

Литература: В.А.Рохлин, Д.Б.Фукс, Начальный курс топологии.  
Геометрические главы. М. 1977, стр. 13 - 33.

гл. II. ЭЛЕМЕНТЫ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

§ I. Гомотопии

Гомотопией топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  называется семейство  $\{f_t: X \rightarrow Y \mid 0 \leq t \leq 1\}$  непрерывных отображений, непрерывно зависящее от параметра  $t$ . Непрерывная зависимость от  $t$  понимается в том смысле, что непрерывно отображение  $F: X \times I \rightarrow Y$ , ( $I$  - стандартное обозначение для отрезка  $[0,1]$ ), определяемое формулой  $F(x,t) = f_t(x)$ .

Говорят, что гомотопия  $\{f_t\}$  связывает или соединяет отображение  $f_0$  с отображением  $f_1$ . Отображения, которые можно связать гомотопией, называются гомотопными. Гомотопность отображений - рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение. Примеры гомотопных отображений: отображения  $f_1, f_3: S^1 \rightarrow D$  на рис. 1; тождественное отображение  $S^1 \rightarrow S^1$  и отображение, переводящее всякую точку в диаметрально противоположную. Примеры негомотопных отображений: отображения  $f_1, f_2: S^1 \rightarrow D$  на рис. 1 и тождественное отображение  $S^2 \rightarrow S^2$  и отображение, переводящее всякую точку в диаметрально противоположную. В каждом из

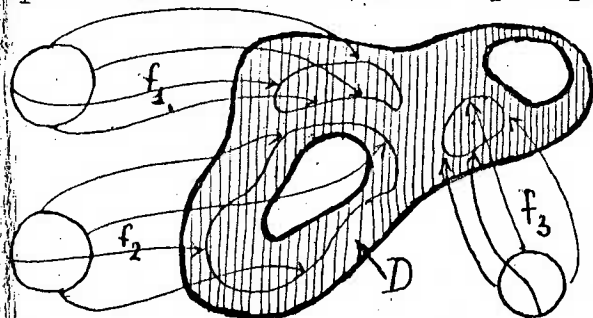


Рис. 1.

этих примеров гомотопность отображений можно доказать, прямо указав гомотопию (тождественное и антиподальное отображения окружности можно соединить гомотопией  $r_t: S^1 \rightarrow S^1$ , где  $r_t$  - поворот против часовой стрелки на угол  $\pi t$ ); негомотопность в наших примерах наглядно очевидна, но мы не имеем пока средств для ее доказательства.

Пространство  $X$  называется стягиваемым по себе в точку  $x_0 \in X$ , если тождественное отображение  $X \rightarrow X$  гомотопно постоянному отображению, переводящему каждую точку пространства  $X$  в  $x_0$ . Гомотопия, соединяющая указанные отображения, называется стягиванием. Стягивание  $f_t: X \rightarrow X$  называется сильным, если  $f_t(x_0) = x_0$  при любом  $t$ . Пространства, стягиваемые, но не сильно стягиваемые в некоторую точку, бывают (пример указан на рис. 2), но в геометрически содержательных случаях стягиваемость и сильная стягиваемость - одно и то же.

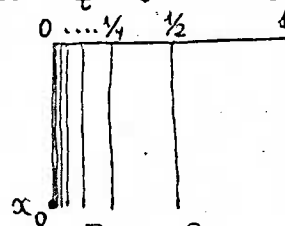


Рис. 2

Следующие два свойства стягиваемых пространств очевидны (их доказательство - упражнение): если пространство стягивается в какую-нибудь свою

точку, то оно стягивается в любую свою точку; если пространство  $X$  стягиваемо, то любые два непрерывных отображения любого пространства в  $X$  гомотопны.

Примеры стягиваемых пространств: точка, отрезок, прямая,  $\mathbb{R}^n$ , пары (во всех случаях стягиваемость очевидна); примеры нестягиваемых пространств: сферы (нестягиваемость  $S^0 =$  двоеточие очевидна, нестягиваемость  $S^n$  будет доказана ниже).

## § 2. Пути. Связность.

Путь на топологическом пространстве  $X$  называется непрерывное отображение  $I \rightarrow X$ . Точки  $\gamma(0)$  и  $\gamma(1)$  называются началом и концом пути  $\gamma: I \rightarrow X$ . Говорят, что путь  $\gamma$  соединяет  $\gamma(0)$  с  $\gamma(1)$ . Путь  $\gamma$ , у которого  $\gamma(1) = \gamma(0)$  называется петлей; совпадающие между собой начало и конец петли называются ее вершиной. Поскольку пути — непрерывные отображения, мы можем говорить для них о гомотопиях. Однако для путей мы всегда будем понимать гомотопии в искаженном смысле: автоматически предполагается, что при гомотопии пути  $\gamma_t: I \rightarrow X$  точки  $\gamma_t(0), \gamma_t(1)$  не зависят от  $t$ . Таким образом, если пути гомотопны, то у них одинаковые начала и одинаковые концы.

Если конец пути  $\gamma_1$  совпадает с началом пути  $\gamma_2$ , то можно говорить о произведении этих путей. Так называется путь  $\gamma_1 \gamma_2$ , определяемый формулой:

$$\gamma_1 \gamma_2(t) = \gamma_1(2t) \text{ при } t \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 \gamma_2(t) = \gamma_2(2t-1) \text{ при } t \geq \frac{1}{2}.$$

Пространство  $X$  называется связным, если любые две его точки можно соединить путем. (Иногда это свойство пространств называют линейной связностью, а термин связность используют для обозначения некоторого более слабого свойства; мы этого делать не будем.) Несвязное пространство распадается на 2 или более компоненты: компонента точки  $x$  определяется как совокупность точек, которые можно соединить с  $x$  путем.

Стягиваемые пространства связны: траектория  $f_t(x)$ , описываемая произвольной точкой  $x \in X$  при стягивании пространства  $X$  в точку  $x_0$ , представляет собой путь, соединяющий  $x$  с  $x_0$ . Связное пространство может быть, однако, не стягиваемым. Пример доставляет окружность.

## § 3. Односвязность.

Теорема. Пусть  $X$  — связное пространство. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) Существуют такие точки  $x_0, x_1 \in X$ , что любые два пути с началом  $x_0$  и концом  $x_1$  гомотопны.

(ii) Любые два пути на  $X$ , имеющие одинаковые начала и одинаковые концы, гомотопны.

(iii) Существует такая точка  $x_0 \in X$ , что любая петля с вершиной  $x_0$  стягиваема (т.е. гомотопна постоянной петле).

(iv) Всякая петля на  $X$  гомотопна постоянной петле.

(v) Всякое непрерывное отображение  $S^1 \rightarrow X$  гомотопно постоянному

отображению.

(vi) Всякое непрерывное отображение  $S^1 \rightarrow X$  продолжается до некоторого непрерывного отображения  $D^2 \rightarrow X$

Доказательство: упражнение.

Пространство  $X$  называется односвязным, если оно связно и для него выполнено одно (а, значит, и каждое) из свойств (i) - (vi).

Пример 1. Стягиваемые пространства односвязны. Действительно, если  $X$  стягиваемо, то оно связно (см. выше); проверим для него свойство (v): если  $g: S^1 \rightarrow X$  - непрерывное отображение и  $f_t: X \rightarrow X$  - стягивание, то  $g_t = f_t \circ g: S^1 \rightarrow X$  - гомотопия, соединяющая  $g$  с постоянным отображением.

Пример 2. Сфера  $S^n$  с  $n \geq 2$  односвязна. Действительно, <sup>(при  $n \geq 2$ )</sup> сфера связна (любые две точки соединяются дугой большого круга). Покажем, что при  $n \geq 2$  сфера обладает свойством (v). Пусть  $f: S^1 \rightarrow S^{2n}$  - непрерывное отображение. Предположим сначала, что  $f(S^1) \neq S^{2n}$ , т.е. что существует точка  $x \in S^{2n}$ , не принадлежащая образу  $f(S^1)$ .

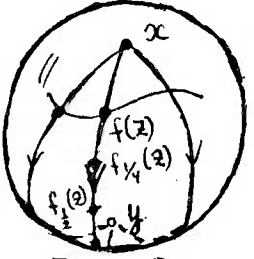


Рис. 3.

Обозначим через  $y$  точку, диаметрально противоположную  $x$ . Для каждой точки  $z \in S^1$  точка  $f(z)$  соединяется с  $y$  единственной кратчайшей дугой большого круга. Гомотопия  $f_t: S^1 \rightarrow S^{2n}$ , соединяющая  $f$  с постоянным отображением, определяется при помощи этих дуг: точка  $f_t(z)$  при увеличении  $t$  скользит по своей дуге с постоянной скоростью от  $f(z)$  к  $y$ . (см. рис. 3.)

Чтобы свести общий случай к рассмотренному случаю, мы должны показать, что всякое отображение  $f: S^1 \rightarrow S^{2n}$  гомотопно отображению, образ которого не совпадает со всей сферой  $S^{2n}$ . Пусть  $n$  столь велико, что если  $z_1, z_2 \in S^1$  и  $dist(z_1, z_2) \leq 2\pi/n$ , то  $dist(f(z_1), f(z_2)) < 1/100$ . Разобьем  $S^1$  на  $n$  дуг  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, x_0]$  равной длины и построим отображение  $f_0: S^1 \rightarrow S^{2n}$  следующим образом:  $f_0(x_i) = f(x_i)$ , а дугу  $[x_i, x_{i+1}]$  отображение  $f_0$  линейно отображает на кратчайшую дугу большого круга, соединяющую  $f(x_i)$  с  $f(x_{i+1})$ .

Очевидно,  $f_0(S^1)$  содержится в конечном числе больших кругов и не покрывает  $S^{2n}$ . В то же время  $f_0$  близко к  $f$  в том смысле, что  $dist(f_0(x), f(x)) < 3/100$  для любого  $x \in S^1$ . Благодаря этому точки  $f(x)$  и  $f_0(x)$  соединяются при любом  $x$  единственной кратчайшей дугой большого круга, и при помощи этих дуг мы определяем гомотопию, соединяющую  $f$  с  $f_0$ . (см. рис. 4.)

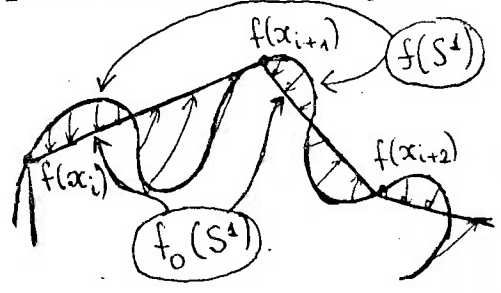


Рис. 4.

Этот пример показывает, что не всякое односвязное пространство стягиваемо.

§ 4. Фундаментальная группа.

Пусть  $X$  - топологическое пространство и  $x_0$  - произвольно фиксирован-

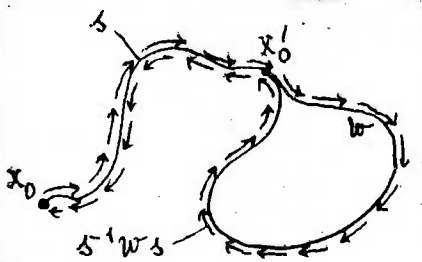
ная точка. Обозначим через  $\Omega(X, x_0)$  множество петель пространства  $X$  с вершиной  $x_0$  и через  $\pi_1(X, x_0)$  множество классов, на которые  $\Omega(X, x_0)$  разбивается отношением гомотопности. Петли можно перемножать (см. выше определение произведения путей), но  $\Omega(X, x_0)$  не является группой по отношению к этому умножению. Ввиду гомотопической инвариантности умножения петель ( $s \sim s', w \sim w' \Rightarrow sw \sim s'w'$ ), оно индуцирует умножение в  $\pi_1(X, x_0)$ , и последнее делает  $\pi_1(X, x_0)$  группой. Единицей этой группы служит класс постоянной петли  $\text{const} : I \rightarrow x_0$ , переход к обратному элементу осуществляется переходом к обратной петле:  $s \mapsto s^{-1}$ ,  $s^{-1}(t) = s(1-t)$ . Проверку групповых аксиом, которая сводится к проверке гомотопностей  $s(ws) \sim (sw)s$ ,  $s s^{-1} \sim \text{const}$ ,  $\text{const} s \sim s$ ,  $s \sim s \text{const}$ , мы пропустим. Группа  $\pi_1(X, x_0)$  называется фундаментальной группой пространства  $X$  с началом  $x_0$ .

Функториальность. Непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , переводящее точку  $x_0$  в точку  $y_0 \in Y$ , очевидным образом индуцирует гомоморфизм  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ , который обозначается через  $f_*$ . Очевидно,  $(fg)_* = f_* g_*$ .

Зависимость от  $x_0$ . Пусть  $x'_0 \in X$  лежит в той же компоненте, что и  $x_0$ . Зафиксируем путь  $s$ , соединяющий  $x_0$  с  $x'_0$  и рассмотрим отображение  $T_s :$

$$\Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x'_0), \text{ определяемое формулой } T_s(w) = s^{-1} w s. \text{ Очевидная проверка показывает, что:}$$

$$\begin{aligned} w \sim w' &\Rightarrow T_s(w) \sim T_s(w'); \\ T_s(w_1 w_2) &\sim T_s(w_1) T_s(w_2); \\ T_{s^{-1}} \circ T_s(w) &\sim w. \end{aligned}$$



Из этих трех формул первая показывает, что  $T_s$  индуцирует отображение  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x'_0)$ , которое мы тоже обозначим через  $T_s$ ; вторая показывает, что  $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x'_0)$  есть гомоморфизм; третья показывает, что гомоморфизмы  $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x'_0)$ ,  $T_{s^{-1}} : \pi_1(X, x'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  взаимно обратны. Таким образом,  $T_s$  есть изоморфизм; он называется изоморфизмом переноса вдоль  $s$  или просто переносом вдоль  $s$ .

Мы видим, в частности, что группы  $\pi_1(X, x_0)$  и  $\pi_1(X, x'_0)$  изоморфны.

Если  $s'$  — другой путь, соединяющий  $x_0$  с  $x'_0$ , то, очевидно,

$$T_{s'}^{-1} \circ T_s(w) \sim v w v^{-1},$$

где  $v$  — петля  $s s'^{-1} \in \Omega(X, x_0)$ , так что сквозной изоморфизм

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{T_s} \pi_1(X, x'_0) \xrightarrow{T_{s'}^{-1}} \pi_1(X, x_0)$$

совпадает с внутренним автоморфизмом группы  $\pi_1(X, x_0)$ , производимым классом петли  $v$ . Таким образом, изоморфизм  $T_s$  не является в общем случае каноническим, а определен с точностью до композиции с внутренним автоморфизмом. Если, однако, фундаментальная группа пространства  $X$  является коммутативной, то изоморфизм  $T_s$  каноничен, и мы можем изъять  $x_0$  из обозначения  $\pi_1(X, x_0)$ . [В общем случае обозначение  $\pi_1(X)$  может участвовать в выражении

их "группа  $\pi_1(X)$  конечна", "группа  $\pi_1(X)$  проста", но не является обозначением для определенной группы; например, бессмысленно сказать " $\alpha$  - элемент группы  $\pi_1(X)$ ", можно сказать только " $\alpha$  - элемент группы  $\pi_1(X, x_0)$ ".

Гомотопическая инвариантность. Говорят, что пространство  $X$  сильно стягиваемо к своему подмножеству  $A$ , если существует гомотопия  $f_t: X \rightarrow X$  с  $f_0 = \text{id}$ ,  $f_1(X) \subset A$ ,  $f_t|_A = \text{id}_A$ . Очевидно, если  $X$  сильно стягиваемо к  $A$  и  $x_0 \in A$ , то  $\pi_1(A, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ ; точнее, включение  $A \rightarrow X$  индуцирует изоморфизм  $\pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ .

Фундаментальная группа произведения.  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$ . Действительно, уже  $\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) = \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$ .

### §5. Вычисление фундаментальной группы окружности

Положим  $A = (1, 0) \in S^1$ . Наша ближайшая цель - установление изоморфизма

$$\pi_1(S^1, A) = \mathbb{Z}.$$

Аргумент  $\text{Arg } x$  точки  $x \in S^1$  <sup>есть</sup> определенный с точностью до  $2\pi k$  угол поворота против часовой стрелки, совмещающего  $A$  с  $x$ . Другими словами,

$$\text{Arg } (\xi, \eta) = \{ \alpha \mid \cos \alpha = \xi, \sin \alpha = \eta \}.$$

Пусть  $\gamma: I \rightarrow S^1$  - путь. Непрерывная ветвь композиции  $\text{Arg} \circ \gamma$  (мы будем говорить короче "непрерывная ветвь пути  $\gamma$ ") есть, по определению, непрерывная функция  $\hat{\gamma}$  на  $I$ , такая, что  $\hat{\gamma}(t) \in \text{Arg } \gamma(t)$  при любом  $t \in I$ .

Лемма. (i) У всякого пути  $\gamma: I \rightarrow S^1$  есть непрерывная ветвь.

(ii) Если  $\hat{\gamma}$  - непрерывная ветвь пути  $\gamma$ , то функция  $\hat{\gamma}'$  тогда и только тогда является непрерывной ветвью пути  $\gamma$ , когда разность  $\hat{\gamma}' - \hat{\gamma}$  есть константа, кратная  $2\pi$ .

Доказательство. Начнем с (ii). Если  $\hat{\gamma}', \hat{\gamma}$  - непрерывные ветви, то разность  $d = \hat{\gamma}' - \hat{\gamma}$  принимает только значения, кратные  $2\pi$ , и из теоремы о промежуточном значении вытекает, что она - константа: если  $d(t_1) = 2\pi k_1$ ,  $d(t_2) = 2\pi k_2$  и  $k_2 \neq k_1$ , то между  $t_1$  и  $t_2$  функция  $d$  должна принимать все значения, лежащие между  $2\pi k_1$  и  $2\pi k_2$ , но это невозможно, так как не все эти значения кратны  $2\pi$ .

Переходим к (i). Положим  $B = (-1, 0)$  и определим функции  $\text{arg}_1$ :

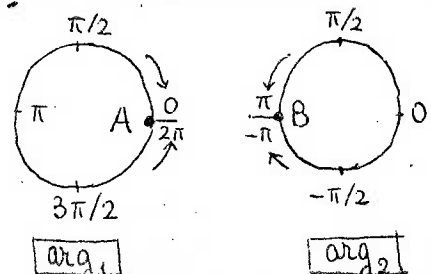
$$S^1 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}, \text{arg}_2: S^1 \setminus B \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{условиями}$$

$$\text{arg}_1(x) \in \text{Arg } x, \quad 0 < \text{arg}_1(x) < 2\pi$$

$$\text{arg}_2(x) \in \text{Arg } x, \quad -\pi < \text{arg}_2(x) < \pi$$

(см. рисунок). Очевидно, эти функции непрерывны. Выберем такое  $\delta$ , что если  $|t'' - t'| < \delta$ , то точки  $\gamma(t')$  и  $\gamma(t'')$

не диаметрально противоположны, и возьмем  $n > 1/\delta$ . Разобьем отрезок  $I$  на  $n$  равных отрезков  $\Delta_i = [(i-1)/n, i/n]$ . Так как



точки  $A, B$  диаметрально противоположны, то  $\Delta(\Delta_i) \subset S^1 \setminus A$  или  $\Delta(\Delta_i) \subset S^1 \setminus B$ , так что при любом  $i$  определена хотя бы одна из функций  $\arg_1 \circ s|_{\Delta_i}$ ,  $\arg_2 \circ s|_{\Delta_i}$ . Ту из них, которая определена (любую, если определены обе), мы обозначим через  $\hat{s}_i$ . Значения функций  $\hat{s}_{i+1}, \hat{s}_i$  <sup>в точке  $i/n$</sup>  могут отличаться на  $2\pi$ , и мы определяем непрерывную ветвь  $\hat{s}$  пути  $s$  индуктивной процедурой:

$$\begin{aligned} \hat{s}|_{\Delta_1} &= \hat{s}_1|_{\Delta_1}; \\ \hat{s}|_{\Delta_2} &= \hat{s}_2|_{\Delta_2} - [s_2(1/n) - s(1/n)]; \\ \hat{s}|_{\Delta_3} &= \hat{s}_3|_{\Delta_3} - [s_3(2/n) - s(2/n)]; \\ &\dots \\ \hat{s}|_{\Delta_n} &= \hat{s}_n|_{\Delta_n} - [s_n((n-1)/n) - s((n-1)/n)]. \end{aligned}$$

Лемма доказана. Нам будет удобно применять ее в такой форме: если  $\Delta \in \text{Arg } s(0)$ , то существует единственная непрерывная ветвь  $\hat{s}$  пути  $s$  с  $\hat{s}(0) = \Delta$ . В частности, для  $s \in \Omega(S^1, A)$  можно взять  $\Delta = 0$ ; непрерывную ветвь  $\hat{s}$  пути  $s$  с  $\hat{s}(0) = 0$  мы будем называть основной.

