу следует из леммы 7. Далее, для любого $x \in E$ имеем $(f^T f(x), x) = (f(x), f(x)) \geqslant 0$. Если же $(f^T f(x), x) = 0$, то $f(x) = 0$ и $x = 0$ в силу обратимости преобразования f.

Теперь докажем единственность полярного разложения. Пусть $f = up$, где u ортогонально, а p симметрично и положительно определено. Тогда по лемме 7 $f^T = p^T u^T = p u^{-1}$ и $f^T f = p u^{-1} u p = p^2$. Из теоремы 4 следует, что p однозначно определяется по $f^T f$ и, значит, по f. Преобразование $u = f p^{-1}$ также определено однозначно.

Докажем существование. Применяя теорему 4 к $f^T f$, мы можем построить такое симметрическое положительно определенное преобразование p, что $p^2 = f^T f$. Положим $u = f p^{-1}$. Тогда $u^T = p^{-1} f^T$, откуда $u^T u = p^{-1} f^T f p^{-1} = e$. Значит, u ортогонально /см. лемму 2/ и $f = up$.

Заметим без доказательства, что теорему 5 можно обобщить и на необратимые преобразования f. При этом p надо выбирать симметрическим и неотрицательным /т.е. $(p(x), x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$ /, p определено однозначно, но для u единственность уже не имеет места.

§ 9. ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Функция $l:V\to\mathbb{C}$ называется полулинейной формой на V, если $l(x+y)=l(x)+l(y)$ и $l(cx)=\bar{c}\,l(x)$ для всех $c\in\mathbb{C}$, $x,y\in V$. Полулинейные формы образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$, которое мы обозначим через $\bar{V}^*$.

Функция $\beta(x,y)$ на $V\times V$ называется полуторалинейной формой, если β - линейная форма по x и полулинейная форма по y. Полуторалинейные формы на V образуют векторное пространство $L_{3/2}(V)$ над $\mathbb{C}$. Полуторалинейная форма β определяет линейное отображение $\lambda: V\to\bar{V}^*$, сопоставляющее каждому $x\in V$ полулинейную форму $l_x(y)=\beta(x,y)$. Ядро и ранг отображения λ называются ядром $\operatorname{Ker}\beta$ и рангом $\operatorname{rg}\beta$ формы β. Форма β называется невырожденной, если $\operatorname{rg}\beta=\dim V$, т.е. если $\operatorname{Ker}\beta=0$ или если λ инъективно.

Пусть $v_1,\dots,v_n$ - базис пространства V. Матрицей полуторалинейной формы β на V в этом базисе называется матрица $B=(b_{ij})$, где $b_{ij}=\beta(v_i,v_j)$. Имеем

$$\beta(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i\bar{y}_j, \qquad /I/$$

где $x=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$, $y=\sum_{j=1}^{n}y_jv_j$. Таким образом, B полностью определяет форму β. Отображение $\beta\mapsto B$ есть изоморфизм пространства $L_{3/2}(V)$ на $M_n(\mathbb{C})$. Имеем $\operatorname{rg}\beta=\operatorname{rg}B$. Справедлив аналог леммы 7.4: при изменении базиса матрица B заменяется матрицей $\tilde{B}=C^T B\bar{C}$, где C - матрица перехода к новому базису.

Полуторалинейная форма β называется эрмитовой, если

$$\beta(y,x)=\overline{\beta(x,y)} \qquad (x,y\in V),$$

и косоэрмитовой, если

$$\beta(y,x)=-\overline{\beta(x,y)} \qquad (x,y\in V).$$

Множества эрмитовых и косоэрмитовых форм на V обозначим через $L^h_{3/2}(V)$ и $L^{sh}_{3/2}(V)$ соответственно. Легко видеть, что $L^h_{3/2}$ и $L^{sh}_{3/2}$ - вещественные подпространства в $L_{3/2}(V)$, причем $L^{sh}_{3/2}=iL^h_{3/2}$ и

$$L_{3/2}(V)=L^h_{3/2}(V)\dotplus L^{sh}_{3/2}(V).$$

Квадратная матрица B над $\mathbb{C}$ называется эрмитовой /косоэрмитовой/, если $B^T=\bar{B}$ /соответственно $B^T=-\bar{B}$/, т.е. если ее элементы b_{ij} удовлетворяют условиям $b_{ji}=\bar{b}_{ij}$ /соответственно $b_{ji}=-\bar{b}_{ij}$/. Используя формулу /I/, легко проверить, что полуторалинейная форма эрмитова /косоэрмитова/ тогда и только тогда, когда ее матрица в некотором базисе эрмитова /косоэрмитова/.

