Решения (не только ответы!) задач 6 – 15 следует выслать до

5 ноября

по адресу:

> Москва, 119002, Большой Власьевский пер., дом 11, Московский центр непрерывного математического образования, заочный конкурс, ... класс, задачи 6–15

На письме должен быть указан **обратный адрес**, включая **имя** и **фамилию**.

В письмо следует вложить **пустой незаклеенный конверт** с написанным на нём своим адресом и маркой. (В этом конверте Вам будут посланы результаты проверки и приглашение на разбор задач.) В это же письмо просим вложить заполненную карточку участника заочного конкурса.

На каждом листе работы просим указывать фамилию, имя, класс и номер школы.

Решения задач 16 – 25 следует выслать до

10 ноября

по тому же адресу, заменив в нём «6 – 15» на «16 – 25», указав обратный адрес, вложив конверт и т. п. Этот второй конверт будет использован для того, чтобы послать Вам информацию о следующем заочном конкурсе. На этот раз карточку участника отправлять не надо.

Пожалуйста, перед отправкой письма проверьте ещё раз, правильно ли указана вся необходимая информация, перечитав внимательно наши инструкции — это облегчит нашу работу.

Пожалуйста, не отправляйте задачи 6 – 15 и 16 – 25 в одном конверте, а также задачи одной группы в разных конвертах.

Справки по вопросам, связанным с конкурсом, можно получить по телефону 945-82-16 (попросить соединить с организаторами заочного конкурса), а также по электронной почте: zmk@mccme.ru (**очень просим НЕ отправлять решения по электронной почте**). Информация о заочном конкурсе имеется в Internet (сайт http://www.mccme.ru/zmk/); в частности, на этом сайте будет помещён список победителей конкурса.

Московский городской Дворец детского (юношеского) творчества
Московский центр непрерывного математического образования

ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

(осень — 2008, 6 – 8 классы)

Сообщаем Вам результаты проверки задач 1–5:

номер задачи	1	2	3	4	5
оценка					

Желаем успехов!

В этом полугодии мы в порядке эксперимента проводим тематический конкурс по теории вероятностей. Предварительного знакомства с понятиями теории вероятностей не предполагается; для решения задач вполне достаточно здравого смысла (хотя некоторые из них поначалу могут показаться трудными).

Будем много раз бросать монету и смотреть, какой стороной она падает — орлом или решкой. Опыт показывает, что при большом числе опытов орёл и решка появляются примерно одинаково часто (около половины случаев). Говорят, что *вероятность* появления орла (или решки) равна $1/2$ (один шанс из двух, что выпадет орёл, один шанс из двух, что решка).

Если мы бросаем кубик (игральную кость) с цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6$, то при большом числе бросаний каждая цифра появляется примерно одинаково часто — в одном случае из шести. Говорят, что вероятность появления единицы (равно как и двойки, тройки, …, шестёрки) равна $1/6$. А, скажем, вероятность появления чётной цифры $(2, 4, 6)$ составляет $3/6 = 1/2$ (три случая из шести равновероятных).

Вообще если какое-то действие может закончиться одним из n равновероятных (т.е. случающихся примерно одинаково часто) исходов, и некоторые m из этих n исходов мы считаем «успешными», то доля «успехов» в длинной серии испытаний будет примерно равна m/n. Отношение m/n называют «вероятностью» успеха.

Бросая кубик дважды, мы можем получить один из 36 вариантов (шесть вариантов, когда в первый раз выпадает единица, шесть вариантов, когда в первый раз выпадает двойка и так далее). Будем считать все эти варианты равновероятными.

6. (а) Бросив кубик дважды, мы вычисляем сумму выпавших цифр (от минимума $2 = 1 + 1$ до максимума $12 = 6 + 6$). Какая из сумм наиболее вероятна и какова её вероятность?

(б) Что более вероятно: чётная сумма цифр $(2, 4, 6, 8, 10, 12)$ или нечётная $(3, 5, 7, 9, 11)$?

7. Кубик бросают шесть раз подряд. Сколько всего вариантов (групп из шести цифр, каждая от единицы до шестёрки) получается? Считая все варианты равновероятными, найдите вероятность того, что не выпадет ни одной шестёрки.

8. (Продолжение) …что выпадет ровно одна шестёрка;

9. (Продолжение) …что выпадет хотя бы одна шестёрка.