Теорема.  $\pi_1(S^1, A) = \mathbb{Z}$ . Подробнее: определим петлю  $\varphi_k: S^1 \rightarrow S^1$  формулой  $\varphi_k(z) = z^k$  (в которой  $S^1$  выступает как  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ). Тогда всякая петля из  $\Omega(S^1, A)$  гомотопна одной из петель  $\varphi_k$ , петли  $\varphi_k$  между собой не гомотопны, и  $\varphi_k \varphi_l \sim \varphi_{k+l}$ .

Доказательство. Если  $\hat{s}$  — основная непрерывная ветвь петли  $s$ , то  $\hat{s}(1) \in \text{Arg } A = 2\pi\mathbb{Z}$ . Целое число  $\hat{s}(1)/2\pi$  мы обозначим через  $\mathcal{C}(s)$ .

Лемма. Если  $s' \sim s$ , то  $\mathcal{C}(s') = \mathcal{C}(s)$ .

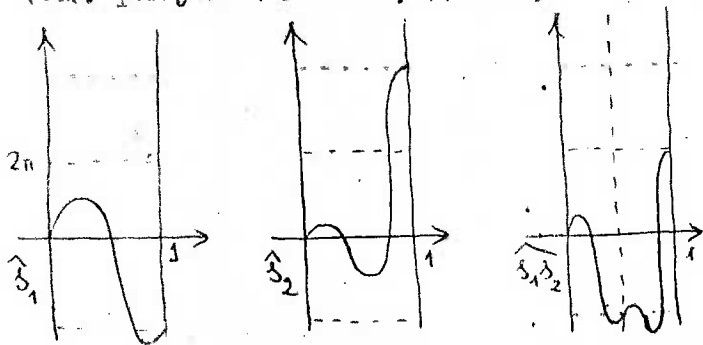
Доказательство леммы. Пусть  $s_\tau: I \rightarrow S^1$  — гомотопия, соединяющая  $s$  с  $s'$ . Выберем такое  $\delta$ , что если  $|\tau'' - \tau'| < \delta$ , то точки  $s_{\tau''}(t), s_{\tau'}(t)$  не диаметрально противоположны ни при каком  $t \in I$ , и возьмем  $n > 1/\delta$ . Функция  $d_i = \hat{s}_{i/n} - \hat{s}_{(i-1)/n}$  непрерывна, принимает значение 0 в 0 и не принимает значений  $\pm\pi$ . Следовательно,  $|d_i| < \pi$ , а так как  $d_i(1) \in 2\pi\mathbb{Z}$ , то  $d_i(1) = 0$ . Таким образом,

$$\mathcal{C}(s') - \mathcal{C}(s) = \frac{\hat{s}'(1) - \hat{s}(1)}{2\pi} = \frac{\sum (\hat{s}_{i/n}(1) - \hat{s}_{(i-1)/n}(1))}{2\pi} = \frac{\sum d_i(1)}{2\pi} = 0.$$

Продолжение доказательства теоремы. Итак,  $\mathcal{C}$  определяет отображение  $\pi_1(S^1, A) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Это — гомоморфизм, поскольку, очевидно,

$$\widehat{s_1 s_2}(t) = \begin{cases} \hat{s}_1(2t), & \text{при } t \leq 1/2, \\ \hat{s}_1(1) + \hat{s}_2(2t-1), & \text{при } t \geq 1/2 \end{cases}$$

(см. рисунок). Ясно, далее, что  $\mathcal{C}(\varphi_k) = k$ , так что это — эпиморфизм. Наконец, очевидна мономорфность нашего отображения: если  $\hat{s}(1) = \hat{s}'(1)$ , то, полагая  $\hat{s}_t = (1-t)\hat{s} + t\hat{s}'$  и обозначая через  $\hat{s}_t$  петлю с непрерывной ветвью  $\hat{s}_t$  (она существует, поскольку  $\hat{s}_t(1) = \hat{s}(1) = \hat{s}'(1)$ )





$\in 2\pi\mathbb{Z}$ , а всякая непрерывная функция на отрезке, принимающая в концах значения, кратные  $2\pi$ , является непрерывной ветвью некоторой петли, мы получаем гомотопию, соединяющую  $\gamma$  с  $\gamma'$ . Теорема доказана.

Поскольку группа  $\pi_1(S^1, A)$  коммутативна, мы можем отождествить все группы  $\pi_1(S^1, \alpha)$  между собой и с  $\mathbb{Z}$ .

Произвольное непрерывное отображение  $f: S^1 \rightarrow S^1$  индуцирует для всякого  $\alpha \in S^1$  гомоморфизм  $f_*: \pi_1(S^1, \alpha) \rightarrow \pi_1(S^1, f(\alpha))$ , т.е.  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Этот гомоморфизм представляет собой умножение на некоторое целое число, которое, очевидно, не зависит от  $\alpha$ . Это число называется степенью отображения  $f$  и обозначается через  $\deg f$ . Доказанной теореме мы можем придать такую форму: два отображения  $S^1 \rightarrow S^1$  гомотопны тогда и только тогда, когда равны их степени.

В заключение два способа вычисления степени. Пусть  $f: S^1 \rightarrow S^1$  — непрерывное отображение.

Первый способ заключается в том, чтобы построить непрерывную функцию  $\hat{f}: S^1 - \alpha \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\alpha$  — любая точка), такую, что  $\hat{f}(y) \in \text{Arg } f(y)$ ; тогда

$$\deg f = \frac{1}{2\pi} \left[ \lim_{\theta \rightarrow 2\pi^-} \hat{f}(y) - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \hat{f}(y) \right],$$

или, менее формально,  $\deg f$  есть приращение функции  $\hat{f}$  при полном обходе окружности, деленное на  $2\pi$ .

Второй способ. Предположим, что прообраз  $f^{-1}(\alpha)$  некоторой точки  $\alpha \in S^1$  конечен; пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — его точки. Пусть  $\alpha_i^+$  и  $\alpha_i^-$  — точки, близкие к точке  $\alpha_i$  и находящиеся от нее в направлении против и по часовой стрелке. Положим

$$\begin{array}{l} d_i^+ = 1, \text{ если } f(\alpha_i^+) \text{ лежит в направлении против часовой стрелки от } \alpha, \\ d_i^+ = -1, \text{ —} \\ d_i^- = 1, \text{ —} \\ d_i^- = -1, \text{ —} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{по} \\ \text{—} \\ \text{по} \\ \text{против} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \end{array}$$

(ясно, что  $d_i^\pm$  не зависит от  $\alpha_i^\pm$ , если точки  $\alpha_i^\pm$  достаточно близки к  $\alpha_i$ ).

Положим, далее,

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{если } d_i^+ = 1, d_i^- = -1; \\ -1, & \text{если } d_i^+ = -1, d_i^- = 1; \\ 0, & \text{если } d_i^+ = d_i^-. \end{cases}$$

Тогда

$$\deg f = d_1 + \dots + d_n.$$

(докажите!).

§6. Применения степени

Теорема 1. Окружность нестягиваема.

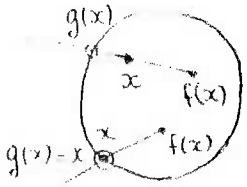
Доказательство: тождественное отображение имеет степень 1, а постоянное отображение имеет степень 0.

Теорема 2. Не существует непрерывного отображения  $D^2 \rightarrow S^1$ , при котором всякая точка окружности  $S^1$  переходит в себя.

Действительно, если бы такое отображение  $\varphi: D^2 \rightarrow S^1$  существовало, то композиция  $\varphi \circ f_t$ , где  $f_t: S^1 \rightarrow D^2$  - радиальное стягивание окружности в центр шара ( $f_t(z) = tz$ ) была бы гомотопией, связывающей тождественное отображение окружности с постоянным.

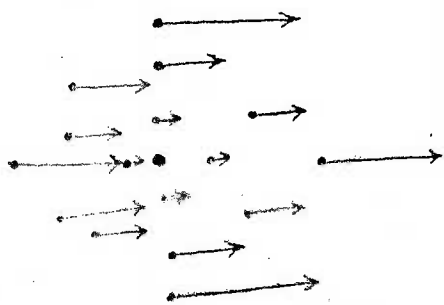
Теорема 3. Всякое непрерывное отображение  $D^2 \rightarrow D^2$  имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пусть  $f: D^2 \rightarrow D^2$  - отображение без неподвижных точек. Для  $x \in D^2$  обозначим через  $g(x)$  точку пересечения с окружностью луча, проведенного из точки  $f(x)$  через точку  $x$  (такой луч единствен ввиду  $f(x) \neq x$  и непрерывно зависит от  $x$ ). Мы получаем непрерывное отображение  $g: D^2 \rightarrow S^1$ , причем, очевидно,  $g(x) = x$  при  $x \in S^1$ . Противоречие с теоремой 2.



Векторным полем в области  $U \subset \mathbb{R}^2$  называется непрерывная функция, относящая точке  $x \in U$  вектор, приложенный в  $x$ . Точка  $x \in U$  называется особой точкой векторного поля  $f$ , если  $f(x) = 0$ . Особая точка называется изолированной, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек. Пусть  $S$  - окружность (или произвольная замкнутая кривая) в области  $U$ , не проходящая через особые точки поля  $f$ . Ориентировав кривую  $S$ , мы можем отождествить ее с окружностью; формула  $F(x) = f(x) / \|f(x)\|$  определяет отображение  $F: S \rightarrow S^1$ , т.е.  $F: S^1 \rightarrow S^1$ . Степень этого отображения (целое число) называется вращением поля  $f$  вдоль  $S$ . Заметим, что если изменить ориентацию кривой  $S$ , то вращение поменяет знак. Ясно также, что вращение не меняется при деформации кривой  $S$ , в процессе которой она не проходит через особые точки поля  $f$  (отображение  $F$  тоже подвергается гомотопии, и его степень не меняется). Пусть  $x$  - изолированная особая точка поля  $f$  и  $S$  - маленькая окружность, обходящая  $x$  против часовой стрелки. Вращение поля  $f$  вдоль  $S$  не зависит, в силу сказанного, от  $S$  и называется индексом точки  $x$ ; обозначение:  $\text{ind}_f x$  или  $\text{ind } x$ .

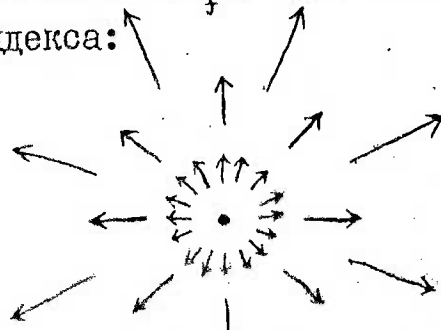
Примеры вычисления индекса:



$$f(x, y) = (x^2 + y^2, 0)$$

$$\text{ind}_f 0 = 0$$

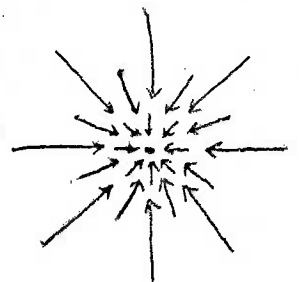
( $F$  переводит всю окружность в точку 0)



$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$$

$$\text{ind}_f 0 = 1$$

( $F$  тождественно)

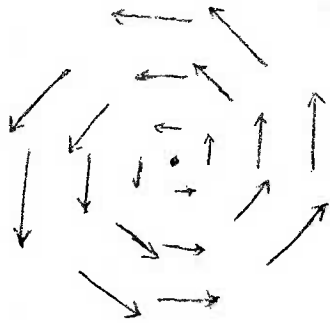


$$f(x, y) = -\frac{1}{2}(x, y)$$

$$\text{ind}_f 0 = 1$$

( $F$  - поворот на  $180^\circ$ )

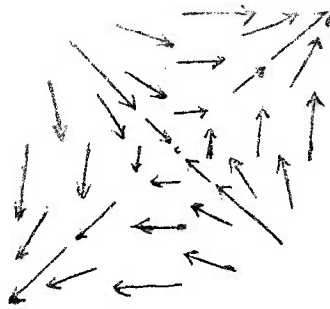




$$f(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$$

$$\text{ind}_f 0 = 1$$

( $F$  - поворот на  $90^\circ$ )

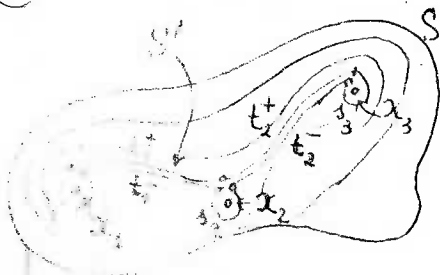


$$f(x, y) = \frac{1}{2}(y, x)$$

$$\text{ind}_f 0 = -1$$

( $F$  - отражение в прямой  $x = y$ )

Лемма. Вращение векторного поля, у которого все особые точки изолированы, вдоль замкнутой кривой равно сумме индексов особых точек, заключенных внутри кривой.



Доказательство. Прodefормируем кривую  $S$  в положение  $S'$  как показано на рисунке ( $x_1, x_2, \dots$  - особые точки, на рисунке их три). Поскольку деформация не задевает особых точек, вращение поля  $f$  вдоль  $S$  равно вращению вдоль  $S'$ . Чтобы найти последнее, разобьем  $S'$  на  $q + 2(q - 1)$  отрезков:

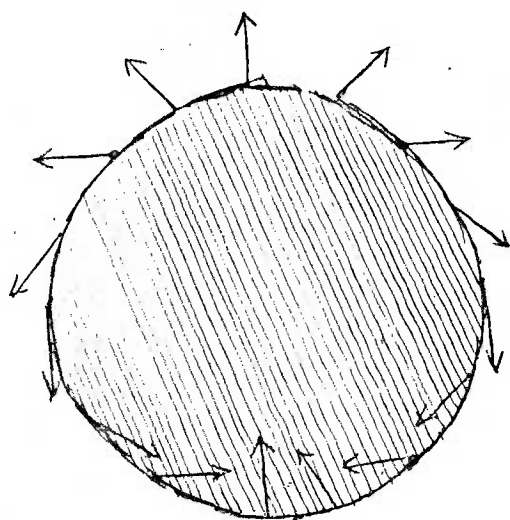
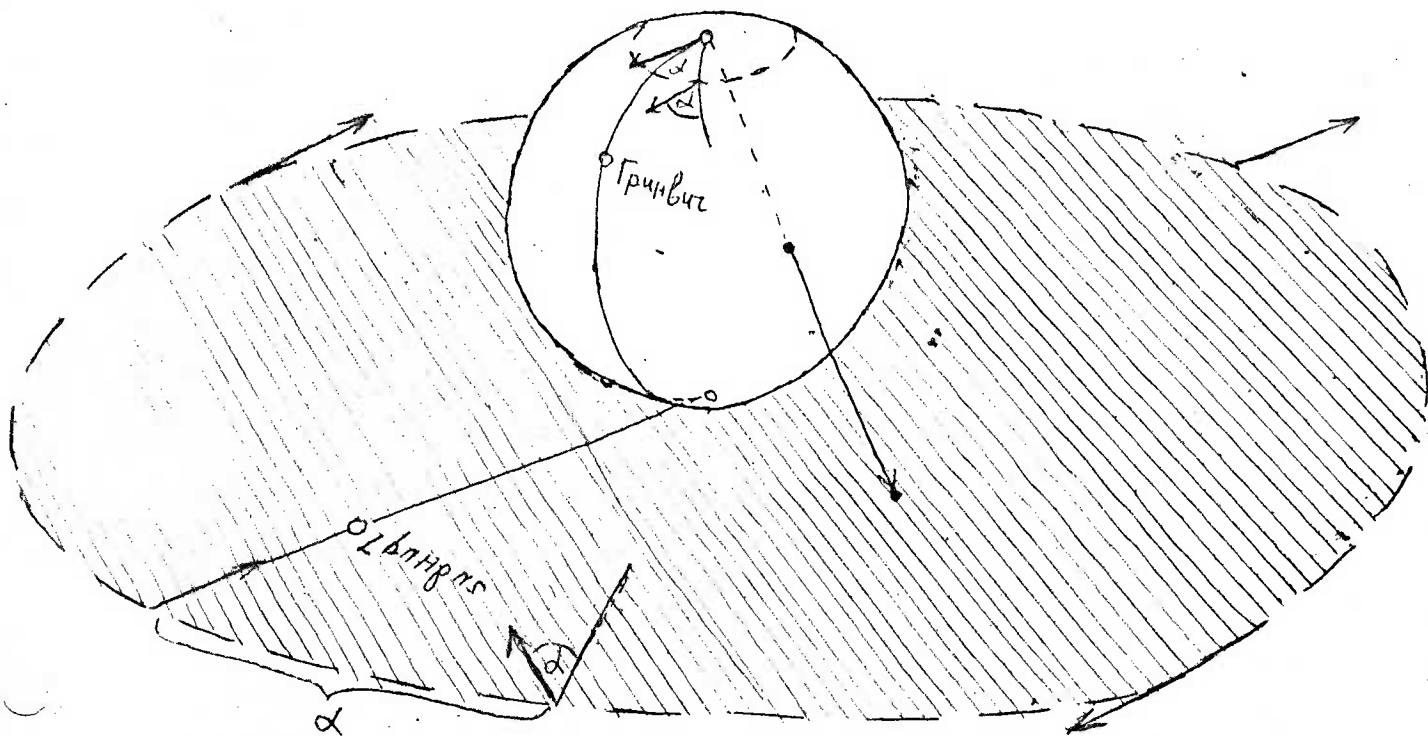
$\delta_1, \dots, \delta_q$  - маленькие петли вокруг особых точек, -

$t_1^+, \dots, t_{q-1}^+$  и  $t_1^-, \dots, t_{q-1}^-$ . Приращения непрерывной ветви аргумента отображения  $F$  на отрезках  $t_i^+, t_i^-$  противоположны по знаку и равны по модулю, приращение на  $\delta_i$  равно  $2\pi \text{ind } x_i$ . Таким образом, вращение вдоль  $S'$  равно  $\sum \text{ind } x_i$ . (Привычнее всюду вместо "равно" сказать "приблизительно равно"; но вращения и индексы - целые числа, их можно вычислять приближенно, скажем с точностью до  $1/10$ .)

Векторное поле на гладкой поверхности в  $\mathbb{R}^3$  - это непрерывная функция, относящая каждой точке поверхности касательный вектор к поверхности, приложенный в этой точке. Для изолированных особых точек векторного поля на поверхности можно говорить об индексе, скажем, локально спроектировав это поле на касательную плоскость в особой точке. Впрочем, индексы особых точек не меняются под действием диффеоморфных отображений (т.е. гладких взаимно однозначных отображений, обратные к которым тоже гладки) одной поверхности на другую, даже обращающих ориентацию (докажите!).

**Теорема (Эйлер).** Если все особые точки векторного поля на сфере изолированы, то сумма их индексов равна 2.

**Доказательство.** Можно считать, что северный полюс не является особой точкой. Нарисуем вокруг этого полюса маленькую полярную шапку и спроектируем дополнение к этой шапке из северного полюса на плоскость, касающуюся



сферы в южном полюсе. Мы получаем векторное поле в большом (по размерам) круге на плоскости, причем у этого поля будет столько же особых точек, сколько их было у векторного поля на сфере, и индексы их будут те же. В силу леммы, нам достаточно найти вращение векторного поля в круге вдоль границы этого круга. Можно считать, что вектор нашего поля на сфере, приложенный в северном полюсе, направлен по Гринвичскому меридиану. Полярная шапка столь мала, что можно считать, что векторы, приложенные в других точках полярного круга, имеют то же направление. Таким образом, в точке полярного круга, имеющей долготу  $\alpha$ , вектор составляет с южным направлением меридиана угол  $\alpha$  и отклоняется от него в направлении Гринвича. При проекции меридианы перейдут в радиусы. В точке окружности, отвечающей Гринвичскому меридиану, вектор будет направлен к центру. При движении по окружности против часовой стрелки вектор будет отклоняться от радиуса в направлении Гринвичского радиуса, т.е. тоже против часовой стрелки. При прохождении дуги  $\alpha$  вектор отклонится от радиуса на угол  $\alpha$ , да и сам радиус повернется в том же направлении на тот же угол  $\alpha$ . Таким образом, вектор повернется против часовой стрелки по отношению к своему первоначальному положению на угол  $2\alpha$ . При полном прохождении окружности, т.е. при прохождении дуги  $\alpha$ , вектор повернется на  $2\alpha$ . Таким образом, вращение действительно равно 2.