Обозначим через $V_{\mathbb{R}}$ комплексное векторное пространство V

рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Умножение на i есть линейное преобразование $I(x)=ix$ пространства $V_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющее условию $I^2=-e$. Всякая полуторалинейная форма на V является очевидно, билинейной формой на $V_{\mathbb{R}}$ с комплексными значениями, т.е. представляется в виде

$$\beta(x,y) = a(x,y) + i\,b(x,y), \qquad /2/$$

где $a, b \in L_2(V_{\mathbb{R}})$.

Лемма I. Пусть $a, b \in L_2(V_{\mathbb{R}})$. Функция β, заданная формулой /2/, является полуторалинейной формой на V тогда и только тогда, когда

$$a(Ix, Iy) = a(x,y), \qquad /3/$$

$$b(x, y) = a(x, Iy) \qquad /4/$$

Доказательство. Полуторалинейность функции β равносильна равенствам $\beta(ix,y)=i\beta(x,y)$, $\beta(x,iy)=-i\beta(x,y)$. Записывая их в явном виде, получаем

$$a(Ix,y) + i\,b(Ix,y) = ia(x,y) - b(x,y),$$

$$a(x,Iy) + i\,b(x,Iy) = -ia(x,y) + b(x,y). \qquad /5/$$

Складывая равенства /5/, получаем $a(Ix,y)+a(x,Iy)=0$, что равносильно свойству /3/. Второе из равенств /5/ влечет за собой /4/. Обратно, из /3/ и /4/ легко вывести /5/.

Следствие I. Соответствие $\beta \mapsto a$ есть изоморфизм пространства $L_{3/2}(V)_{\mathbb{R}}$ на $\{a \in L_2(V_{\mathbb{R}}) \mid a(Ix, Iy) = a(x,y)\}$.

Лемма 2. Полуторалинейная форма β, представленная в виде /2/, эрмитова тогда и только тогда, когда a симметрична или когда b кососимметрична.

Непосредственно вытекает из определений.

Пример I. Пусть $V=\mathbb{C}$. При известной интерпретации комплексных чисел как векторов евклидовой плоскости имеем $V_{\mathbb{R}}=E^2$. Легко проверить, что эрмитова форма $\beta(x,y)=x\bar{y}$ представляется в виде

$$\beta(x,y) = (x,y) + i(-\sigma(x,y)),$$

где σ - ориентированная площадь /см. § 5/. При этом $I = \tau_{\pi/2}$.

Квадратичная форма q на $V_{\mathbb{R}}$ называется эрмитовой квадратичной формой на пространстве V, если $q(Ix)=q(x)$ $(x \in V_{\mathbb{R}})$. Например, если β - эрмитова полуторалинейная форма на V, то $q(x)=\beta(x,x)$ - эрмитова квадратичная форма. Действительно, из леммы 2 следует, что $q(x)=a(x,x)$ - квадратичная форма на $V_{\mathbb{R}}$, а из леммы I следует ее эрмитовость.

Лемма 3. Для любой эрмитвой квадратичной формы q на V существует такая эрмитова полуторалинейная форма β, что $q(x) = \beta(x,x)$, причем β единственна.

Доказательство. Если $q(x)=\beta(x,x)$, где β - эрмитова форма, то $q(x)=a(x,x)$. Поскольку a симметрична, из леммы 7.5 следует, что a определена однозначно. В силу леммы I b также однозначно определена. Если теперь q - произвольная эрмитова квадратичная форма, то по лемме 7.5 существует единственная форма $a \in L_2^S(V_{\mathbb{R}})$, для которой $q(x)=a(x,x)$. Из единственности этой формы следует, что $a(Ix,Iy)=a(x,y)$. Полагая $b(x,y)=a(x,Iy)$, видим из лемм I и 2, что $\beta = a+ib$ - искомая эрмитова полуторалинейная форма.