Пешка стоит на поле a1 шахматной доски. С вероятностью $1/2$ (в половине случаев) она делает шаг вверх (на поле a2), в оставшейся половине случаев она делает шаг вправо (на поле b1). Затем она снова ходит вправо или вверх с равной вероятностью, так что в четверти случаев из a2 она попадает в a3, в четверти случаев из a2 идёт в b2, в четверти из b1 идёт в b2, в четверти из b1 в c1, и так далее. Заметим, что в клетку b2 можно попасть двумя способами (из a2 и b1), каждый из них имеет вероятность $1/4$, и всего получается $1/2$ (два варианта из четырёх).

10. Найдите вероятность прохождения через клетку c2.

11. (Продолжение) Найдите вероятность прохождения через клетку e4.

12. Двое играют в орлянку: подбрасывают монету, один считает орлы, другой решки — и так до десяти орлов или решек. В какой-то момент игра была отложена при счёте $9 : 8$ в пользу игрока А. Каковы шансы игрока А на победу после возобновления игры?

13. В коробке лежит пять белых и пять чёрных шаров. Из неё не глядя вынимают два шара (и остаётся восемь). Считая, что все варианты (группы из двух шаров) равновероятны, определите вероятность того, что два вынутых шара будут разного цвета.

14. Пять человек А, Б, В, Г и Д становятся в очередь. Считая все возможные варианты их расположения в очереди равновероятными, найдите вероятность того, что А будет стоять в очереди раньше Б (ближе к началу очереди, чем Б), но позже Г;

15. (Продолжение) Найдите вероятность того, что А и Б будут стоять в очереди рядом (в любом порядке).

16. Монету бросают десять раз подряд, записывая результаты бросаний (орлы и решки). Считая, что все варианты равновероятны, найдите вероятность того, что ни разу два орла не выпали подряд.

17. В соревнованиях по кубковой системе участвуют 64 команды (они разбиваются на 32 пары, проигравший в каждой паре выбывает, победители делятся на 16 пар и так далее). Считая, что результат каждой встречи определяется силой участников и что все варианты результатов жеребьёвки одинаково вероятны, найдите вероятность того, что в финале встретятся две самые сильные команды.

18. При заполнении лотерейного билета надо указать 6 чисел от 1 до 49. При розыгрыше тиража также выбирают случайно 6 чисел от 1 до 49. Какова вероятность не угадать ни одного числа?

Средним арифметическим двух чисел a и b называют их полусумму $(a+b)/2$. Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c равно $(a + b + c)/3$ и так далее.

19. Один из школьников перешёл из класса А в параллельный класс Б, и в результате этого средний рост школьников в классе Б увеличился. Мог ли он увеличиться вследствие этого перехода также и в классе А?

20. В школе два седьмых класса (7а и 7б) и два восьмых класса (8а и 8б). Оказалось, что средний рост школьников в 7а меньше, чем в 8а, а средний рост школьников в 7б меньше, чем в 8б. Может ли оказаться так, что несмотря на это средний рост всех семиклассников школы больше среднего роста всех восьмиклассников?

21. Некто утверждает, что средний доход 10% самых богатых жителей города N в пятнадцать раз превышает средний доход всех жителей города. Докажите, что это не так.

22. Будем бросать кубик, пока не выпадет шестёрка, и запишем число бросаний, которое для этого понадобилось (включая последнее). Потом повторим это снова, и так много раз. Чему будет (примерно) равно среднее записанных чисел при большом числе повторений?

(Это число называется математическим ожиданием числа бросаний до появления шестёрки.)

23. Тот же вопрос, если мы бросаем кубик до тех пор, пока не выпадут две шестёрки подряд, и считаем все бросания, включая два последних.

24. По кругу написано 10 плюсов и 10 минусов в случайном порядке (все варианты взаимного расположения одинаково вероятны). Каково математическое ожидание числа «перемен знака» — мест, где с одной стороны стоит плюс, а с другой — минус?

25. Имеется десять белых и десять чёрных шаров. Вы можете распределить их по двум урнам (надо использовать все шары), после чего вам предложат выбрать случайный шар из случайной урны (вы не знаете, где какая урна). Как надо распределить шары, чтобы максимально увеличить шансы вынуть белый шар?