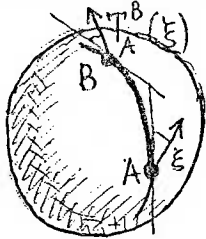
Приведем два следствия из доказанной теоремы.

Теорема 5. На  $S^2$  не существует векторного поля без особых точек.

Эта теорема, прямо вытекающая из теоремы 4, в популярной литературе называется "теоремой о волосатом шаре" и имеет образную формулировку: волосатый шар нельзя причесать.

Теорема 6. Сфера  $S^2$  не стягиваема.

Доказательство. Если бы существовало стягивание  $f_t: S^2 \rightarrow S^2$ , то мы смогли бы построить на  $S^2$  векторное поле без особенностей. Это делается так.



Обозначим для двух не диаметрально противоположных точек  $A, B$  сферы и для касательного вектора  $\xi$  к сфере в точке  $A$  через  $T_A^B(\xi)$  касательный вектор в точке  $B$ , имеющий ту же длину и составляющий с ориентированным большим кругом  $AB$  тот же угол, что и  $\xi$ . Фиксируем, далее, такое  $\delta$ , что если  $|t'' - t'| < \delta$ , то точки  $f_{t'}(x), f_{t''}(x)$  не диаметрально противоположны ни при каком  $x \in S^2$ ,

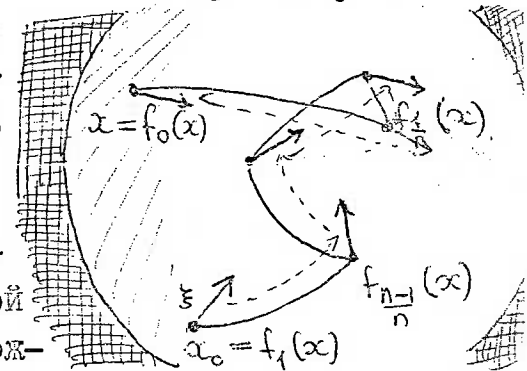
и выберем такое  $n$ , что  $1/n < \delta$ . Для каждой точки  $x \in S^2$  рассмотрим последовательность

$$f_0(x), f_{\frac{1}{n}}(x), \dots, f_{\frac{n-1}{n}}(x), f_1(x)$$

Поскольку  $f_t$  - стягивание,  $f_0(x) = x$  и  $f_1(x) = x_0$  - точка, не зависящая от  $x$ . Соседние точки этой последовательности не диаметрально противоположны, так что для произвольно фиксированного ненулевого касательного вектора  $\xi$  в точке  $x_0$  определен вектор

$$T_{f_{\frac{1}{n}}(x)}^{f_0(x)} \left( T_{f_{\frac{2}{n}}(x)}^{f_{\frac{1}{n}}(x)} \left( \dots \left( T_{f_1(x)}^{f_{\frac{n-1}{n}}(x)} (\xi) \right) \dots \right) \right)$$

- ненулевой вектор, касающийся сферы в точке  $x$  и непрерывно зависящий (при фиксированном  $\xi$ ) от  $x$ . Векторное поле на сфере построено - мы пришли к противоречию.



Теорема 6 аналогична теореме 1, и подобно тому, как мы вывели из теоремы 1 теоремы 2 и 3, из теоремы 6 выводятся:

Теорема 7. Не существует непрерывного отображения  $D^3 \rightarrow S^2$ , сужение которого на  $S^2$  тождественно.

Теорема 8. Всякое непрерывное отображение  $D^3 \rightarrow D^3$  имеет неподвижную точку.

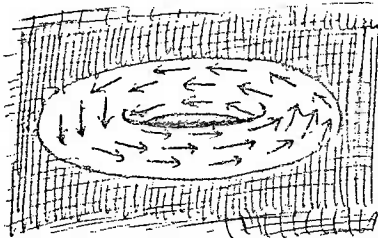
В действительности сфера  $S^n$  не стягиваема ни при каком  $n$ , так что аналоги теорем 2 и 3 (7 и 8) имеют место во всех размерностях; в частности, любое отображение шара любой размерности в себя имеет неподвижную точку. Однако, мы не имеем пока технических средств для доказательства нестягиваемости сфер.

В заключение мы обобщим теорему 4 на сферы с ручками.

Теорема 9 (Эйлер). Если у векторного поля на сфере с  $g$  ручками все особые точки изолированы, то сумма их индексов равна  $2g$ .

Теорема 10. При  $g \neq 1$  на сфере с  $g$  ручками не существует векторного поля без особенностей.

Теорема 10 — прямое следствие теоремы 9. Заметим, что на сфере с одной ручкой, т.е. на торе, векторное поле без особенностей имеется: например,



поле касательных к параллелям или меридианам.

Для доказательства теоремы 9 мы опишем новый способ вычисления вращения векторного поля вдоль замкнутой кривой. Для применения имеющегося

способа нужно переносить векторы, приложенные в разных точках кривой, в одну точку, а это неудобно делать для замкнутой кривой, расположенной на искривленной поверхности.

Чтобы избежать этого неудобства, заметим, что если у нас имеются два векторных поля, не имеющих

особых точек на кривой, то разность между их вращениями вдоль кривой можно вычислить при помощи

непрерывной ветви угла от вектора первого поля до вектора второго поля: нужно взять приращение

этого угла при обходе вокруг кривой и поделить на  $2\pi$  (см. рис.). В качестве одного из полей мы

можем взять поле векторов, касающихся кривой и направленных в направлении нашего обхода кривой. Вращение этого поля равно 1

(при полном обходе вокруг кривой касательный вектор поворачивается против часовой стрелки на угол  $2\pi$ ).

Итак: пусть  $\varphi$  — непрерывная ветвь вдоль замкнутой кривой угла между вектором некоторого поля  $\xi$  и касательным вектором к кривой. Тогда

$$\text{приращение } \varphi \text{ вдоль кривой} = 2\pi \left( 1 - \text{вращение } \xi \text{ вдоль кривой} \right)$$

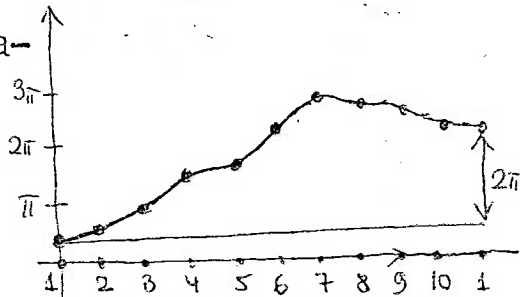
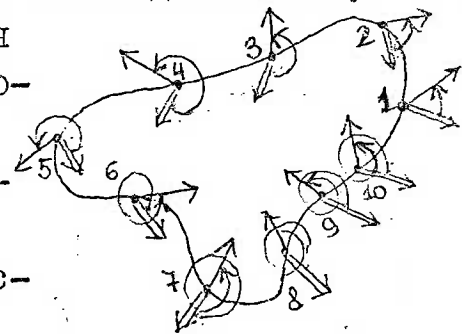
Рассмотрим более общую ситуацию, когда наша кривая является кусочно гладкой, т.е. является "криволинейным многоугольником" со сторонами  $l_1, \dots, l_m$  и углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ .



В этом случае мы не имеем непрерывного поля касательных векторов к кривой и можем говорить о приращении угла между вектором поля и касательным

вектором лишь вдоль каждой стороны многоугольника. Пусть, скажем,  $\varphi_i$  — приращение вдоль стороны  $l_i$ .

Если сгладить кривую вблизи излома с углом  $\alpha$ , то на малом участке, где производится сглаживание, вектор поля можно считать неизменным, а касательный вектор поворачивается против



$$\text{вращ.}(\uparrow) - \text{вращ.}(\uparrow) = 1$$

часовой стрелки на угол  $\pi - \alpha$ . Таким образом, после сглаживания приращение нашего угла с достаточной степенью точности будет равно сумме всех  $\varphi_i$  плюс сумма "внешних углов"  $\pi - \alpha_i$ . Окончательная формула:

$$\sum \varphi_i + \sum (\pi - \alpha_i) = 2\pi \quad (\text{1 - вращение})$$

Приступим к доказательству теоремы 9. Хорошо известно, что на сфере с  $g$  ручками можно нарисовать  $2g$  несамопересекающихся и попарно не пересекающихся петель, разрезание по которым превращает сферу с ручками в  $4g$ -угольник. Если эти линии сделать узкими полосками, то вся поверхность будет состоять из внутренних частей этих полосок и (криволинейного) многоугольника. Предположим, что на поверхности задано векторное поле. Можно считать, что его особые точки не попадают в наши полоски, так что сумма их индексов равна вращению поля вдоль границы многоугольника, а это вращение находится по предыдущей формуле:

$$\text{вращение} = 1 - \frac{\sum \varphi_i + \sum (\pi - \alpha_i)}{2\pi}$$

Но  $4g$  сторон многоугольника разбиваются очевидным образом на пары близких друг к другу и проходящих в противоположных направлениях, так что сумма  $\sum \varphi_i$  равна (приблизительно) 0. В то же время,  $\sum (\pi - \alpha_i) = 4g\pi - \sum \alpha_i$ , а сумма  $\sum \alpha_i$  равна  $2\pi$  (все углы многоугольника сходятся в одной точке и заполняют полный угол). Итак,

$$\text{вращение} = 1 - \frac{4g\pi - 2\pi}{2\pi} = 2 - g.$$

Теорема доказана.

## § 6. Накрытия

Определение. Непрерывное отображение  $\pi: Y \rightarrow X$  называется накрытием, если  $(i)$  пространства  $X$  и  $Y$  связны и  $(ii)$  каждая точка пространства  $X$  обладает окрестностью  $U$ , полный прообраз  $\pi^{-1}(U)$  которой есть объединение непересекающихся открытых множеств  $U_\alpha \subset Y$ , таких, что при каждом  $\alpha$  сужение  $\pi|_{U_\alpha}$  гомеоморфно отображает  $U_\alpha$  на  $U$ .

Если отображение  $\pi$  удовлетворяет условию  $(ii)$ , а о связности пространств  $X$  и  $Y$  ничего не известно, то  $\pi$  называют накрытием в широком смысле.

Пространство  $X$  называют базой накрытия,  $\pi$  — проекцией и  $Y$  — накрывающей над  $X$ . Вообще терминология теории накрытий исходит из представления, что  $Y$  расположено над  $X$  и  $\pi$  действует вертикально вниз: говорят "точка  $y \in Y$  расположена над точкой  $x \in X$ " (имея в виду  $\pi(y) = x$ ), "путь  $\tilde{z}: I \rightarrow Y$  накрывает путь  $z: I \rightarrow X$ " (т.е.  $\pi \circ \tilde{z} = z$ ) и т.п.

Примеры:  $(i)$   $\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ ;  $(ii)$   $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^k$ ;  $(iii)$   $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$

точка  $A \in S^n$  переходит в прямую  $0A$ .

Определение. Накрытие  $Y \rightarrow X$  называется универсальным, если  $Y$  односвязно.

В действительности для достаточно хорошего пространства  $X$  существует универсальное накрытие  $Y \rightarrow X$  (более общую теорему см. в книге Рохлин - Фукс, стр. 468), и это накрытие, в известном смысле, единственно (см. упр. ниже). Мы здесь не доказываем подобных теорем.

Нижеследующее вычисление фундаментальной группы пространства  $X$  при помощи универсального накрытия  $Y \rightarrow X$  прямо обобщает вычисление фундаментальной группы окружности, приведенное в §5. Читателю рекомендуется проследить параллель между этими доказательствами; в частности, следующая лемма обобщает теорему существования непрерывной ветви у  $\text{Arg} \circ f$ .

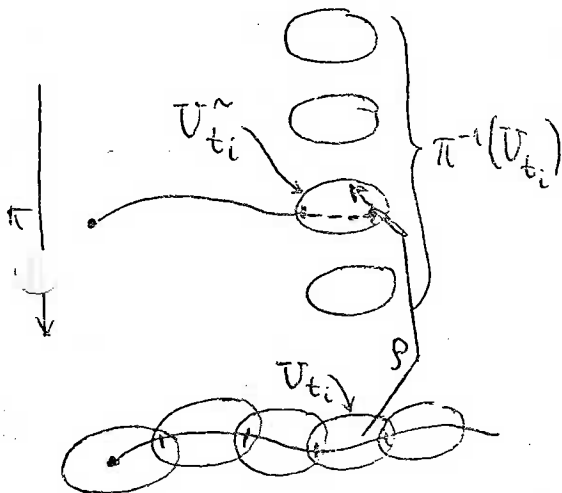
Лемма. Пусть  $\pi: Y \rightarrow X$  - накрытие (в широком смысле),  $\gamma: I \rightarrow X$  - путь,  $y_0 \in Y$  - точка над  $\gamma(0) \in X$ . Тогда существует единственный путь  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow Y$  с  $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ ,  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . Если  $\gamma_t: I \rightarrow X$  - гомотопия пути  $\gamma$ , то  $(\tilde{\gamma}_t)^\sim$  - гомотопия пути  $\tilde{\gamma}^\sim$ .

Доказательство. Для каждого  $t \in I$  фиксируем правильно накрываемую окрестность  $U_t$  точки  $\gamma(t)$  [т.е. окрестность,  $\pi$ -образ которой устроен как сказано в определении накрытия], и выберем такое  $n$ , что при  $i = 0, 1, \dots, n-1$  образ  $\gamma([i/n, (i+1)/n])$  содержится в одной из окрестностей  $U_t$ , скажем, в  $U_{t_i}$ . Построение пути  $\tilde{\gamma}$  индуктивно. Предположим, что уже построено непрерывное отображение  $\tilde{\gamma}_i: [0, i/n] \rightarrow Y$  с  $\tilde{\gamma}_i(0) = y_0$ ,  $\pi \circ \tilde{\gamma}_i = \gamma|_{[0, i/n]}$ . Фиксируем часть прообраза  $\pi^{-1}(U_{t_i})$ , содержащую  $\tilde{\gamma}_i(i/n)$  и проектируем гомеоморфно на  $U_{t_i}$ . Пусть

$\rho: U_{t_i} \rightarrow \tilde{U}_{t_i}$  - гомеоморфизм, обращающий сужение проекции. Мы доопределяем  $\tilde{\gamma}_i$  до  $\tilde{\gamma}_{i+1}: [0, (i+1)/n] \rightarrow Y$ , определяя  $\tilde{\gamma}_{i+1}$  на  $[i/n, (i+1)/n]$  как  $\rho \circ \gamma|_{[i/n, (i+1)/n]}$ . Существование пути  $\tilde{\gamma}$  доказано.

Для доказательства единственности достаточно взять другой накрывающий путь  $\tilde{\gamma}'$  и положить  $t^0 = \sup \{t \mid \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)\}$ . Окрестность точки  $\tilde{\gamma}(t^0) = \tilde{\gamma}'(t^0)$  проектируется в  $X$  гомеоморфно, и из этого следует, что  $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)$  для  $t$  из некоторой окрестности  $t^0$ . Следовательно,  $t^0 = 1$ . Последнее утверждение леммы также очевидно.

Упражнения на эту лемму. 1°. Если  $\pi: Y \rightarrow X$  - накрытие в широком смысле со связным  $X$ , то множества  $\pi^{-1}(x)$  имеют при всех  $x$  одинаковую мощность. (Если эти множества конечны и состоят из  $n$  элементов, накрытие называют  $n$ -листным; говорят также о бесконечнолистных, счетнолистных и т.д. накрытиях.) 2°. Если  $Z$  - односвязное пространство с отмеченной точкой  $z_0$ ,  $\pi: Y \rightarrow X$  - накрытие в широком смысле,  $f: Z \rightarrow X$





- непрерывное отображение и  $y_0 \in Y$  - точка над  $f(z_0)$ , то существует единственное непрерывное отображение  $f^{\sim}: Z \rightarrow Y$  с  $f^{\sim}(z_0) = y_0$ ,  $\pi \circ f^{\sim} = f$ .

Основным для нас применением накрытий является следующий способ вычисления фундаментальной группы.

Пусть  $\pi: Y \rightarrow X$  - универсальное накрытие. Фиксируем точку  $y_0 \in Y$  и положим  $x_0 = \pi(y_0)$ . Для точки  $y \in \pi^{-1}(x_0)$  рассмотрим путь  $\sigma: I \rightarrow Y$ , соединяющий  $y_0$  с  $y$  и положим  $\lambda = \pi \circ \sigma$ . Очевидно,  $\lambda$  - петля ( $\pi(y) = \pi(y_0)$ ), гомотопический класс которой не зависит от выбора  $\sigma$  (ввиду односвязности  $Y$  любые два пути, соединяющие  $y_0$  с  $y$ , гомотопны). Таким образом, сопоставление  $y \mapsto$  (класс петли  $\lambda$ ) корректно определяет отображение

$$\pi^{-1}(x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad (*)$$

Основная теорема. Это отображение взаимно однозначно.

Доказательство. Что  $(*)$  - отображение "на", прямо следует из леммы:

Если  $\lambda \in \pi_1(X, x_0)$  и  $\lambda: I \rightarrow X$  - петля класса  $\lambda$ , то мы берем путь  $\lambda^{\sim}$ , начинающийся в точке  $y_0$  и накрывающий  $\lambda$  и обозначаем через  $y$  его конец. Очевидно,  $y \in \pi^{-1}(x_0)$  и  $(*)$  переводит  $y$  в  $\lambda$ . Предположим теперь, что  $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x_0)$  имеют общий образ в  $\pi_1(X, x_0)$ , т.е. что пути  $\sigma_1, \sigma_2: I \rightarrow Y$ , начинающиеся в точке  $y_0$  и кончающиеся в точках  $y_1, y_2$ , проектируются в гомотопные петли  $\lambda_1, \lambda_2: I \rightarrow X$ . Рассмотрим гомотопию  $\lambda_t$ , соединяющую  $\lambda_1$  с  $\lambda_2$ . В силу леммы  $(\lambda_t)^{\sim}$  - гомотопия, соединяющая пути  $(\lambda_1)^{\sim}, (\lambda_2)^{\sim}$ , т.е. пути  $\sigma_1, \sigma_2$ . Из существования такой гомотопии видно, что  $\sigma_1(i) = \sigma_2(i)$ , т.е. что  $y_1 = y_2$ .

Популярная формулировка доказанной теоремы: число элементов фундаментальной группы совпадает с числом листов универсального накрытия.

Упражнения. Докажите следующие утверждения, похожие на доказанную теорему. 1<sup>o</sup>. Универсальные накрытия с общей базой эквивалентны (т.е. если  $\pi': Y' \rightarrow X$ ,  $\pi'': Y'' \rightarrow X$  - универсальные накрытия, то существует такой гомеоморфизм  $\varphi: Y'' \rightarrow Y'$ , что  $\pi'' = \pi' \circ \varphi$ ). 2<sup>o</sup>. Если  $\pi: Y \rightarrow X$  - накрытие, то  $\pi_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, \pi(y_0))$  - гомоморфизм для любой точки  $y_0 \in Y$ . 3<sup>o</sup> (Обобщение упр. 1<sup>o</sup>). Два накрытия  $\pi': Y' \rightarrow X$ ,  $\pi'': Y'' \rightarrow X$  эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторых точек  $y'_0 \in Y'$ ,  $y''_0 \in Y''$  с  $\pi'(y'_0) = \pi''(y''_0)$  подгруппы  $\pi'_* (\pi_1(Y', y'_0))$ ,  $\pi''_* (\pi_1(Y'', y''_0))$  группы  $\pi_1(X, \pi'(y'_0))$  сопряжены.

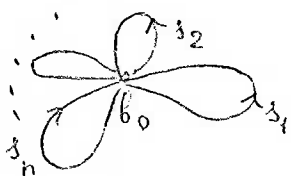
Переходим к применениям основной теоремы.

Теорема 1.  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$  ( $n > 1$ ).

Доказательство. Поскольку сфера  $S^n$  односвязна, накрытие  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  универсально, а так как это накрытие двулистно, группа  $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$  состоит из двух элементов.

Пусть теперь  $B$  - букет  $n$  окружностей (см. рис.),  $b_0$  - общая точка этих окружностей,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - петли, обходящие окружности в произвольно выбранных направлениях.

Теорема 2.  $\pi_1(B, b_0)$  есть свободная группа, порожденная



денная гомотопическими классами петель  $\lambda_i$ .