Комплексным евклидовым /или унитарным/ пространством называется комплексное векторное пространство V, снабженное такой эрмитовой полуторалинейной формой (x,y), что соответствующая эрмитова квадратичная форма положительно определена, т. е. $(x,x)>0$ для всех $x \neq 0$. Форма (x,y) называется скалярным произведением, а число $|x|=\sqrt{(x,x)}$ - длиной вектора x. Имеем $|cx|=|c|\,|x|$ для любого $c \in \mathbb{C}$.

Примеры. 2. Стандартное n-мерное комплексное евклидово пространство - пространство $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}. \qquad /6/$$

3. Пространство всех комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Пусть β - произвольная эрмитова полуторалинейная форма в комплексном векторном пространстве V. Векторы x,y называются ортогональными относительно β, если $\beta(x,y)=0$. Базис пространства V называется ортогональным, если все его векторы попарно ортогональны, т.е. если матрица B формы β в этом базисе диагональна. Базис называется ортонормированным относительно β, если

$$B = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{p} & & & \\ & \underbrace{-1 \; \ddots \; -1}_{q} & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}.$$

Если $v_1,\ldots,v_n$ - ортонормированный базис, то в координатах в этом базисе β записывается в виде

$$\beta(x,y) = x_1\overline{y_1}+\ldots+x_p\overline{y_p}-x_{p+1}\overline{y_{p+1}}-\ldots-x_{p+q}\overline{y_{p+q}}.$$

Легко видеть, что $p+q=\operatorname{rg}\beta$ и $\operatorname{Ker}\beta = \mathcal{L}(v_{p+q+1},\ldots,v_n)$.

Теорема I. Для любой эрмитовой формы β в конечномерном комплексном векторном пространстве V существует ортонормированный базис. Матрица формы β в ортонормированном базисе не зависит от выбора этого базиса.

Доказательство совершенно аналогично доказательству соответствующих утверждений для симметрических билинейных форм в вещественном векторном пространстве.

Из теоремы I следует, в частности, что в любом конечномерном комплексном евклидовом пространстве V существует ортонормированный базис. В таком базисе скалярное произведение имеет вид

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i ,$$

где $n = \dim V$. Любое n-мерное комплексное евклидово пространство изоморфно стандартному пространству $\mathbb{C}^n$ из примера 2.

Теперь мы перейдем к изучению линейных преобразований в комплексном евклидовом пространстве. Будем считать для простоты, что оно конечномерно.

Пусть H – комплексное евклидово пространство размерности n. Скалярное произведение определяет отображение $\rho: H \to H^*$, сопоставляющее каждому $x \in H$ линейную форму $\rho_x(y) = (y, x)$ на H. Отображение ρ является изоморфизмом над $\mathbb{R}$ и полулинейно над $\mathbb{C}$, т.е. $\rho(cx) = \bar{c}\rho(x)$ $(c \in \mathbb{C})$. Для любого линейного отображения f комплексного евклидова пространства H_1 в комплексное евклидово пространство H_2 определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{f} & H_2 \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ H_1^* & \xleftarrow{f^T} & H_2^* \end{array} ,$$

где ρ_1, ρ_2 – определенные выше полулинейные изоморфизмы, а $f^T = \rho_1 f \rho_2^{-1}$. Ясно, что f^T – линейное над $\mathbb{C}$ отображение. Оно называется сопряженным к отображению f и обладает следующим /полностью определяющим его/ свойством:

$$(f^T(x), y) = (x, f(y)) \qquad (x \in H_2,\ y \in H_1).$$

Аналогично лемме 8.6, в ортонормированных базисах имеем $A_{f^T} = \bar{A}_f^T$, где черта над матрицей означает, что все ее элементы подвергаются комплексному сопряжению.

Справедливы следующие соотношения:

$$(f^T)^T = f, \quad (fg)^T = g^T f^T, \quad (f^{-1})^T = (f^T)^{-1}.$$

Будем теперь считать, что $f \in \operatorname{End} H$. Преобразование f называется эрмитовым /или самосопряженным/, если $f^T = f$, т.е. если

$$(f(x), y) = (x, f(y)) \qquad (x, y \in H).$$

Очевидно, f эрмитово тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе матрица A_f эрмитова.

Преобразование $f \in \operatorname{End} H$ называется унитарным, если $f^T = f^{-1}$, т.е. если

$$(f(x), f(y)) = (x, y) \qquad (x, y \in H).$$

Из леммы 3 следует, что для унитарности линейного преобразования f достаточно, чтобы $|f(x)| = |x|$ для всех $x \in H$.

Матрица $C \in M_n(\mathbb{C})$ называется унитарной, если ее столбцы составляют ортонормированный базис стандартного комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$. Это свойство равносильно соотношению $\overline{C^T} = C^{-1}$ /ср. лемму 8.2/. Линейное преобразование f унитарно тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе матрица A_f унитарна. Унитарные преобразования пространства H образуют группу, которая изоморфна группе всех унитарных матриц порядка n и обозначается через $\mathcal{U}(n)$.

Преобразование $f \in \operatorname{End} H$ называется нормальным, если $ff^T = f^Tf$. Очевидно, все эрмитовы и унитарные преобразования нормальны. Мы дадим далее простую характеризацию нормальных преобразований.

Лемма 4. Для любого подпространства $F \subseteq H$ множество $F^\perp = \{x \in H \mid (x,y) = 0 \ \forall y \in F\}$ также является подпространством, причем

$$H = F \dotplus F^\perp.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.6. Подпространство $F^\perp$ называется ортогональным дополнением к F.

Лемма 5. Пусть F – подпространство в H, инвариантное относительно $f \in \operatorname{End} H$. Тогда $F^\perp$ инвариантно относительно f^T.

Доказательство. Если $x \in F^\perp$, то для любого $y \in F$ имеем $(y, f^T(x)) = (f(y), x) = 0$. Значит, $f^T(x) \in F^\perp$.

Лемма 6. Если $f, g \in \operatorname{End} V$ и $fg = gf$, то f и g обладают в V общим собственным вектором.

Доказательство. Поскольку мы рассматриваем конечномерное пространство V над $\mathbb{C}$, f обладает собственным вектором /см. следствие 6.I/. Пусть V_λ – некоторое собственное подпространство для f. Тогда V_λ инвариантно относительно g. Действительно, для любого $x \in V_\lambda$ имеем $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$. Применяя следствие 6.I к преобразованию $g \mid V_\lambda$, видим, что g обладает в V_λ собственным вектором.

Теорема 2. Преобразование $f \in \operatorname{End} H$ нормально тогда и только тогда, когда для f существует ортонормированный базис пространства H, состоящий из собственных векторов. В этом базисе

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A_{f^T} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Если в некотором ортонормированном базисе матрица A_f диагональна, то $A_{f^T} = \overline{A_f}$ также диагональна, откуда $A_f A_{f^T} = A_{f^T} A_f$ и $ff^T = f^Tf$. Обратно, пусть f нормально. Будем доказывать наше утверждение индукцией по $n = \dim V$. Для $n = 1$ оно очевидно. Пусть оно доказано для пространств размерности $n-1$, и пусть $n = \dim H$. Согласно лемме 6, в H существует вектор e_1, собственный относительно f и f^T. Пусть $F = \mathcal{L}(v_1)$. По лемме имеем $H = F \dotplus F^{\perp}$, причем в силу леммы 5 подпространство $F^{\perp}$ инвариантно относительно f и f^T. Очевидно, $f|F^{\perp}$ нормально, так что к этому преобразованию применимо предположение индукции. Выберем в $F^{\perp}$ ортонормированный базис $v_2, \ldots, v_n$, состоящий из векторов, собственных относительно f. Мы можем считать, что $|v_1| = 1$. Тогда ясно, что $v_1, \ldots, v_n$ – базис пространства H, состоящий из собственных векторов и ортонормированный.

Следствие I. Преобразование $f \in End\, H$ эрмитово тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе матрица A_f является вещественной диагональной.