Доказательство. Мы построим универсальное накрытие булжета  $B$ . Для этого нарисуем на плоскости граф как показано на рис. 20. Именно, выпустим из

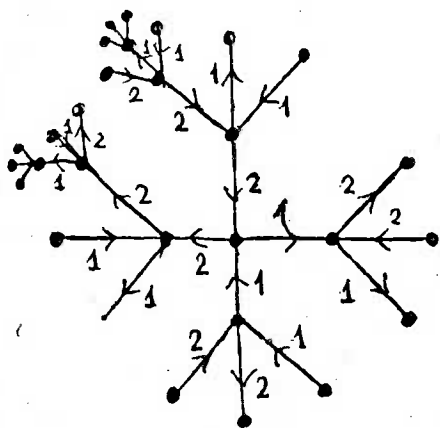


Рис. 20

точки  $O$   $2n$  отрезков, припишем им направления и номера так, чтобы при каждом  $i$  к точке  $O$  примыкал  $i$ -й входящий отрезок и  $i$ -й исходящий отрезок (на рис. 20  $n=2$ ). Затем из каждого свободного конца выпустим  $2n-1$  отрезков и припишем им направления и номера так, чтобы к каждому из этих концов при каждом  $i$  примыкал  $i$ -й входящий отрезок и  $i$ -й исходящий отрезок. И так далее, до бесконечности. Построенный граф  $\tilde{B}$  покрывает  $B$ : накрывающее отображение наматывает отрезок с номером  $i$  на  $i$ -ю

окружность в направлении стрелки. Что это — накрытие, очевидно. Оно универсально, потому что граф  $\tilde{B}$  стягиваем (это — дерево). Таким образом, элементы группы  $\pi_1(B, b_0)$  взаимно однозначно соответствуют выделенным на рис. 20 точкам: точке отвечает гомотопический класс проекции любого пути, соединяющего  $O$  с этой точкой (в  $\tilde{B}$ ). Наконец, ясно, что проекция "оптимального" пути, соединяющего  $O$  с выделенной точкой есть слово, составленное из "букв"  $\lambda_i^{\pm 1}$ , и каждое такое слово по одному разу встречается среди проекций (в слове, конечно, не должны стоять подряд  $\lambda_i, \lambda_i^{-1}$ ).

### § 7. Простейшая аддиционная теорема.

#### Фундаментальные группы поверхностей

Предположим, что  $Y$  — топологическое пространство, содержащее часть  $\mathcal{D}$ , гомеоморфную диску  $D^2$ ; мы зафиксируем отображение  $\varphi: D^2 \rightarrow Y$ , гомеоморфно отображающее  $D^2$  на  $\mathcal{D}$ . Дополнение в  $Y$  к внутренней части  $\text{Int } \mathcal{D}$  диска  $\mathcal{D}$  обозначим через  $X$ . Для простоты будем считать, что отмеченная точка  $y_0$  каждого из пространств  $X, Y$  совпадает с  $\varphi(1, 0)$ . Сужение  $\varphi|_{S^1}$  отображает окружность  $S^1$  в  $X$  и определяет некоторый элемент  $\sigma$  фундаментальной группы  $\pi_1(X, y_0)$ .

Теорема 1. Отображение  $i_*: \pi_1(X, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ , индуцированное включением  $i: X \rightarrow Y$ , является эпиморфизмом. Ядром этого эпиморфизма служит наименьшая нормальная подгруппа  $(\sigma)$  группы  $\pi_1(X, y_0)$ , содержащая  $\sigma$  [т.е. группа, порожденная всевозможными  $\alpha^{-1}\sigma\alpha$  с  $\alpha \in \pi_1(X, y_0)$ ].

Пояснение. Эта теорема позволяет вычислить группу  $\pi_1(Y, y_0)$  по  $\pi_1(X, y_0)$  и  $\sigma$ ; можно сказать, что группа  $\pi_1(Y, y_0)$  получается из  $\pi_1(X, y_0)$  наложением соотношения  $\sigma = 1$ .

Доказательство теоремы 1. Для доказательства эпиморфности  $i_*$  требуется установить, что всякая петля  $\lambda: I \rightarrow Y$  с началом  $y_0$  гомотопна петле, проходящей по  $X$ . Для этого достаточно показать, что петля  $\lambda$  гомотопна пет-

ле, образ которой содержит не все множество  $\mathcal{D}$  (см. рис. 21). А этого можно достичь при помощи аппроксимации, аналогичной той, которая применя-

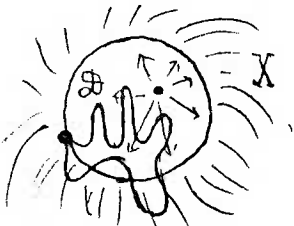


Рис. 21

лась в § 3 для доказательства односвязности сфер. Выберем такое  $N$  что если  $|t' - t''| < 1/N$  и  $s(t'), s(t'') \in \mathcal{D}$ , то  $\text{dist}(s(t'), s(t'')) < \frac{1}{100}$  (расстояние в  $\mathcal{D}$  измеряется при помощи метрики диска  $D^2$ , перенесенной в  $\mathcal{D}$  гомеоморфизмом  $\varphi$ ). После этого отображение  $s$  на отрезке  $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$  мы оставляем прежним, если хотя бы одна из точек  $s(\frac{i}{N}), s(\frac{i+1}{N})$  не содержится в концентрическом  $\mathcal{D}$  диске  $d$  радиуса  $1/2$  и заменяем линейным в противном случае. Очевидно, измененное

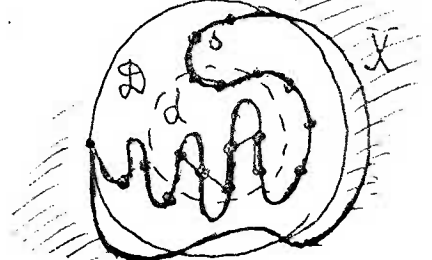


Рис. 22

отображение гомотопно  $s$  и не замечает множества  $\text{Int } \mathcal{D}$  (см. рис. 22). Для вычисления ядра отображения  $i_*$  предположим, что петля  $s: I \rightarrow X$  гомотопна нулю в  $Y$ . Гомотопию можно представлять себе как совпадающее с  $s$  на границе отображение  $S: D^2 \rightarrow Y$ . Еще лучше считать, что  $S$  есть отобра-

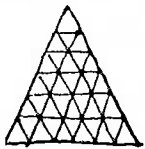


Рис. 23

жение треугольника. Этот треугольник мы триангулируем столь мелко (см. рис. 23), что если  $z', z''$  лежат в одном треугольничке триангуляции и  $S(z'), S(z'') \in \mathcal{D}$ , то  $\text{dist}(S(z'), S(z'')) < \frac{1}{100}$ . После этого мы заменяем отображение  $S$  отображением  $S'$  по

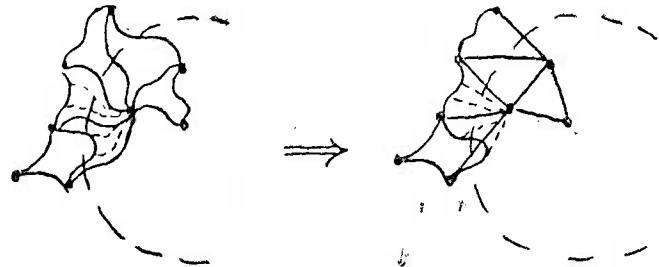


Рис 24.

следующему правилу. Пусть  $A, B, C$  - вершины треугольничка  $\Delta$  триангуляции. Если ни одна из точек  $S(A), S(B), S(C)$  не содержится в  $d$ , то  $S'$  на  $\Delta$  совпадает с  $S$ ; если одна из этих точек, скажем,  $S(A)$ , ле-

жит в  $d$ , а остальные - не лежат, то мы не меняем отображение на отрезке  $BC$  и делаем его линейным на отрезках, соединяющих точку  $A$  с точками отрезка  $BC$ . Наконец, если по крайней мере две точки из  $S(A), S(B), S(C)$  лежат в  $d$ ,

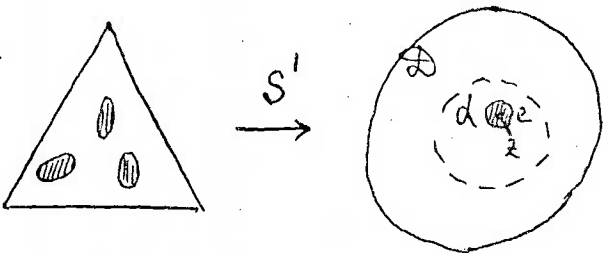


Рис. 25

то  $S'$  на  $\Delta$  линейно. Отображение  $S'$ , как и  $S$ , представляет собой гомотопию петли  $s$  в  $O$ . Отыщем в  $d$  точку  $z$ , в которую при отображении  $S'$  не попадают ни вершины, ни ребра триангуляции. Прообраз малого диска  $e$  с центром  $z$  представляет собой собрание заполненных

эллипсов (см. рис. 25), линейно отображающихся на  $e$ . Сделаем в  $Y$  гомотопию, (линейно) растягивающую  $e$  на  $\mathcal{D}$  и сминающую  $\mathcal{D}-e$  на границу диска  $\mathcal{D}$  (в остальной части  $Y$  гомотопия неподвижна). В результате этой гомото-

при отображении  $S'$  превратится в отображение  $S''$  треугольника в  $Y$ , линейно отображающее заштрихованные на рис. 25 части треугольника на  $\mathcal{D}$ . Петля — контур треугольника гомотопна в треугольнике с выброшенными заштрихованными областями петле, показанной на рис. 26. Таким образом, петля  $\Delta$  гомотопна в  $X$  петле, служащей образом петли рис. 26 при отображении  $S''$ . Последняя имеет вид

$$w_1 s^{\pm 1} w_1^{-1} w_2 s^{\pm 1} w_2^{-1} \dots w_k s^{\pm 1} w_k^{-1}$$

( $w_i$  — образ пути  $v_i$  при отображении  $S$ ).

Очевидно, класс последней петли принадлежит группе  $(\sigma)$ . Мы доказали включение  $\text{Ker } i_* \subset (\sigma)$ .

Обратное включение  $(\sigma) \subset \text{Ker } i_*$  очевидно.

Теорема доказана.

Теперь мы можем вычислить фундаментальные группы поверхностей.

Теорема 2. Фундаментальная группа сферы с  $g$  ручками есть группа с  $2g$  образующими  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  и одним соотношением

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1.$$

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 9 § 5 выделим в нашей поверхности диск  $\mathcal{D}$  (там мы его называли  $2g$ -угольником) — см. рис. 27. Очевидно, дополнение  $X$  к внутренности этого диска гомотопически эквивалентно букету  $2g$  окружностей. В силу теоремы 1 фундаментальная группа нашей поверхности получается из фундаментальной группы  $X$ , т.е. из свободной группы с  $2g$  образующими, наложением одного соотношения: гомотопический класс петли, служащей границей нашего диска, равен 1. Очевидно, это — соотношение указанного в формулировке теоремы вида.

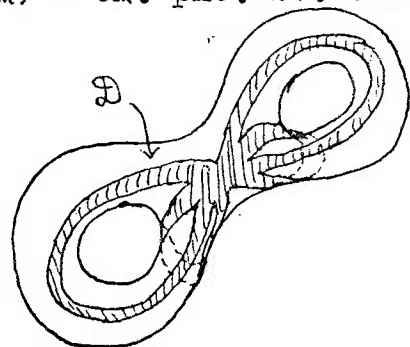


Рис. 27.

Теорема доказана.

Теорема 3. Фундаментальная группа сферы с  $g$  ручками и  $h$  пленками Мёбиуса<sup>1)</sup> есть группа с  $2g + h$  образующими  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_h$  и одним соотношением

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \dots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} \gamma_1^2 \dots \gamma_h^2 = 1$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Для полноты приведем еще одну теорему о фундаментальной группе поверхности, не связанную с теоремой 1.

Теорема 4. Фундаментальная группа сферы с  $g$  ручками,  $h$  пленками Мёбиуса и  $k \geq 1$  дырами есть свободная группа с  $2g + h + k - 1$  образующими.

Действительно, указанная поверхность гомотопически эквивалентна букету указанного количества окружностей (докажите!).

В заключение мы приведем без доказательства более сложную аддиционную теорему, так называемую теорему Ван Кампена (теорема I — ее частный случай, убедитесь в этом).

<sup>1)</sup> Определения этой поверхности ранее не давались; это будет приведено в гл. IV.

Теорема Ван Кампена. Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — два замкнутых подмножества связного пространства  $X$  со связным пересечением  $A_1 \cap A_2$ . Пусть, далее,  $x_0 \in A_1 \cap A_2$ . Зададим группы  $\pi_1(A_1, x_0)$ ,  $\pi_1(A_1 \cap A_2, x_0)$ ,  $\pi_1(A_2, x_0)$  образующими и соотношениями:

$\pi_1(A_1, x_0)$	$\pi_1(A_1 \cap A_2, x_0)$	$\pi_1(A_2, x_0)$
образующие	образующие	образующие
$\alpha_1, \dots, \alpha_q$	$\gamma_1, \dots, \gamma_s$	$\beta_1, \dots, \beta_r$
система соотношений $S$	система соотношений $U$ (нам она не нужна)	система соотношений $T$

Пусть, наконец,  $i_1: A_1 \cap A_2 \rightarrow A_1$ ,  $i_2: A_1 \cap A_2 \rightarrow A_2$  — включения, и пусть  $i_{1*}(\gamma_i) = p_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ,  $i_{2*}(\gamma_i) = q_i(\beta_1, \beta_2, \dots)$ . Тогда группа  $\pi_1(x, x_0)$  следующим образом представляется образующими и соотношениями:

образующие	}	$\alpha_1, \dots, \alpha_q$ $\beta_1, \dots, \beta_r$
соотношения	}	система $S$ система $T$ $p_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = q_i(\beta_1, \beta_2, \dots) \quad [i=1, \dots, s]$

Упражнение на теорему Ван Кампена. Найдите фундаментальную группу дополнения в  $\mathbb{R}^3$  к "трилистнику". Трилистник — это кривая, расположенная на стандартно вложенном в  $\mathbb{R}^3$  торе и охватывающая его 3 раза по меридиану и 2 раза по параллели. В этой задаче можно заменить трилистник другой кривой, определяемой так же, но с произвольными взаимно простыми числами  $p$  и  $q$  вместо 2 и 3.

### гл. III. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

#### § I. Определение многообразия

Определение I. Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой называется  $n$ -мерным многообразием, если каждая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной пространству  $\mathbb{R}^n$ .

Например, точка — нульмерное многообразие, окружность и прямая — одномерные многообразия, (двумерная) сфера и сфера с ручками и пленками Мёбиуса — двумерные многообразия; пространство  $\mathbb{R}^n$  является  $n$ -мерным многообразием, сфера  $S^{n-1}$  и проективное пространство  $\mathbb{R}P^{n-1}$  являются  $(n-1)$ -мерными многообразиями.

Теорема I. Непустое топологическое пространство не может быть одновременно  $n$ -мерным многообразием и  $m$ -мерным многообразием, если  $m \neq n$ .

Этот, казалось бы, несомненный факт мы не в состоянии доказать здесь. Для его доказательства было бы достаточно установить, что не гомеоморфны пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  с неодинаковыми  $m$  и  $n$ . Очевидно, например, что  $\mathbb{R}^0$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$  с  $n > 0$  (мощности не одинаковы). Далее,  $\mathbb{R}^1$  не го-

\* ) См. прим. на стр. 18.

меоморфно  $\mathbb{R}^n$  с  $n > 1$ , поскольку дополнение к точке в  $\mathbb{R}^n$  связно, а  $\mathbb{R}^1$  разбивается любой своей точкой на два куска. Наконец,  $\mathbb{R}^2$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$  с  $n > 2$ , поскольку  $\mathbb{R}^2$ - (точка) не односвязно ( $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$ ), а при  $n > 2$   $\mathbb{R}^n$ - (точка) односвязно (гомотопически эквивалентно  $S^{n-1}$ ). Вообще из нестягиваемости сферы  $S^k$  не очень трудно вывести, что пространство  $\mathbb{R}^{k+1}$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$  с  $n > k+1$  (так что, например,  $\mathbb{R}^n$  с  $n > 3$  не гомеоморфно  $\mathbb{R}^2$  - см. § 5 гл. II). Но мы далеки от доказательства этой нестягиваемости при больших  $k$ .

Определение 2. Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой называется  $n$ -мерным многообразием с краем, если каждая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной либо  $\mathbb{R}^n$ , либо

$$\mathbb{R}_-^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0 \}.$$

Примеры:  $\mathbb{R}_-^n$ ,  $D^n$ .

Точка  $n$ -мерного многообразия с краем, обладающая окрестностью, гомеоморфной  $\mathbb{R}^n$ , называется внутренней, остальные точки называются краевыми. Внутренние точки многообразия  $X$  составляют его внутреннюю часть  $\text{Int} X$ , краевые точки составляют его край  $\partial X$ . Очевидно,  $\text{Int} X$  и  $\partial X$  - многообразия без края (т.е. многообразия в смысле определения I); их размерности равны соответственно  $n$  и  $n-1$ .

Фундаментальной леммой теории многообразий с краем является утверждение, что  $\partial \mathbb{R}_-^n = \mathbb{R}^{n-1}$ . Однако, доказательство этого утверждения встречает те же трудности, что и доказательство теоремы I, и тоже не может быть приведено здесь полностью. Средства, которыми мы располагаем, позволяют доказать это предложение при  $n \leq 3$ . Заметим, что единственной возможной альтернативой равенству  $\partial \mathbb{R}_-^n = \mathbb{R}^{n-1}$  служит равенство  $\partial \mathbb{R}_-^n = \emptyset$ , из которого вытекает, что край всякого  $n$ -мерного многообразия пуст.

## § 2. Одномерные многообразия

Теорема. Связное непустое одномерное многообразие гомеоморфно одному из следующих 4 многообразий, которые между собой не гомеоморфны:

- |                        |                                   |
|------------------------|-----------------------------------|
| (1) отрезок $I$ ;      | (3) прямая $\mathbb{R}^1$ ;       |
| (2) окружность $S^1$ ; | (4) полупрямая $\mathbb{R}_-^1$ . |

Доказательство попарной негомеоморфности многообразий (1) - (4) оставляется читателю в качестве упражнения. Докажем, что всякое одномерное многообразие гомеоморфно одному из них. (Обратите внимание на роль, которую в доказательстве играют предположения счетности базы и хаусдорфовости.)

Лемма I. Если связное хаусдорфово пространство представляется как объединение двух своих открытых подмножеств, гомеоморфных  $\mathbb{R}^1$ , то оно гомеоморфно  $\mathbb{R}^1$  или  $S^1$ .

Доказательство леммы I. Пусть  $X = U \cup V$  - указанное представление и  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^1$  - гомеоморфизмы. Исключим из рассмотрения тривиаль-



ные случаи  $U \subset V$  и  $V \subset U$ , в которых  $X$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^1$ , и изучим множества  $\varphi(U \cap V)$  и  $\psi(U \cap V)$ .

Так как пересечение  $U \cap V$  открыто в  $U$  и в  $V$ , то множества  $\varphi(U \cap V)$  и  $\psi(U \cap V)$  открыты в  $\mathbb{R}^1$  и их компоненты являются интервалами. Среди этих интервалов нет конечных; действительно, если бы, например, множество  $\varphi(U \cap V)$  обладало конечной компонентой  $(a, b)$ , то множество  $\varphi^{-1}((a, b))$  было бы одновременно замкнуто в  $V$  (как пересечение компактного  $U$ , значит, замкнутого множества  $\varphi^{-1}([a, b])$  с  $V$ ) и открыто в  $V$ , из чего следовало бы, что  $V = \varphi^{-1}((a, b)) \subset U$ . Кроме того,  $\varphi(U \cap V) \neq \mathbb{R}^1$ , так как иначе  $U \subset V$ , и  $\psi(U \cap V) \neq \mathbb{R}^1$ , так как иначе  $V \subset U$ . Таким образом, не исключены лишь два случая: (i) каждое из множеств  $\varphi(U \cap V), \psi(U \cap V)$  представляет собой открытую полупрямую; (ii) каждое из множеств  $\varphi(U \cap V), \psi(U \cap V)$  состоит из двух непересекающихся открытых полупрямых.