Следствие 2. Преобразование $f \in End\, H$ унитарно тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе матрица A_f является диагональной и имеет на главной диагонали числа, по модулю равные I.

В конечномерном комплексном евклидовом пространстве H имеется естественное биективное соответствие между линейными преобразованиями и полуторалинейными формами /ср. § 8/. А именно, если сопоставить преобразованию $f \in End\, H$ форму $\beta \in L_{3/2}(H)$, заданную формулой

$$\beta(x, y) = (x, f(y)) \qquad (x, y \in H),$$

то получится изоморфизм пространства $End\, H$ на $L_{3/2}(H)$. При этом в любом ортонормированном базисе матрица A_f совпадает с матрицей формы β. Эрмитовым линейным преобразованиям, очевидно, соответствуют в точности эрмитовы полуторалинейные формы. Отсюда и из следствия I вытекает

Теорема 3. Если β – эрмитова полуторалинейная форма в H, то в H существует ортонормированный базис, ортогональный относительно β.

На основе вышеуказанного соответствия можно определить положительно определенные эрмитовы линейные преобразования. Справедлива теорема о полярном разложении, формулировка и доказательство которой совершенно аналогичны вещественному случаю /см. теорему 8.5/.

§ IO. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Пусть U, V, W – три векторных пространства над K. Отображение $\beta : U \times V \to W$ называется <u>билинейным</u>, если для любого фиксированного $x \in U$ отображение $y \mapsto \beta(x,y)$ пространства V в W линейно и для любого фиксированного $y \in V$ отображение $x \mapsto \beta(x,y)$ пространства U в W также линейно. Аналогично определяются p-линейные отображения $V_1 \times \ldots \times V_p \to W$.

Пусть V, W – векторные пространства над K. <u>Тензорным произведением</u> пространств V и W называется векторное пространство P над K вместе с билинейным отображением $\pi : V \times W \to P$, обладающим следующим свойством универсальности: для любого билинейного отображения $\beta : V \times W \to U$ существует единственное линейное отображение $\tilde{\beta} : P \to U$, такое, что $\beta = \tilde{\beta} \circ \pi$.

<u>Теорема I</u>. Тензорное произведение пространств V и W единственно /если оно существует/. Точнее, если P_1, P_2 – тензорные произведения и $\pi_i : V \times W \to P_i$ / i = I,2/ – соответствующие билинейные отображения, то существует такой изоморфизм $\gamma : P_1 \to P_2$, что $\pi_2 = \gamma \circ \pi_1$.

<u>Доказательство</u>. Как следует из определения, существуют линейные отображения $\tilde{\pi}_1 : P_2 \to P_1$ и $\tilde{\pi}_2 : P_1 \to P_2$, что $\pi_1 = \tilde{\pi}_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 = \tilde{\pi}_2 \circ \pi_1$. Тогда $\pi_1 = (\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2) \circ \pi_1$ и $\pi_2 = (\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1) \circ \pi_2$ [illegible] $\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2 = e$ и $\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1 = e$, поскольку $\pi_1 = e \circ \pi_1$ и $\pi_2 = e \circ \pi_2$ и поскольку соответствующие π_1 и π_2 билинейные отображения [illegible] венны.

Прежде чем доказывать существование, остановимся на следующей конструкции. Пусть M – произвольное множество и K – поле. Обозначим через $K^{(M)}$ множество всех семейств $(x_m)_{m \in M}$ элементов поля K с индексами из M, в которых все x_m, кроме конечного числа, равны 0. Множество $K^{(M)}$ очевидным образом превращается в векторное пространство над полем K. В случае, когда $M = \{1, \ldots, n\}$, это пространство совпадает с K^n. Пространство $K^{(M)}$ есть M-я прямая сумма векторных пространств, изоморфных K /см. § 4/. Иногда удобно бывает отождествить элемент $m \in M$ с вектором $(x_i)_{i \in M}$, таким, что $x_m = 1$, $x_i = 0$ для $i \neq m$. Тогда любой вектор $x = (x_m)_{m \in M}$ записывается в виде формально бесконечной суммы $x = \sum_{m \in M} x_m m$.