Так как  $\varphi$  и  $\psi$  допускают умножение на  $-1$ , то можно считать, что в случае (i) множество  $\varphi(U \cap V)$  имеет вид  $(-\infty, a)$ , а множество  $\psi(U \cap V)$  — вид  $(b, \infty)$ . Рассмотрим сквозное отображение

$$(-\infty, a) = \varphi(U \cap V) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\psi} \psi(U \cap V) = (b, \infty)$$

Так как оно взаимно однозначно и непрерывно, то оно монотонно, и ясно, что оно возрастает (если бы оно убывало, то точки  $\varphi^{-1}(a)$  и  $\psi^{-1}(b)$  не имели бы в  $X$  непересекающихся окрестностей). Поэтому

$$X = \psi^{-1}((-\infty, \varphi(x_0)]) \cup \varphi^{-1}([\varphi(x_0), \infty)),$$

где  $x_0$  — какая-нибудь точка из  $U \cap V$ , откуда видно, что в случае (i)  $X$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^1$ .

В случае (ii)

$$\varphi(U \cap V) = (-\infty, a_1) \cup (a_2, \infty), \quad \psi(U \cap V) = (-\infty, b_1) \cup (b_2, \infty)$$

с некоторыми  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ( $a_1 < a_2, b_1 < b_2$ ) и можно считать, что сквозной гомеоморфизм

$$\varphi(U \cap V) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\psi} \psi(U \cap V)$$

отображает  $(-\infty, a_1)$  на  $(b_2, \infty)$ , а  $(a_2, \infty)$  на  $(-\infty, b_1)$ . Обе функции  $(-\infty, a_1) \rightarrow (b_2, \infty), (a_2, \infty) \rightarrow (-\infty, b_1)$ , определяемые этим гомеоморфизмом, возрастают (если бы, например, первая убывала, то точки  $\varphi^{-1}(a_1)$  и  $\psi^{-1}(b_2)$  не имели бы в  $X$  непересекающихся окрестностей), и потому

$$X = \psi^{-1}([\psi(x_2), \psi(x_1)]) \cup \varphi^{-1}([\varphi(x_1), \varphi(x_2)]),$$

где  $x_1$  — какая-нибудь точка из  $\varphi^{-1}((-\infty, a_1)) = \psi^{-1}((b_2, \infty))$ , а  $x_2$  — какая-нибудь точка из  $\varphi^{-1}((a_2, \infty)) = \psi^{-1}((-\infty, b_1))$ . Следовательно, в случае (ii)  $X$  гомеоморфно  $S^1$ .

Доказательство теоремы в компактном случае. Предположим сначала, что наше многообразие замкнуто. Тогда оно покрывается конечным числом открытых множеств, гомеоморфных  $\mathbb{R}^1$ , и эти множества можно занумеровать в последо-

вательность  $U_1, \dots, U_3$  со связными объединениями  $V_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$ . В силу леммы 1, первое из множеств  $V_1, \dots, V_3$ , не гомеоморфных  $\mathbb{R}^1$ , гомеоморфно  $S^1$ , и так как это множество открыто и (будучи компактным) замкнуто, оно совпадает со всем многообразием, которое оказывается, таким образом, гомеоморфным  $S^1$ .

Пусть теперь многообразие имеет непустой край. Построим его удвоение, т.е. возьмем два экземпляра нашего многообразия и склеим их, отождествив соответствующие друг другу точки их краев. Получится замкнутое связное одномерное многообразие, которое, по доказанному, гомеоморфно окружности. Значит наше исходное многообразие гомеоморфно части окружности. Так как эта часть связна, замкнута, непуста, отлична от всей окружности и не сводится к точке, то она гомеоморфна  $I$ .

Лемма 2. Если топологическое пространство представляется как объединение неубывающей последовательности своих открытых подмножеств, гомеоморфных  $\mathbb{R}^1$ , то оно гомеоморфно  $\mathbb{R}^1$ .

Доказательство. Пусть  $X = \bigcup V_i$  — указанное представление. Очевидно, всякий гомеоморфизм множества  $V_i$  на интервал  $(a, b)$  продолжается до некоторого гомеоморфизма множества  $V_{i+1}$  на один из интервалов  $(a, b)$ ,  $(a-1, b)$ ,  $(a, b+1)$ ,  $(a-1, b+1)$ . Это позволяет индуктивно построить такую последовательность интервалов  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$  и такую последовательность гомеоморфизмов  $\varphi_i: V_i \rightarrow \Delta_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ), что  $\varphi_i = \varphi_{i+1}|_{\Delta_i}$ , и ясно, что отображение пространства  $X$  на интервал  $\bigcup \Delta_i$ , совпадающее на  $V_i$  с  $\varphi_i$ , является гомеоморфизмом.

Доказательство теоремы в некомпактном случае. Предположим сначала, что наше многообразие не имеет края. Тогда оно покрывается счетным числом открытых подмножеств, гомеоморфных  $\mathbb{R}^1$ , и эти подмножества можно занумеровать в последовательность  $U_1, U_2, \dots$  со связными объединениями  $V_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$ . Вся эти объединения гомеоморфны  $\mathbb{R}^1$ , так как первое из них, не гомеоморфное  $\mathbb{R}^1$ , было бы, в силу леммы 1, гомеоморфно  $S^1$  и совпало бы, вследствие своей открытости и замкнутости, со всем многообразием. Таким образом, к последнему применима лемма 2, и оно гомеоморфно  $\mathbb{R}^1$ .

Пусть теперь наше многообразие имеет непустой край. Тогда его удвоение является некомпактным связным одномерным многообразием без края и, следовательно, гомеоморфно  $\mathbb{R}^1$ , а само оно гомеоморфно части прямой. Так как эта часть связна, замкнута, некомпактна и отлична от всей прямой, то она гомеоморфна  $\mathbb{R}^1$ .

Наподобие одномерных многообразий, полной топологической классификацией обладают двумерные многообразия, во всяком случае, компактных. Мы приведем ниже эту классификацию, но она потребует некоторых дополнительных определений и теорем, изложению которых посвящены ближайшие параграфы. Что же касается многообразий размерности 3 и выше, никакой удовлетворительной топологической классификации для них не существует.

### § 3. Гладкие многообразия

Пусть  $X$  — произвольное  $n$ -мерное многообразие (с краем или без). Его атласом называется его открытое покрытие  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , снабженное гомеоморфизмами  $\varphi_\alpha$  множеств  $U_\alpha$  на открытые подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$  (или  $\mathbb{R}^n_-$  при наличии края). Пары  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  называются картами атласа или локальными системами координат. Если  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  — атлас, то для любых  $\alpha, \beta$  определено сквозное отображение

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\varphi_\beta} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

связывающее два открытых подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{R}^n_-$ . Это отображение называется отображением перехода от  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  к  $(U_\beta, \varphi_\beta)$ . Если все отображения перехода гладки (т.е. их координатные функции обладают всеми частными производными всех порядков), то атлас называется гладким.

В топологии рассматривают целый спектр гладкостей: принадлежность классу  $C^r$  с  $1 \leq r \leq \infty$  (т.е. наличие непрерывных частных производных до порядка  $r$  включительно), аналитичность; комплексная аналитичность; мы для простоты ограничиваемся данным выше определением. Два гладких атласа называются (гладко) эквивалентными, если их объединение есть гладкий атлас (т.е. если отображения перехода от карт одного атласа к картам другого атласа гладки). Класс эквивалентных атласов называется гладкой структурой. Многообразию с фиксированной гладкой структурой называется гладким многообразием.

Укажем на логическое различие между понятиями многообразия и гладкого многообразия: первое есть топологическое пространство, обладающее некоторым дополнительным свойством, второе есть топологическое пространство, обладающее дополнительным свойством и наделенное дополнительной структурой.

Для гладких многообразий определяются гладкие отображения (очевидным образом) и диффеоморфизмы (гладкие гомеоморфизмы, обратные к которым также гладки). Диффеоморфизмы могут быть определены также с помощью локальных координат: это такие отображения  $f: X \rightarrow Y$ , что если  $x \in X$  и  $(U, \varphi), (V, \psi)$  — карты из структурных атласов многообразий  $X, Y$ , покрывающие  $x$  и  $f(x)$ , то якобиан сквозного отображения

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

в точке  $x$  отличен от нуля.

С переходом от многообразий к гладким многообразиям связаны две фундаментальные проблемы. 1°. Всякое ли многообразие обладает гладкой структурой? 2°. Обязаны ли гомеоморфные гладкие многообразия быть диффеоморфными? (Второй вопрос не следует смешивать с вопросом о наличии на многообразии неэквивалентных гладких структур. Такие структуры всегда бывают в изобилии: например, если  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — негладкий гомеоморфизм, то карта  $(\mathbb{R}, \varphi)$  определяет в  $\mathbb{R}$  гладкую структуру, не эквивалентную стандартной глад-

кой структуре; тем не менее многообразие  $\mathbb{R}$  с этой структурой диффеоморфно  $\mathbb{R}$  со стандартной структурой — диффеоморфизмом служит  $\mathcal{C}$ . Этот пример хорошо иллюстрирует различие между диффеоморфностью и эквивалентностью структур: если  $\alpha$  и  $\beta$  — гладкие структуры на одном и том же многообразии  $X$ , то неэквивалентность структур  $\alpha$  и  $\beta$  означает, что тождественное отображение  $X \rightarrow X$  не является диффеоморфизмом между гладкими многообразиями  $(X, \alpha), (X, \beta)$ , а недиффеоморфность этих многообразий означает, что никакое отображение  $X \rightarrow X$  не является диффеоморфизмом между ними.) Обе проблемы в настоящее время решены (Кервер, 1960 г. и Милнор, 1956 г.), и ответ на оба вопроса отрицателен: бывают многообразия (размерности  $\geq 8$ ), не допускающие никакой гладкой структуры, и имеется ровно 28 попарно недиффеоморфных многообразий, гомеоморфных семимерной сфере.

Примеры гладких многообразий.  $0^0$ .  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^n$  — гладкие многообразия. Гладкая структура определяется атласом, составленным из единственной карты тождественного отображения.

$1^0$ . Гладкие поверхности в  $\mathbb{R}^n$ . Речь идет о подмножестве  $X$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , таком, что каждая точка  $y \in \mathbb{R}^n$  обладает окрестностью  $U$  с  $k \leq n$  гладких функций  $f_1, \dots, f_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что матрица  $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}$  имеет во всех точках области  $U$  ранг  $k$  и что

$$X \cap U = \{y \in U \mid f_1(y) = 0, \dots, f_k(y) = 0\}.$$

Такое  $X$  является гладким  $(n-k)$ -мерным многообразием. Структура определяется так. Для  $x \in X$  фиксируем окрестность  $U_x \subset \mathbb{R}^n$  с функциями  $f_{x,i}: U_x \rightarrow \mathbb{R}$  — как в предыдущем определении. Пусть  $i_1(x), \dots, i_k(x)$  — номера столбцов вышеуказанной матрицы частных производных, составляющих ее невырожденный минор, и  $j_1(x), \dots, j_{n-k}(x)$  — номера остальных столбцов. Функции  $x_{j_1(x)}, \dots, x_{j_{n-k}(x)}$ ,  $f_1, \dots, f_k$ , определенные в  $U_x$ , имеют в точке  $x$  ненулевой якобиан и следовательно, определяют диффеоморфизм некоторой содержащейся в  $U_x$  окрестности  $V_x$  точки  $x$  на некоторое открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ;  $X \cap V_x$  при этом диффеоморфизме отображается в  $(n-k)$ -мерную плоскость. Пересечение  $X \cap V_x$  с сужением на него нашего диффеоморфизма составляет карту на  $X$ , и такие карты составляют гладкий атлас. Таким образом,  $X$  — гладкое многообразие.

$1^0$ . Два дополнения. Подмножество  $n$ -мерного гладкого многообразия, локально определяемое, наподобие  $X$  в предыдущем примере,  $k$  уравнениями с гладкими и независимыми левыми частями, также является  $(n-k)$ -мерным гладким многообразием; оно называется подмногообразием исходного многообразия.

$2^0$ . Подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$  или  $n$ -мерного гладкого многообразия, локально определяемое  $k$  независимыми уравнениями или  $k$  независимыми уравнениями и одним (независимым от них) неравенством есть гладкое многообразие с краем. (Сформулируйте условия, при выполнении которых подмножество гладкого многообразия с краем будет гладким многообразием — с краем или без).

2°. Проективные пространства. Напомним, что вещественное проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  есть множество прямых в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через 0. Можно описать  $\mathbb{R}P^n$  как факторпространство пространства  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$  по отношению эквивалентности  $(x_0, \dots, x_n) \sim (tx_0, \dots, tx_n)$  при  $t \neq 0$ ; это описание наделяет  $\mathbb{R}P^n$  топологией. Образ точки  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$  при канонической проекции  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}P^n$  обозначается через  $(x_0 : \dots : x_n)$ ; "однородные координаты"  $x_0, \dots, x_n$  точки  $(x_0 : \dots : x_n)$  не все равны 0 и определены с точностью до пропорциональности. Положим для  $i = 0, \dots, n$

$$U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$$

и определим отображение  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  формулой

$$\varphi_i(x_0 : \dots : x_n) = (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i).$$

Очевидно,  $\varphi_i$  — гомеоморфизмы и множества  $U_i$  покрывают  $\mathbb{R}P^n$ ; таким образом,  $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$  есть атлас. Отображения перехода

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

(мы считаем, что  $i < j$ ) устроены так:

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_j \neq 0\} \rightarrow \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_{i+1} \neq 0\},$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left( \frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_i}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right).$$

Очевидно, это — гладкие отображения, так что мы ввели в  $\mathbb{R}P^n$  гладкую структуру. Аналогичным образом определяется гладкая структура в комплексных проективных пространствах.

3°. Многообразия Грассмана. Речь идет о пространствах  $G(n, k)$  всех  $k$ -мерных подпространств пространства  $\mathbb{R}^n$ . Для  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  обозначим через  $U_{j_1, \dots, j_k}$  множество всех подпространств из  $G(n, k)$ , проектирующихся без вырождения на плоскость координатных осей с номерами  $j_1, \dots, j_k$ . Можно сказать, что  $U_{j_1, \dots, j_k}$  — это совокупность подпространств, которые можно представить уравнениями

$$\begin{cases} x_{j_1} = a_{11}x_{i_1} + \dots + a_{1, n-k}x_{i_{n-k}}, \\ \dots \\ x_{j_k} = a_{k1}x_{i_1} + \dots + a_{k, n-k}x_{i_{n-k}}, \end{cases} \quad (*)$$

где  $i_1, \dots, i_{n-k}$  — записанное по возрастанию дополнение в  $\{1, \dots, n\}$  до полного набора  $j_1, \dots, j_k$ . Относя подпространству  $(*)$  числа

$$a_{11}, \dots, a_{1, n-k}; a_{21}, \dots, a_{2, n-k}; \dots; a_{k1}, \dots, a_{k, n-k},$$

мы получаем гомеоморфизм  $\varphi_{j_1, \dots, j_k}$  между  $U_{j_1, \dots, j_k}$  и  $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ . Ясно также, что множества  $U_{j_1, \dots, j_k}$  покрывают  $G(n, k)$ ; таким образом,  $\{(U_{j_1, \dots, j_k}, \varphi_{j_1, \dots, j_k})\}$  есть атлас. При  $k=1$  этот атлас превращается в предыдущий атлас для проективного пространства.



Отображения перехода между картами этого атласа записываются довольно громоздкими формулами, и мы приведем эти формулы лишь в случае "смежных" карт, т.е. таких карт  $U_{j_1 \dots j_k}, U_{j'_1 \dots j'_k}$ , что (при некотором  $\ell$ )  $j'_1 = j_1, \dots, j'_{\ell-1} = j_{\ell-1}, j'_\ell = j_\ell \pm 1, j'_{\ell+1} = j_{\ell+1}, \dots, j'_k = j_k$  (Этого достаточно: точка многообразия Грассмана, принадлежащая пересечению двух из наших карт, принадлежит целой цепочке смежных карт, соединяющих одну карту с другой.) Если  $\gamma \in U_{j_1 \dots j_k} \cap U_{j'_1 \dots j'_k}$ , где  $U_{j_1 \dots j_k}, U_{j'_1 \dots j'_k}$  — смежные карты с  $j'_\ell = j_\ell + 1$ , то

$$\varphi_{j_1 \dots j_k} (U_{j_1 \dots j_k} \cap U_{j'_1 \dots j'_k}) = \varphi_{j'_1 \dots j'_k} (U_{j_1 \dots j_k} \cap U_{j'_1 \dots j'_k}) = \{a_{kl} \neq 0\},$$

где  $k = j_\ell - \ell + 1$ , и если

$$\varphi_{j_1 \dots j_k}(\gamma) = \{c_{st}\}, \quad \varphi_{j'_1 \dots j'_k}(\gamma) = \{c'_{st}\},$$

$$c'_{st} = \begin{cases} (c_{st}c_{k\ell} - c_{kt}c_{s\ell})c_{k\ell}^{-1}, & \text{если } s \neq k, t \neq \ell, \\ c_{s\ell}c_{k\ell}^{-1}, & \text{если } s \neq k, t = \ell, \\ -c_{kt}c_{k\ell}^{-1}, & \text{если } s = k, t \neq \ell, \\ c_{k\ell}^{-1}, & \text{если } s = k, t = \ell. \end{cases}$$

(проверьте!). Как видно, отображения перехода гладки, так что и многообразие Грассмана получает гладкую структуру.

Дословно так же наделяются гладкой структурой комплексные многообразия Грассмана.

#### § 4. Ориентации

Пусть  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  — гладкий атлас многообразия  $X$  со связными  $U_\alpha$ , и пусть  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ . Обозначим через  $\varepsilon_{\alpha\beta}(x)$  число, равное  $\pm 1$  в зависимости от знака якобиана отображения перехода  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  в точке  $\varphi_\alpha(x)$ . [Очевидно,  $\varepsilon_{\alpha\beta}(x) = \varepsilon_{\beta\alpha}(x)$ .] Если  $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv 1$  в  $U_\alpha \cap U_\beta$ , то говорят, что карты  $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$  имеют согласованные ориентации. Если  $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv -1$ , то эти карты имеют противоположные ориентации. Наконец, если функция  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  не постоянна в  $U_\alpha \cap U_\beta$ , то карты  $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$  не имеют определенного отношения ориентаций. Атлас называется ориентируемым, если существует функция  $\gamma: A \rightarrow \{\pm 1\}$ , такая, что для любых  $\alpha, \beta$  и  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x) = \gamma(\alpha)\gamma(\beta)$$

(в частности, пересекающиеся карты ориентируемого атласа всегда имеют определенное отношение ориентаций). Функция  $\gamma$ , обладающая указанным свойством, называется ориентацией атласа.

Ориентации  $\gamma, \gamma'$  атласов  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}_{\alpha \in A'}$  (со связными картами) одного и того же многообразия  $X$  называются согласованными, если составленное ими отображение  $A \cup A' \rightarrow \{\pm 1\}$  есть ориентация составного атласа  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ .

Лемма. Если какой-нибудь атлас (со связными картами) гладкого многообра-



зия ориентируем, то ориентируем и всякий другой атлас. Более того, для любой ориентации любого атласа существует единственная согласованная с ней ориентация любого другого атласа.

Доказательство — упражнение.

Многообразие называется ориентируемым, если выполнено одно из эквивалентных (в силу леммы) условий:

- ориентируем какой-нибудь его атлас (со связными картами);
- ориентируем какой-угодно его атлас (со связными картами).

Выбор ориентации у какого-нибудь атласа определяет, как говорят, ориентацию многообразия. Если многообразие ориентируемо, то получает определенную ориентацию любой его атлас (со связными картами) и даже любая отдельная (связная) карта.

Узнать, ориентируем ли атлас можно с помощью следующего очевидного предложения: атлас ориентируем тогда и только тогда, когда любые его перекрывающиеся карты имеют определенное отношение ориентаций и для всякой цепочки  $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)$  с непустыми пересечениями  $U_1 \cap U_2, \dots, U_{n-1} \cap U_n, U_n \cap U_1$

$$\varepsilon_{1,2} \dots \varepsilon_{n-1,n} \varepsilon_{n,1} = 1$$

Пример. Рассмотрим наш атлас многообразия  $\mathbb{R}P^n$ . Якобиан отображения перехода от карты  $(U_i, \varphi_i)$  к карте  $(U_j, \varphi_j)$  при  $i < j$  (см. формулы в § 3) в точке  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  (определенный при  $y_j \neq 0$ ) равен  $(-1)^{j-i} / y_j^{n+1}$  (проверьте!). Мы видим, что если  $n$  четно, то карты  $U_i, U_j$  не имеют определенного отношения ориентаций, так что в этом случае атлас неориентируем. При нечетном  $n$   $\varepsilon_{ij} = (-1)^{j-i}$  и формула  $\gamma(x) = (-1)^x$  определяет ориентацию. Таким образом, проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  ориентируемо тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно (мы исключаем случай  $n=0$ ).

Задача. Многообразие Грассмана  $G(n, k)$  с  $0 < k < n$  ориентируемо тогда и только тогда, когда  $n$  четно.

Задача. Комплексные проективные пространства и комплексные многообразия Грассмана всегда ориентируемы.

(Комплексные многообразия вообще всегда ориентируемы — разберитесь в смысле этого высказывания и докажите его.)

Задача. Односвязные многообразия ориентируемы.

Задача. Всякое многообразие имеет ориентируемую двулистную покрывающую (в широком смысле).

#### § 4. Касательные пространства

Понятие касательного вектора к гладкому многообразию может считаться общеизвестным, если это многообразие — гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^n$ . В общем случае определение приходится выдумывать. Мы приведем два эквивалентных определения. Первое: касательный вектор в точке  $\alpha_0 \in X$  — это оператор, ставящий в соответствие гладкой функции  $f$ , определенной в окрестности точки  $\alpha_0$  на  $X$  число  $v(f)$ , такое, что  $v(fg) = f(\alpha_0)v(g) + v(f)g(\alpha_0)$

зия ориентируем, то ориентируем и всякий другой атлас. Более того, для любой ориентации любого атласа существует единственная согласованная с ней ориентация любого другого атласа.

Доказательство — упражнение.

Многообразие называется ориентируемым, если выполнено одно из эквивалентных (в силу леммы) условий:

- ориентируем какой-нибудь его атлас (со связными картами);
- ориентируем какой-угодно его атлас (со связными картами).

Выбор ориентации у какого-нибудь атласа определяет, как говорят, ориентацию многообразия. Если многообразие ориентируемо, то получает определенную ориентацию любой его атлас (со связными картами) и даже любая отдельная (связная) карта.

Узнать, ориентируем ли атлас можно с помощью следующего очевидного предложения: атлас ориентируем тогда и только тогда, когда любые его перекрывающиеся карты имеют определенное отношение ориентаций и для всякой цепочки  $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)$  с непустыми пересечениями  $U_1 \cap U_2, \dots, U_{n-1} \cap U_n, U_n \cap U_1$

$$\varepsilon_{1,2} \dots \varepsilon_{n-1,n} \varepsilon_{n,1} = 1$$

Пример. Рассмотрим наш атлас многообразия  $\mathbb{R}P^n$ . Якобиан отображения перехода от карты  $(U_i, \varphi_i)$  к карте  $(U_j, \varphi_j)$  при  $i < j$  (см. формулы в § 3) в точке  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  (определенный при  $y_j \neq 0$ ) равен  $(-1)^{j-i} / y_j^{n+1}$  (проверьте!). Мы видим, что если  $n$  четно, то карты  $U_i, U_j$  не имеют определенного отношения ориентаций, так что в этом случае атлас неориентируем. При нечетном  $n$   $\varepsilon_{ij} = (-1)^{j-i}$  и формула  $\gamma(i) = (-1)^i$  определяет ориентацию. Таким образом, проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  ориентируемо тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно (мы исключаем случай  $n=0$ ).

Задача. Многообразие Грассмана  $G(n, k)$  с  $0 < k < n$  ориентируемо тогда и только тогда, когда  $n$  четно.

Задача. Комплексные проективные пространства и комплексные многообразия Грассмана всегда ориентируемы.

(Комплексные многообразия вообще всегда ориентируемы — разберитесь в смысле этого высказывания и докажите его.)

Задача. Односвязные многообразия ориентируемы.

Задача. Всякое многообразие имеет ориентируемую двулистную накрывающую (в широком смысле).

#### § 4. Касательные пространства

Понятие касательного вектора к гладкому многообразию может считаться общеизвестным, если это многообразие — гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^n$ . В общем случае определение приходится выдумывать. Мы приведем два эквивалентных определения. Первое: касательный вектор в точке  $\alpha_0 \in X$  — это оператор, ставящий в соответствие гладкой функции  $f$ , определенной в окрестности точки  $\alpha_0$  на  $X$  число  $v(f)$ , такое, что  $v(fg) = f(\alpha_0)v(g) + v(f)g(\alpha_0)$

Второе: касательный вектор  $v$  в точке  $x_0 \in X$  — это функция, ставящая в соответствие покрывающей точку  $x_0$  карте  $(U, \varphi)$  из атласа, задающего гладкую структуру на  $X$ , набор из  $n = \dim X$  чисел,  $v_\varphi^1, \dots, v_\varphi^n$ , такая, что если  $(V, \psi)$  — другая карта, покрывающая  $x_0$ , и  $F = (F^1, \dots, F^n) : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  — отображение перехода, то

$$v_\psi^i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \Big|_{\varphi(x_0)} v_\varphi^j \quad (*)$$

(где  $y^j$  — координаты в  $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ ). Смысл второго определения понятен (выбор локальных координат на многообразии естественно приводит к выбору базиса в касательном пространстве); смысл первого определения состоит в том, что если задан касательный вектор к многообразию, то для гладкой функции можно вычислить значение производной в данной точке в направлении данного вектора. Эквивалентность между определениями формально устанавливается так. Если задан касательный вектор в точке  $x_0$  в смысле первого определения, то карте, покрывающей  $x_0$ , отвечает набор значений этого вектора на координатных функциях карты. Если же  $v$  — касательный вектор в смысле второго определения и  $f$  — гладкая функция, то значение оператора  $v$  на  $f$  вычисляется при помощи произвольной покрывающей  $x_0$  карты  $(U, \varphi)$  по формуле

$$v(f) = \sum_i v_\varphi^i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial y^i},$$

где  $\partial (f \circ \varphi^{-1}) / \partial y^i$  — частные производные функции  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  по координатам  $y^i$  в  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . (Независимость этого оператора от карты выводится из формулы (\*).)

Касательные векторы к  $X$  в точке  $x_0$  составляют (по отношению к очевидным операциям) линейное пространство; это пространство обозначается через  $T_{x_0} X$  и называется касательным пространством к  $X$  в точке  $x_0$ . Множество  $TX$  всех вообще касательных векторов к  $X$ , то есть  $\bigcup_{x_0 \in X} T_{x_0} X$ , обладает естественной структурой гладкого многообразия. Эта структура определяется атласом, который строится по структурному атласу  $\{(U, \varphi)\}$  многообразия  $X$  и состоит из карт

$$(TU, T\varphi), \text{ где } TU = \bigcup_{x_0 \in U} T_{x_0} X,$$

$$T\varphi : TU \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad T\varphi(v) = (\varphi(v), (v_\varphi^1, \dots, v_\varphi^n)).$$

Предыдущие определения применимы к случаю, когда  $X$  есть гладкое многообразие с краем. В этом случае край имеет и  $TX$ .

Во всех случаях  $\dim TX = 2 \dim X$ .

Упражнения:  $T\mathbb{R}^n$  диффеоморфно  $\mathbb{R}^{2n}$ ;  $TS^1$  диффеоморфно  $S^1 \times \mathbb{R}$ ;  $TS^2$  не диффеоморфно  $S^2 \times \mathbb{R}^2$ .

Если  $h$  — гладкое отображение гладкого многообразия  $X$  в гладкое многообразие  $Y$ , то возникает гладкое отображение  $dh : TX \rightarrow TY$ ; его легко оп-

ределить с помощью первого определения касательного вектора:  $[dh(v)](f) = v(f, h)$  [ $f$  - гладкая функция на  $Y$ ]. Очевидно,  $dh(T_{x_0}X) \subset T_{h(x_0)}Y$ , и получающееся отображение

$$d_{x_0}h: T_{x_0}X \rightarrow T_{h(x_0)}Y$$

линейно. Отображение  $dh$  называется дифференциалом отображения  $h$ , отображение  $d_{x_0}h$  - дифференциалом в точке  $x_0$ . Важен случай, когда  $Y = \mathbb{R}$ , т.е. когда  $h$  есть просто гладкая функция на  $X$ . В этом случае дифференциал

$$d_{x_0}h: T_{x_0}X \rightarrow T_{h(x_0)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

относит касательному вектору  $v \in T_{x_0}X$  число  $v(h)$ , т.е. значение производной функции  $h$  вдоль вектора  $x_0$ ; как мы видим, наше определение дифференциала согласовано с определением дифференциала функции, принятом в анализе.

### § 5. Теория Морса

Пусть  $X$  - гладкое многообразие и  $f$  - гладкая функция на  $X$ . Точка  $x_0 \in X$  называется критической точкой функции  $f$ , если  $d_{x_0}f = 0$ , т.е. если равна 0 производная функции  $f$  в точке  $x_0$  по любому направлению.

Если  $x_0$  - критическая точка функции  $f$ , то в касательном пространстве  $T_{x_0}X$  возникает квадратичная форма - "второй дифференциал" или "форма Гесса" функции  $f$ . Определение таково: если  $x^1, \dots, x^n$  - локальные координаты в окрестности точки  $x_0$ , т.е. координатные функции некоторой карты  $(U, \varphi)$ , покрывающей  $x_0$ , то значение функции на векторе с координатами  $v_\varphi^1, \dots, v_\varphi^n$  равно

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{x_0} v_\varphi^i v_\varphi^j.$$

Для проверки корректности этого определения мы должны показать, что если  $y^1, \dots, y^n$  - другие локальные координаты в окрестности точки  $x_0$ , то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{x_0} = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^l} \Big|_{x_0}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{x_0} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \Big|_{x_0} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^k} \right) \Big|_{x_0} \\ &= \boxed{\sum_k \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^k} \Big|_{x_0}} + \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^k} \right) \Big|_{x_0} = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \sum_l \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^l} \Big|_{x_0}. \end{aligned}$$

Очень важно, что слагаемое в траурной рамке равно 0, поскольку  $\frac{\partial f}{\partial y^k} \Big|_{x_0} = 0$

- точка  $x_0$  является критической. Если  $x_0$  - не критическая точка, то никакого инвариантно определенного второго дифференциала не существует: в окрестности не критической точки функция является в надлежащих локальных координатах линейной (даже координатной), и все ее вторые частные производные равны 0.

Критическая точка называется невыврожденной или морсовской, если фор-

ма Гесса невырождена (т.е. гессиан — определитель матрицы формы Гесса — отличен от нуля). Гладкая функция называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены. Функция Морса называется правильной, если ее значения в критических точках (они называются критическими значениями) попарно различны.

Заметим, что невырожденная критическая точка всегда является изолированной критической точкой (это легко проверить, но это видно и из доказываемой ниже теоремы 1), так что функция Морса на компактном многообразии всегда имеет конечное число критических точек.

Следующие две теоремы служат базой теории Морса.

Теорема 1. ("лемма Морса"). Если  $x_0$  — невырожденная критическая точка гладкой функции  $f$ , то существуют локальные координаты  $x^1, \dots, x^n$  в окрестности точки  $x_0$ , в которых  $x_0$  имеет координаты  $(0, \dots, 0)$  и в которых

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(x_0) + (x^1)^2 + \dots + (x^q)^2 - (x^{q+1})^2 - \dots - (x^n)^2,$$

где  $q$  — положительный индекс инерции формы Гесса.

(Обратите внимание на отсутствие в правой части формулы привески "+..." или "o(x)"!)

Теорема 2. На всяком гладком замкнутом (=компактном без края) многообразии существует правильная функция Морса.

Поскольку утверждение теоремы 1 носит локальный характер, в ее доказательстве можно считать, что  $(X, x_0) = (\mathbb{R}^n, 0)$ .

Лемма. Если  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция с  $g(0) = 0$ , то существуют такие гладкие функции  $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$g(x^1, \dots, x^n) = \sum_i x^i g_i(x^1, \dots, x^n).$$

Доказательство леммы. Достаточно положить

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial g(tx)}{\partial x^i} dt$$

(Нужное равенство следует из формулы  $\frac{d}{dt} g(tx^1, \dots, tx^n) = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i} g(tx^1, \dots, tx^n)$ .  
Можно считать, что  $f(x_0) = 0$ .)

Доказательство теоремы 1. В силу леммы,

$$f(x) = \sum x^i f_i(x).$$

Поскольку  $0 = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_0 = f_i(0) + \sum x^j \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(0) = f_i(0)$ , лемма применима и к функциям  $f_i$ :

$$f_j(x) = \sum x^j f_{ij}(x).$$

Положим  $g_{ij} = (f_{ij} + f_{ji})/2$ . Тогда  $g_{ij} = g_{ji}$  и

$$f(x) = \sum g_{ij}(x) x^i x^j.$$

При этом  $g_{ij}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)$ , так что матрица  $\|g_{ij}(0)\|$  невырождена. Оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство теоремы из курса ли-

нейной алгебры о приведении формы к каноническому виду, и мы приведем это доказательство в сокращенном виде. Произведя, если нужно, перестановку координат и/или замену  $(x^1)' = x^1 + x^2$ ,  $(x^2)' = x^1 - x^2$ ,  $(x^3)' = x^3, \dots, (x^n)' = x^n$ , мы добиваемся неравенства  $g_{11}(0) \neq 0$ . После этого мы вводим новые координаты формулой

$$(x^1)' = x^1 - \frac{1}{2} \frac{g_{12}}{g_{11}} x^2 - \dots - \frac{1}{2} \frac{g_{1n}}{g_{11}} x^n, \quad (x^2)' = x^2, \dots, (x^n)' = x^n,$$

и наша функция принимает вид

$$f(x) = g_{11}(x) (x^1)^2 + \sum_{i,j \geq 2} g_{ij}(x) x^i x^j.$$

(Разумеется, новые координаты определены только там, где  $g_{11} \neq 0$ , но этого нам достаточно, поскольку  $g_{11} \neq 0$  в окрестности 0.) Применяя подобное преобразование ко второму слагаемому, мы отделяем член с  $(x^2)^2$  и т.д., пока функция не приведет к виду

$$f(x) = g_{11}(x) (x^1)^2 + \dots + g_{nn}(x) (x^n)^2$$

После этого нам достаточно сделать замену  $(x^i)' = \sqrt{|g_{ii}(x)|} x^i$  и, в последний раз, перестановку координат.

Доказательству теоремы 2 мы предположим три леммы.

Лемма 1. (выжимка из "теоремы Морса - Сарда"). Пусть  $F: I^n \rightarrow I^n$  - гладкое отображение куба в куб. Обозначим через  $A$  множество точек  $x \in I^n$ , в которых равен 0 якобиан  $DF$  отображения  $F$  (т.е. вырожден дифференциал  $d_x F$ ). Тогда множество  $F(A)$  имеет меру 0.

Доказательство леммы. Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и разобьем  $I^n$  на  $N^n$  маленьких кубиков, в пределах каждого из которых якобиан  $DF$  изменяется не больше, чем на  $\varepsilon$ . Согласно известным формулам анализа, для кубика  $i^n$  разбиения

$$\text{mes } F(i^n) = \int_{i^n} |DF| dx^1 \dots dx^n \leq \text{mes } i^n \max_{i^n} |DF|,$$

и, следовательно,

$$\text{mes } F(A) \leq \bigcup_{\text{mes}} i^n \cap A \neq \emptyset \text{mes } F(i^n) \leq \sum_{i^n \cap A \neq \emptyset} \text{mes } i^n \max_{i^n} |DF| \leq \varepsilon \sum_{i^n \cap A \neq \emptyset} \text{mes } i^n \leq \varepsilon \text{mes } I^n = \varepsilon.$$

(Формулировку и доказательство всей теоремы Морса - Сарда с комментариями см. в книге Рохлин-Фукс, Начальный курс топологии, п.3.3.2. или в книге Хирша "Дифференциальная топология", гл.3, п.1.)

Лемма 2. Пусть  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  - произвольная гладкая функция. Тогда существуют сколь угодно малые по модулю вещественные числа  $a_1, \dots, a_n$  такие, что

$$f_a(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n) - a_1 x^1 - \dots - a_n x^n$$

- функция Морса.

Доказательство. Рассмотрим отображение  $\text{grad } f: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  с координатными функциями  $\partial f / \partial x^1, \dots, \partial f / \partial x^n$ . Если  $x$  - критическая точка функции  $f_a$ , то  $(\text{grad } f)(x) = a$  и матрица вторых производных функции  $f_a$  в точке  $x$  совпадает с якобиевой матрицей отображения  $\text{grad } f$  в этой точке. Таким обра-



зом, если  $a$  не принадлежит  $(\text{grad } f)$ -образу множества точек вырождения дифференциала отображения  $\text{grad } f$ , то функция  $f_a$  не имеет вырожденных критических точек. Это наблюдение делает лемму 2 следствием леммы 1.

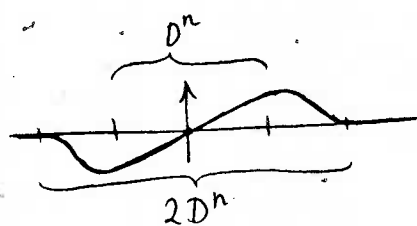
Лемма 3. Если  $f$  есть функция Морса на  $D^n$ , то существует такое  $\varepsilon$  что если частные производные порядков 0, 1, 2 функции  $f'$  отличаются от соответствующих производных функции  $f$  не больше чем на  $\varepsilon$ , то  $f'$  — тоже функция Морса.

Это очевидно: морсовость функции  $f$  равносильна неравенству

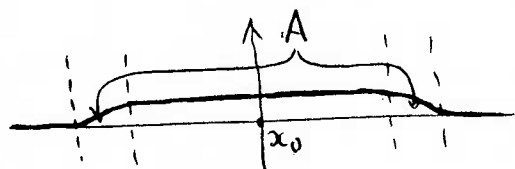
$$\sum |\partial f / \partial x^i| + |\det \| \partial^2 f / \partial x^i \partial x^j \| | > 0,$$

и в качестве  $\varepsilon$  нужно взять минимум в  $D^n$  левой части этого неравенства, деленный на  $n+1$  (если этот минимум меньше 1).

Доказательство теоремы 2. Для начала мы не будем заботиться о правильности функции Морса. Пусть  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^N$  — такой конечный атлас нашего замкнутого многообразия  $X$ , что  $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$  и что уже множества  $\varphi_i^{-1}(D^n)$  покрывают  $X$ . Обозначим для  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  через  $g_a$  функцию на  $\mathbb{R}^n$ , определяемую формулой  $g_a(x^1, \dots, x^n) = a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$  на  $D^n$  и равную 0 вне  $2D^n$ ; при этом мы предполагаем, что  $g_a$  гладко зависит от  $a$  и стремится к 0 со всеми производными при  $a \rightarrow 0$ . Мы определяем функцию  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  как сумму  $\sum_i g_{a_{(i)}} \circ \varphi_i$  (слагаемое  $g_{a_{(i)}} \circ \varphi_i$  вне  $U_i$  мы доопределяем нулем). Последовательность  $a_{(i)}$  точек пространства  $\mathbb{R}^n$  выбирается так. Если  $a_{(1)}, \dots, a_{(i-1)}$  уже выбраны, то  $a_{(i)}$  подчинено двум условиям: во-первых, функция  $\sum_{j=1}^{i-1} g_{a_{(j)}} \circ \varphi_j$  должна быть функцией Морса на  $\varphi_i^{-1}(D^n)$  [этого можно достичь в силу леммы 2] и, во-вторых, модуль  $|a_{(i)}| = \text{dist}(0, a_{(i)})$  должен быть столь мал, что прибавление слагаемого  $g_{a_{(i)}} \circ \varphi_i$  не нарушит морсовости функции  $\sum_{j=1}^{i-1} g_{a_{(j)}} \circ \varphi_j$  на  $\varphi_i^{-1}(D^n), \dots, \varphi_{i-1}^{-1}(D^n)$  [см. лемму 3]. Очевидно,  $f$  есть функция Морса, хотя не обязательно правильная. Ее можно сделать правильной, добавив к ней нужное количество слагаемых такого вида:



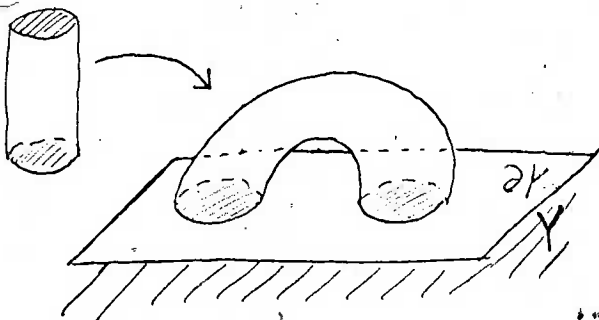
( $x_0$  — критическая точка функции  $f$ , множество  $A$  не содержит критических точек функции  $f$  и первые производные прибавляемой функции на  $A$  столь малы, что новые критические точки на  $A$  не появляются).