<u>Лемма I</u>. Пусть M – множество и V – векторное пространство над K. Для любого отображения $\varphi : M \to V$ существует единственное линейное отображение $\hat{\varphi} : K^{(M)} \to V$, продолжающее φ.

Доказательство. Очевидно, $\hat{\varphi}$ имеет вид $\hat{\varphi}\left(\sum_{m \in M} x_m m\right)$ [illegible]

Теорема 2. Тензорное произведение любых пространств V и W существует.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{P} = K^{(V\times W)}$ подпространство Q, являющееся линейной оболочкой векторов вида

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y),\\&(x, y_1+y_2) - (x, y_1) - (x, y_2),\\&(cx, y) - c(x,y),\\&(x, cy) - c(x,y),\end{aligned} \qquad /I/$$

где $x, x_i \in V, y, y_i \in W$, $c \in K$. Положим $P = \mathcal{P}/Q$ и определим отображение $\pi: V\times W \to P$ формулой $\pi(x,y) = (x,y) + Q$. Будем писать $\pi(x,y) = x\otimes y$; очевидно,

$$(x_1+x_2)\otimes y = x_1\otimes y + x_2\otimes y, \quad x\otimes(y_1+y_2) = x\otimes y_1 + x\otimes y_2,$$
$$(cx)\otimes y = (x\otimes cy) = c(x\otimes y),$$

т.е. π билинейно. Докажем теперь, что P и π удовлетворяют определению тензорного произведения.

Пусть $\beta: V\times W \to U$ билинейное отображение. По лемме I β продолжается до линейного отображения $\hat\beta: \mathcal{P} \to U$, причем $\hat\beta(\sum c_{(x,y)}(x,y)) = \sum c_{(x,y)}\beta(x,y)$. Непосредственно проверяется, что $\hat\beta$ переводит в 0 все векторы вида /I/. Поэтому $Q \subseteq \operatorname{Ker}\hat\beta$. Отсюда следует, что $\hat\beta$ определяет линейное отображение $\tilde\beta: P \to U$, такое, что $\tilde\beta(x\otimes y) = \hat\beta(x,y) = \beta(x,y)$. С другой стороны, если $\gamma: P \to U$ – такое линейное отображение, что $\beta = \gamma\circ\pi$, то $\gamma(x\otimes y) = \tilde\beta(x\otimes y)$ и $\gamma = \tilde\beta$, поскольку P, очевидно, порождается векторами вида $x\otimes y$.

Остановимся на некоторых свойствах тензорных произведений. Тензорное произведение пространств V и W мы будем обозначать через $V\otimes W$ и будем писать $\pi(x,y) = x\otimes y$. Как видно из доказательства теоремы 2, любой элемент $u \in V\otimes W$ записывается /неоднозначно/ в виде $u = \sum_i x_i\otimes y_i$, где $x_i \in V$, $y_i \in W$.

Лемма 2. Имеются естественные изоморфизмы:

I/ $V\otimes W \cong W\otimes V$;

2/ $(U\otimes V)\otimes W \cong U\otimes(V\otimes W)$;

3/ $K\otimes V \cong V$.

Доказательство. I/ Отображение $(x,y) \mapsto y\otimes x$ пространства $V\times W$ в $W\otimes V$ билинейно, так что существует такое линейное отображение $\gamma_1: V\otimes W \to W\otimes V$, что $\gamma_1(x\otimes y) = y\otimes x$. Аналогично определяется такое линейное отображение $\gamma_2: W\otimes V \to V\otimes W$, что $\gamma_2(y\otimes x) = x\otimes y$. Очевидно, γ_1 и γ_2 обратны друг другу.

2/ Фиксируем $z \in W$ и рассмотрим билинейное отображение h_z: $U\times V \to U\otimes(V\otimes W)$, заданное формулой $h_z(x,y) = x\otimes(y\otimes z)$. Существует такое линейное отображение $\tilde h_z: U\otimes V \to U\otimes(V\otimes W)$, что $\tilde h_z(x\otimes y) = x\otimes(y\otimes z)$. Далее, билинейное отображение $g: (U\otimes V) \times W \to$