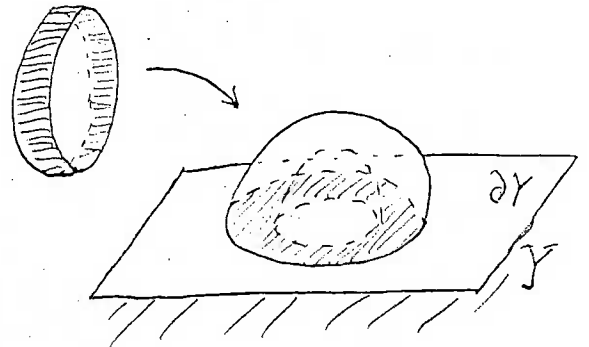
Теперь мы переходим к основным теоремам теории Морса. Эта теория предполагает, что на замкнутом многообразии  $X$  задана правильная функция Морса  $f$ . Для  $c \in \mathbb{R}$  через  $X_{\leq c}$  обозначается "множество меньших значений"  $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ . Очевидно, если  $c < \min f$ , то  $X_{\leq c} = \emptyset$ , а если  $c \geq \max f$ , то  $X_{\leq c} = X$ . Теория Морса прослеживает, как изменяется топология множества  $X_{\leq c}$  при возрастании  $c$  на интервале  $(\min f, \max f)$ . Ее основными результатами являются следующие две теоремы:

**Теорема 3.** Если на отрезке  $[c_1, c_2]$  отсутствуют критические значения функции  $f$ , то многообразия  $X_{\leq c_1}$ ,  $X_{\leq c_2}$  диффеоморфны; диффеоморфизм может быть сделан тождественным на  $X_{\leq c_1 - \varepsilon}$  с произвольным  $\varepsilon > 0$ .

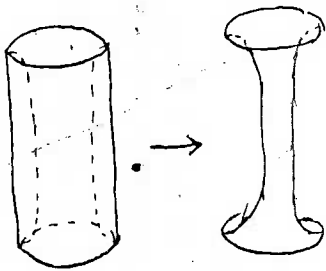
Формулировка второй основной теоремы требует предварительного описания полустандартной конструкции, называемой "приклеиванием ручки". Пусть  $Y$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие с краем и  $\eta: S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow \partial Y$  — некоторое вложение. Рассмотрим произведение  $D^k \times D^{n-k}$ ; край этого произведения есть объединение  $(S^{k-1} \times D^{n-k}) \cup (D^k \times S^{n-k-1})$  (причем  $(S^{k-1} \times D^{n-k}) \cap (D^k \times S^{n-k-1}) = S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ ). Мы приклеиваем  $D^k \times D^{n-k}$  к  $Y$ , отождествляя каждую точку  $z \in S^{k-1} \times D^{n-k} \subset \partial(D^k \times D^{n-k}) \subset D^k \times D^{n-k}$  с  $\eta(z) \in \partial Y \subset Y$ . Получается топологическое многообразие, которое можно сделать гладким, если предварительно выбросить из  $D^k \times D^{n-k}$  небольшую часть, ограничиваемую поверхностью, имеющую касание бесконечного порядка с  $S^{k-1} \times D^{n-k}$  вдоль  $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ , как показано на рис. 30 в).



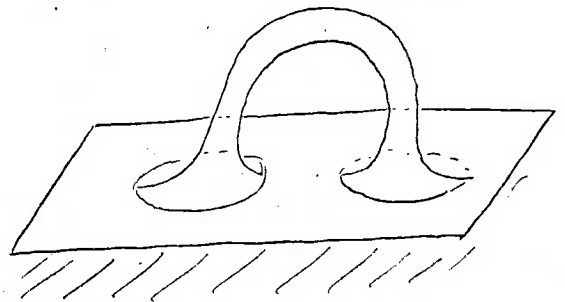
а) приклеивание ручки  
( $k=1, n=3$ )



б) приклеивание ручки  
( $k=2, n=3$ )



в) ущербление ручки



г) приклеивание ущербленной ручки

Рис. 30

Говорят, что расширенное многообразие (т.е.  $Y \cup_{\eta} (D^k \times D^{n-k})$ ) получено из  $Y$  приклеиванием ручки индекса  $k$ .

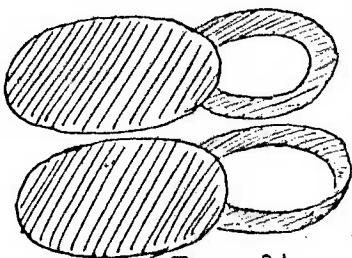


Рис. 31

**Комментарии к приклеиванию ручек.**  $\Gamma^0$ . Многообразие  $Y \cup_{\eta} (D^k \times D^{n-k})$  зависит не только от образа  $\eta(S^{k-1} \times D^{n-k})$ , но и от  $\eta$ . Например, приклеивание ручки индекса 1 к диску может сделать его цилиндром или лентой Мебиуса, причем то и другое может случиться при одном и том же множестве  $\eta(S^0 \times D^1)$  (рис. 31).

2°. Напротив, от произвола в выборе "ущербления"  $Y \cup (D^k \times D^{n-k})$  не зависит (с точностью до диффеоморфизма).

3°. Приклеивание ручки индекса 0. Сфера  $S^{-1}$  пуста, так что при  $k > 0$

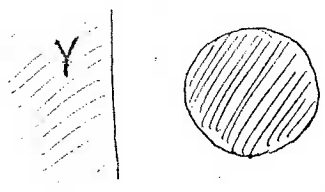


Рис. 32

вложение  $\eta$  определено на пустом множестве. Сама же ручка  $D^0 \times D^n = D^n$  отнюдь не пуста, но ее приклеивание производится без участия клея: просто к  $Y$  добавляется новая компонента  $D^n$  (рис. 32)

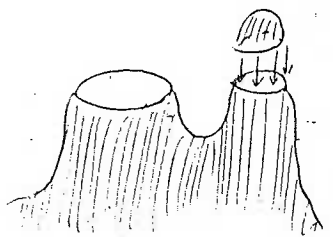


Рис. 33

4°. Приклеивание ручки индекса  $n$ . Если  $k = n$  то  $S^{k-1} \times D^{n-k} = S^{n-1}$ . Ввиду замкнутости сферы  $S^{n-1}$ , вложение  $\eta: S^{n-1} \rightarrow \partial Y$  обязательно является диффеоморфизмом на одну из компонент края  $\partial Y$ . Приклеивание же ручки состоит в том, что к этой компоненте (сферической) приклеивается шар, и эта компонента края исчезает (рис. 33).

5°. Приклеивание ручки индекса 0 увеличивает число компонент на 1; приклеивание ручки индекса 1 может уменьшить число компонент на 1; приклеивание ручек других индексов не оказывает воздействия на число компонент.

6°. Приклеивание ручки индекса 1 может ориентируемое многообразие сделать неориентируемым (но не наоборот!). Приклеивание ручек других индексов не оказывает воздействия на ориентируемость.

Теорема 4. Пусть  $f$  - правильная функция Морса на  $X$ , и пусть  $c_1, c_2$  - такие числа, что  $c_1 < c_2$  и на отрезке  $[c_1, c_2]$  функция  $f$  имеет единственное критическое значение  $c$ , причем  $c$  - внутренняя точка отрезка  $[c_1, c_2]$  и соответствующая критическая точка имеет индекс  $k$ . Тогда  $X_{\leq c_2}$  получается из  $X_{\leq c_1}$  приклеиванием ручки индекса  $k$ .

Иллюстрация к теоремам 3, 4.  $X$  - тор, расположенный в  $\mathbb{R}^3$  как показано на рис. 34,  $f$  - функция высоты  $(x, y, z) \mapsto z$ . Эта функция имеет четыре критических значения, 0, 1, 2, 3. Соответствующие критические точки имеют индексы 0, 1, 1, 2. На рис. видно, как то получается из пустого множества последовательным приклеиванием четырех ручек:

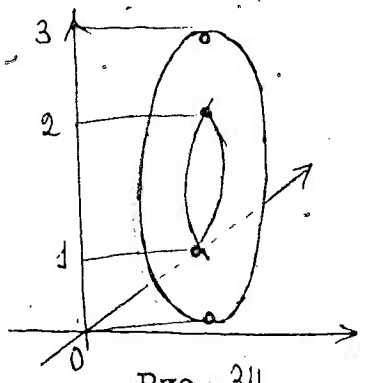


Рис. 34

$$\emptyset = X_{\leq -0,1} \xrightarrow{\substack{\text{прикл.} \\ \text{ручки} \\ \text{инд. 0}}} X_{\leq 0,1} = D^2 = X_{\leq 0,9} \xrightarrow{\substack{\text{прикл.} \\ \text{ручки} \\ \text{инд. 1}}} X_{\leq 1,1}$$

$$= \text{'сфера} \xrightarrow{\substack{\text{прикл.} \\ \text{ручки} \\ \text{инд. 1}}} X_{\leq 1,9} = \text{дворами} \xrightarrow{\substack{\text{прикл.} \\ \text{ручки} \\ \text{инд. 1}}} X_{\leq 2,1} = \text{тор с} \xrightarrow{\substack{\text{прикл.} \\ \text{ручки} \\ \text{инд. 1}}} X_{\leq 2,9} = \text{дырой}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{прикл.} \\ \text{ручки} \\ \text{инд. 2}}} X_{\leq 3,1} = \text{тор}$$

(См. рис. на след. стр.)

Приступаем к доказательству теорем. Пусть  $f$  - функция Морса на  $X$

Лемма. На  $X$  существует гладкое векторное поле  $\xi$  с двумя свойствами:

- (i)  $\xi$  обращается в 0 в критических точках функции  $f$  и только в них;
- (ii) в некритических точках производная функции  $f$  по векторам поля положительна.

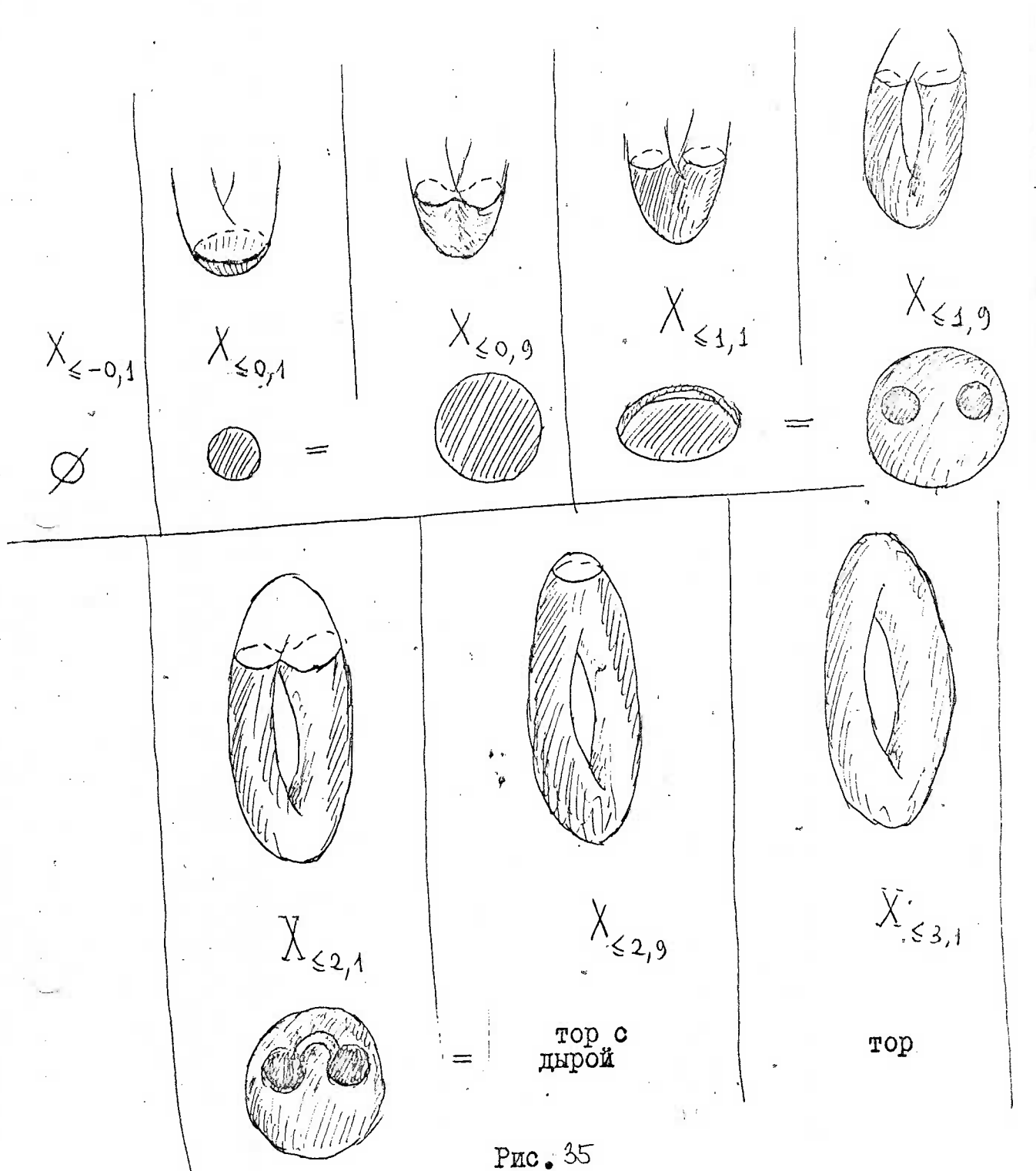


Рис. 35

Доказательство. Зафиксируем конечный атлас  $\{U_i, \varphi_i\}$  многообразия  $X$  и разбиение единицы  $\{\lambda_i\}$ , подчиненное покрытию  $\{U_i\}$  (т.е. набор гладких функций  $\lambda_i: X \rightarrow [0, 1]$ , таких, что  $\lambda_i(X \setminus U_i) = 0$  и что  $\sum \lambda_i = 1$ ; существование — упражнение). В  $U_i$  берем векторное поле  $\xi_i$  с координатами  $\partial f / \partial x_j$ , где  $x_j$  — локальные координаты в  $U_i$ . Затем поле  $\xi_i$  мы умножаем на  $\lambda_i$ , доопределяем  $\lambda_i \xi_i$  нулем вне  $U_i$  и полагаем  $\xi = \sum \lambda_i \xi_i$ .

Построенное векторное поле называется градиентноподобным для  $f$ . Из анализа известно, что через каждую точку многообразия  $X$ , не являющуюся

нулем поля  $\xi$  проходит единственная гладкая кривая ("линия тока поля"), ко-



Рис. 36

Градиентноподобное поле и линии тока для функции на плоскости с двумя критическими точками: минимумом и седлом

торая во всех точках касается поля. Очевидно, вдоль линий тока градиентноподобного векторного поля функция монотонно возрастает (производная положительна). Поскольку она не может возрасти неограниченно (многообразие  $X$  компактно), линия тока обязательно имеет конец в критической точке функции (как правило, в точке максимума).

В дальнейшем мы предполагаем фиксированным градиентноподобное поле  $\xi$  для функции  $f$ .

Доказательство теоремы 3. Предположим, что на отрезке  $[c', c'']$  нет критических значений функции  $f$ . Через каждую точку  $x$  многообразия  $X_{c'} = \{f=c'\}$  проходит единственная линия тока поля  $\xi$ , и эта линия в единственной точке протыкает  $X_{c''}$  (она не может кончиться раньше, потому что на отрезке  $[c', c'']$  нет критических значений). Обозначив эту точку через  $\varphi_{c', c''}(x)$ , мы получаем отображение  $\varphi_{c', c''} : X_{c'} \rightarrow X_{c''}$ , кото-

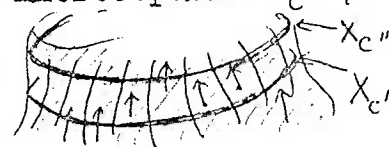


Рис. 37

рое, очевидно, является диффеоморфизмом (обратный диффеоморфизм строится так же, как  $\varphi_{c', c''}$  при помощи поля  $-\xi$  вместо  $\xi$ ). Предположим теперь, что критические значения отсутствуют на отрезке  $[c_1, c_2]$ ; тогда они отсутствуют и на отрезке  $[c_1 - \epsilon, c_2]$  с некоторым положительным  $\epsilon$ . Диффеоморфизм  $\varphi$  между  $X_{\leq c_1}$  и  $X_{\leq c_2}$  мы определяем формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } f(x) \leq c_1 - \epsilon, \\ \varphi_{f(x), h(f(x))}, & \text{если } f(x) > c_1 - \epsilon, \end{cases}$$

где  $h$  - гладкая функция  $[c_1 - \epsilon, c_1] \rightarrow [c_1 - \epsilon, c_2]$ , такая, что  $h(c_1 - \epsilon) = c_1 - \epsilon$ ,  $h'(c_1 - \epsilon) = h''(c_1 - \epsilon) = \dots = 0$ ,  $h(c_1) = c_2$ ,  $h'(c_1) = 1$  (см. график слева).

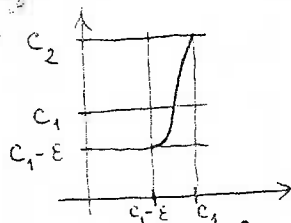


Рис. 38

Доказательство теоремы 4. Предположим, что между линиями уровня  $X_{c_1}, X_{c_2}$  лежит критическая точка  $x_0$  с критическим значением  $c$ ,  $c_1 < c < c_2$ . Согласно лемме Пурса,  $X$  обладает системой локальных

координат, в которой функция  $f$  представляется как  $c - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_k^2 + \alpha_{k+1}^2 + \dots + \alpha_n^2$ . На рисунке 39 а заштрихована попадающая в эту карту

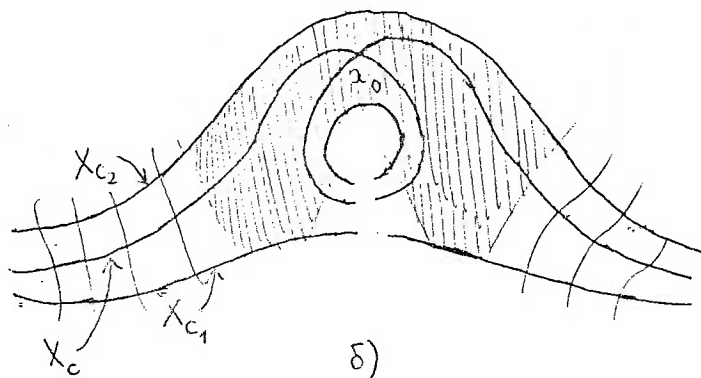


Рис. 39

часть множества  $\leq_{c_1} X \leq_{c_2}$ . Это и есть ручка индекса  $k$  (это видно более ясно на рис. 36б, который отличается от рисунка 36а лишь ракурсом). Более точно:  $X_{c_1}$  пересекается с нашей картой по  $S^{k-1} \times D^{n-k}$ . Часть многообразия  $\leq_{c_1} X \leq_{c_2}$ , лежащая вне карты, есть  $(X_{c_1} \setminus (S^{k-1} \times D^{n-k})) \times [c_1, c_2]$  — это доказывается уже известным нам способом с помощью линий тока градиентноподобного векторного поля. Эту часть, сгладив ее край, мы присоединяем к  $X_{c_1}$  от чего  $X_{\leq c_1}$  не меняется. <sup>(См. рис. 34.)</sup> Оставшаяся часть  $X_{\leq c_2}$  есть произведение  $D^k \times D^{n-k}$ , склеенное с  $X_{\leq c_1}$  по  $S^{k-1} \times D^{n-k}$ .

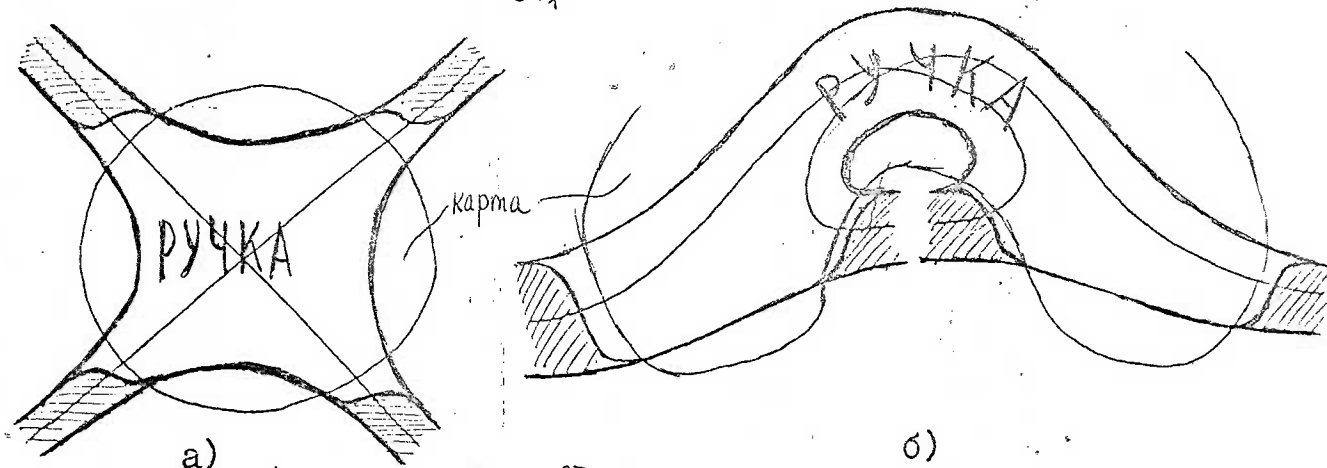


Рис. 37

Теорема доказана.

Упражнения. 1°. Доказать, что на связном многообразии существует функция Морса, имеющая только один максимум (локальный) и только один минимум. 2°. Доказать, что на произвольном замкнутом многообразии существует функция Морса, значение которой в каждой критической точке равно индексу этой точки. 3°. Доказать, что на сфере с любым числом ручек существует (неморсовская) гладкая функция, имеющая только три критических точки (при этом две из них будут невырожденны).

### § 6. Классификация двумерных компактных многообразий

Возьмем сферу  $S^2$  и сделаем в ней  $2g+h+k$  дыр. К первым  $2g$  дырам мы приклеиваем ручки. К следующим  $h$  мы приклеиваем по их границам

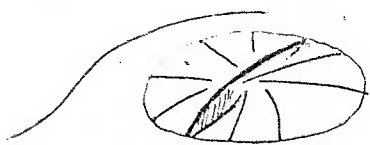


Рис. 38

ленты Меблуса (это приклеивание не может быть проделано в  $\mathbb{R}^3$ , но представление о нем может дать рис.

38: диаметрально противоположные точки края дыры соединяются отрезками, которые попарно не пересекаются). Остальные  $k$  дыр остаются незаклеенными. По-

лучающаяся поверхность называется сферой с  $g$  ручками,  $h$  пленками Меблуса и  $k$  дырами; она обозначается через  $S(g, h, k)$ . Заметим, что

$S(0, 0, 0)$  есть сфера,

$S(0, 0, 1)$  есть диск,

$S(0, 0, 2)$  есть цилиндр,

$S(1, 0, 0)$  есть тор,

$S(0, 1, 0)$  есть проективная плоскость,



$S(0,1,1)$  есть лента Мебиуса,  
 $S(0,2,0)$  есть бутылка Клейна.

Ясно также, что поверхность  $S(g, h, k)$  ориентируема тогда и только тогда, когда  $h = 0$ .

Теорема. (1) Всякое непустое связное компактное двумерное многообразие диффеоморфно многообразию  $S(g, h, k)$  с  $h \leq 2$ . (2) Если  $h \geq 3$ , то  $S(g, h, k)$  диффеоморфно  $S(g+1, h-2, k)$ . (3) Если  $(g, h, k) \neq (g', h', k')$  и  $h \leq 2, h' \leq 2$ , то многообразия  $S(g, h, k), S(g', h', k')$  не диффеоморфны и даже не гомеоморфны.

Доказательство. Начнем с части (2). На рис. 39 изображена операция приклеивания "вывернутой ручки". Рис. 40 показывает, что круг с вывернутой ручкой — это то же самое, что две ленты Мебиуса, склеенные по отрезку края [круг в вывернутой ручке разрезается на две части (рис. 40 а), линия разреза — отрезок, части — ленты Мебиуса (рис. 40 б.)]. Таким образом, приклеивание круга с вывернутой ручкой равносильно приклеиванию двух пленок Мебиуса. В то же время ясно, что если поверхность уже содержит ленту Мебиуса, то приклеивание к ней вывернутой ручки равносильно приклеиванию обыкновенной ручки (рис. 41).

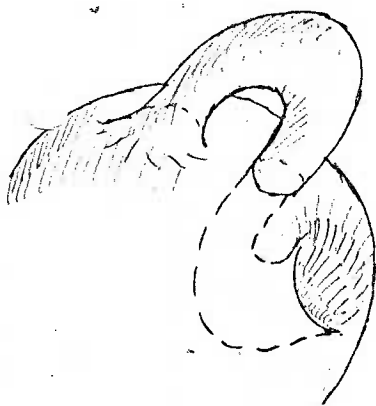
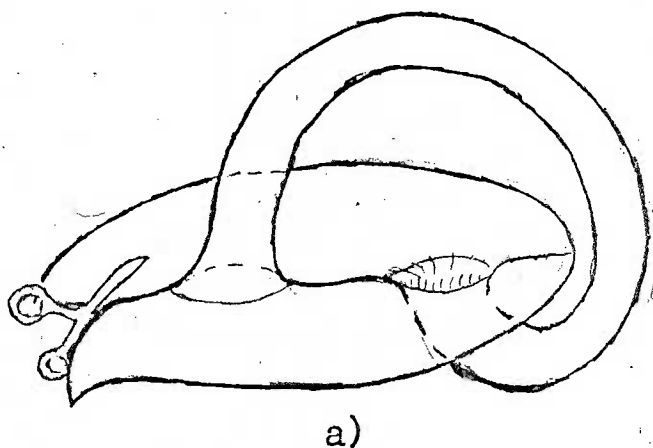
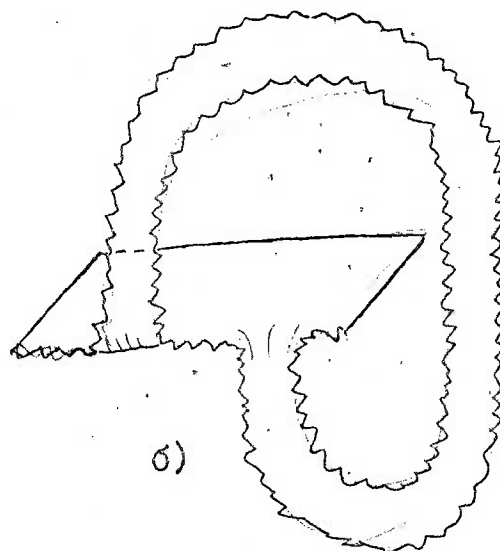


Рис. 39



а)



б)

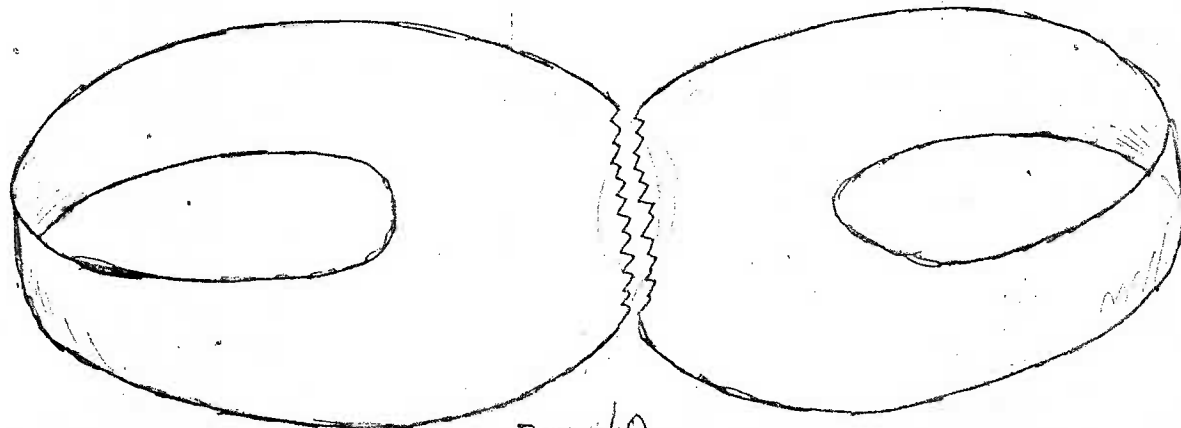


Рис. 40

Следовательно, при  $h \geq 1$

$$S(g+1, h, k) = S(g, h+2, k).$$

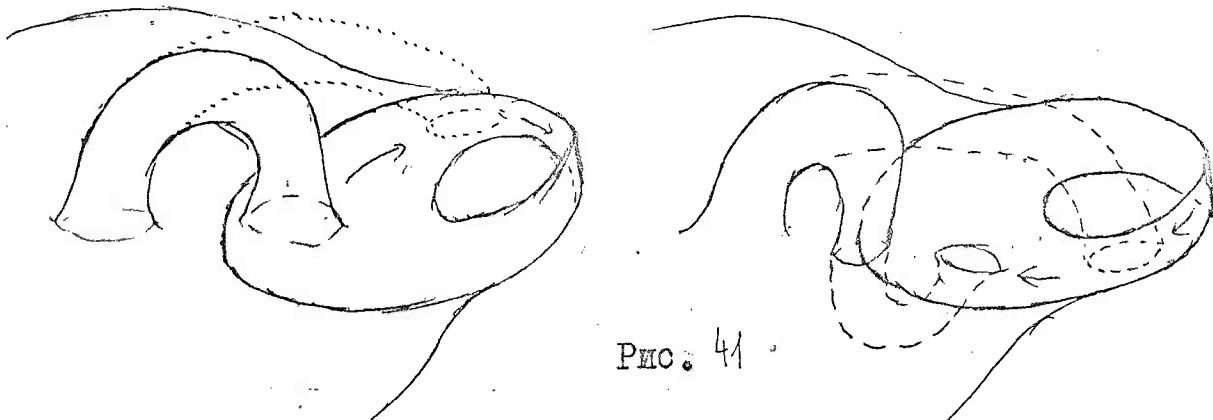


Рис. 41

Часть (2) доказана. Для доказательства части (3) заметим, что если поверхности  $S(g, h, k)$ ,  $S(g', h', k')$  гомеоморфны, то  $k' = k$  (число компонент края — топологический инвариант), и что они останутся гомеоморфными при приклеивании  $k' = k$  кругов к этим компонентам края. Таким образом, мы можем ограничиться случаем  $k = k' = 0$ . Пусть  $S(g, h, 0) = S(g', h', 0)$ . Фундаментальная группа поверхности  $S(g, h, 0)$  более или менее вычислялась в главе : эта группа порождена  $2g+h$  образующими  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_h$ , и эти образующие связаны единственным соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1^2 \dots c_h^2 = 1$$

Неискушенного читателя в этом месте легко обмануть, сказав, что поверхности  $S(g, h, 0)$ ,  $S(g', h', 0)$  не гомеоморфны, потому что, как это видно, у них разные фундаментальные группы. В действительности из приведенного описания фундаментальных групп совсем не видно, что они не изоморфны между собой; это и неверно: ведь  $S(g+1, h, 0) = S(g, h+2, 0)$ . Один из способов доказать, что две группы, заданные образующими и соотношениями не изоморфны заключается в переходе к коммутативным группам. Добавим к нашему соотношению тождественное соотношение коммутативности: образующие перестановочны между собой. Изоморфные группы при этом должны остаться изоморфными. Мы получаем абелеву группу с  $2g+h$  образующими, за которыми мы сохраняем обозначения  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_h$  и соотношением

$$2(c_1 + \dots + c_h) = 0.$$

Это — группа

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}, & \text{если } h = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \overset{2g}{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{если } h > 0. \end{cases}$$

Теперь действительно видно, что если  $(g, h) \neq (g', h')$  и  $h, h' \leq 2$ , то поверхности  $S(g, h, 0)$ ,  $S(g', h', 0)$  не гомеоморфны.


Переходим к части (I). В ее доказательстве мы применим теорию Морса.

Нам достаточно доказать, что связная замкнутая (не имеющая края) поверхность гомеоморфна  $S(g, h, 0)$  с некоторыми  $g$  и  $h$  (если край есть, мы заклеиваем его кругами). Согласно теории Морса, наша поверхность  $X$  получается из  $\emptyset$  приклеиванием ручек индексов 0, 1, 2:

$$\emptyset \Rightarrow X_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_N = X$$

$X_1$  есть диск, т.е.  $S(0, 0, 1)$ . Примем индуктивное предположение, что каждая компонента поверхности  $X_{i-1}$  есть поверхность вида  $S(g, h, k)$  и покажем, что то же верно для  $X_i$ . (Этого нам хватит: мы получим, что каждая компонента поверхности  $X_N$  есть поверхность вида  $S(g, h, k)$ , что поверхности  $X_N = X$  связна, т.е. компонента всего одна, и у нее нет края, т.е.  $k = 0$ .)

$X_i$  получается из  $X_{i-1}$  приклеиванием ручки индекса 0, 1 или 2. Если индекс = 0, то приклеивание ручки состоит в присоединении диска, т.е. компоненты  $S(0, 0, 1)$ . Если индекс = 2, то приклеивание ручки состоит в заклеивании диском одной из окружностей, входящих в край, т.е. в уменьшении на 1 числа  $k$  в одном из  $S(g, h, k)$ , входящих в  $X_{i-1}$ . Переходим к более содержательному случаю, когда индекс = 1.

В этом случае к  $X_{i-1}$  приклеивается полоска , два конца которой присоединяются к компонентам края. Возможны следующие случаи.

(а). Полоска приклеивается к компонентам краев разных компонент многообразия  $X_{i-1}$ .

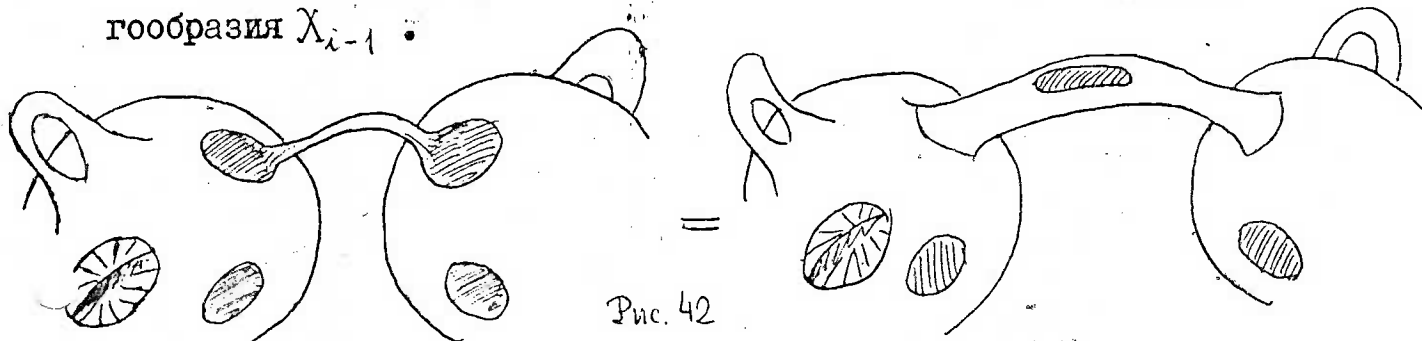


Рис. 42

Если эти компоненты были  $S(g, h, k)$  и  $S(g', h', k')$ , то из них получится  $S(g+g', h+h', k+k'-1)$ .

(б) Полоска приклеивается к двум разным компонентам края одной компоненты многообразия  $X_{i-1}$ . Две дыры, ограничиваемые этими компонентами края, можно свести на одном, немного большем, диске. Приклеивание полоски производится одним из двух способов, представленных на рис. 43. Если

наша компонента  $X_{i-1}$  была  $S(g, h, k)$ , то в первом случае получится  $S(g+1, h, k-1)$  во втором —  $S(g, h+1, k-1)$  (см. рис. 44 на следующей странице).



Рис. 43

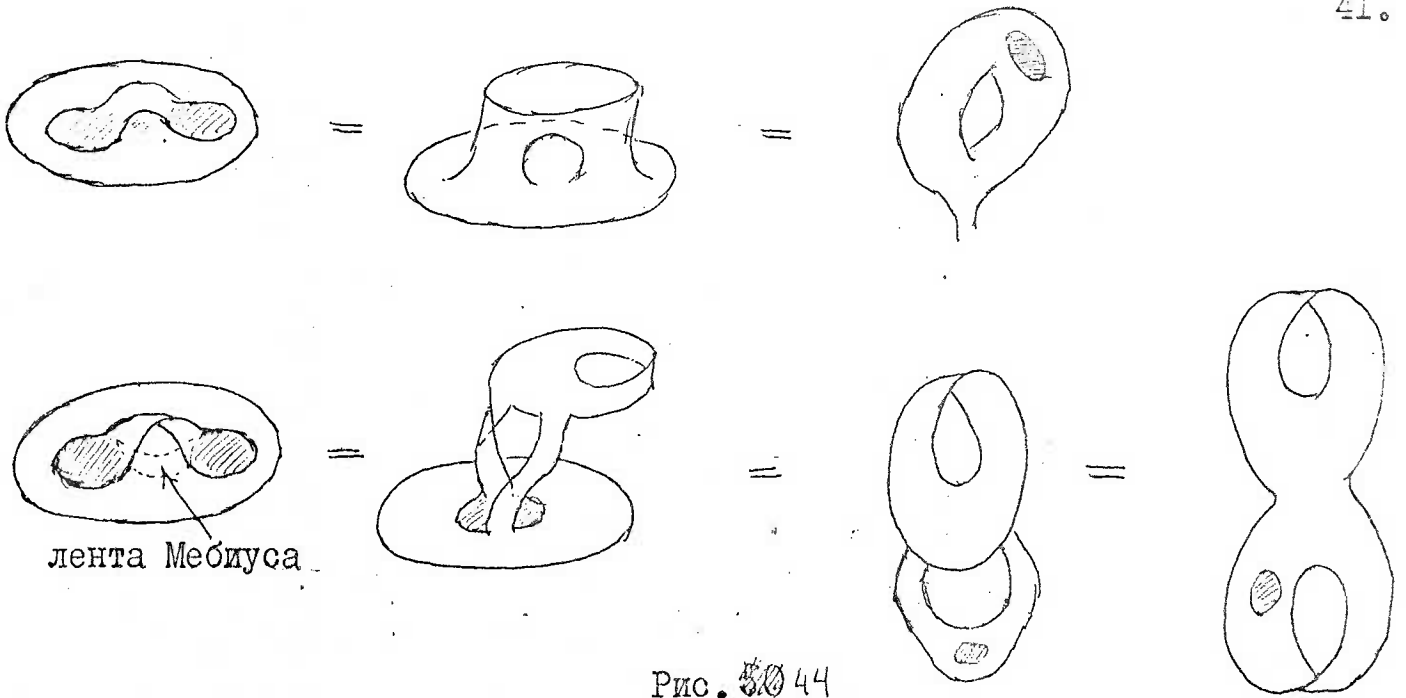


Рис. 44

Если эта компонента была  $S(g, h, k)$ , то в первом случае из нее получится  $S(g+1, h, k-1)$ , во втором —  $S(g, h+1, k-1)$

(в) Полоска приклеивается в одной компоненте края  $X_{i-1}$ . Это можно сделать двумя способами (рис. 45). В первом случае из  $S(g, h, k)$  получится



Рис. 45

$S(g, h, k+1)$ , во втором —  $S(g, h+1, k)$  (см. рис. 46)

Таким образом, абсолютно во всех случаях все компоненты поверхности  $X_i$  имеют вид  $S(g', h', k')$ . Индукция завершена, и наша теорема доказана.

Упражнения. 1. Доказать, что поверхность, задаваемая в  $\mathbb{C}P^2$  уравнением  $z_1^m + z_2^m + z_3^m = 0$  (в однородных координатах) есть сфера

$$z_1^q (w_1^p + w_2^p) = z_2^q (w_1^p - w_2^p)$$

с  $(m-1)(m-2)/2$  ручками.

2. Доказать, что поверхность, задаваемая в  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  уравнением  $(z_1, z_2 - \text{однородные координаты в одном } \mathbb{C}P^1, w_1, w_2 - \text{в другом})$  есть сфера с  $(p-1)(q-1)$  ручками.

3. Над какими топологическими пространствами может служить накрывающей сфера с 7 ручками? Поверхность  $S(g, h, k)$  ?



Рис. 46