Московский центр непрерывного математического образования

ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

(весна 2013, 6–8 классы)

Дорогой друг! Приглашаем тебя принять участие в заочном конкурсе по математике. Участвовать в нём может любой ученик **6–8 класса**, решивший по крайней мере пять из предлагаемых 20 задач. Для этого он должен не позднее

20 марта

выслать полные решения (не только ответы!) задач обычным (**не заказным**) письмом по адресу

> Москва, 119002, Большой Власьевский пер., дом 11, Московский центр непрерывного математического образования, заочный конкурс, … класс.

На письме должен быть указан **обратный адрес**, включая **имя** и **фамилию**. В письмо следует вложить два пустых **незаклеенных конверта с маркой, написав на них свой адрес**. (В одном конверте будут посланы результаты проверки и приглашение на разбор. Другой конверт может быть использован для информации о заочном конкурсе, математических кружках, олимпиадах и пр.) На каждом листе работы просим указывать **фамилию, имя, номер школы и класс**. В письмо следует вложить заполненную **карточку участника** (см. на обороте).

Справки по всем вопросам, связанным с конкурсом, можно получить по телефону (495) 945-82-16 (попросить соединить с организаторами заочного конкурса), или (это надёжнее) по электронной почте: zmk@mccme.ru. (**Очень просим Вас НЕ отправлять решения задач по электронной почте.**)

Информация о заочном конкурсе есть на сайте http://www.mccme.ru/zmk/; в частности, на этом сайте будет указана дата разбора задач (скорее всего, это будет в мае), а после разбора помещён список победителей конкурса.

На сайте http://www.mccme.ru имеется также информация о математических кружках, олимпиадах и пр. Информацию о кружках можно получить также по телефону (499) 241-05-00.

Желаем успеха!

1. Разрежьте квадрат на три части и сложите из них неравнобедренный непрямоугольный треугольник (то есть треугольник, у которого все стороны разные и все углы отличны от 90°).

2. Укажите наименьшее целое положительное число, которое не является делителем числа $31! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 30 \cdot 31$.

3. Можно ли разбить число 174 на три различных целых положительных слагаемых так, чтобы сумма любых двух из них делилась нацело на третье?

4. Составьте три несократимые дроби, дающие в произведении единицу, используя в качестве числителей и знаменателей целые числа от 1 до 9 (каждое число можно использовать не более одного раза).

5. Все натуральные числа от 1 до 2013 разбиты на две группы: чётные и нечётные. В какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и на сколько?

6. Из городов А и Б одновременно направились навстречу друг другу два пешехода. После встречи первому осталось идти (до города, куда он направился) ещё a часов, второму — b часов. Сколько часов прошло от начала движения до встречи? (Пешеходы двигались с постоянными скоростями.)

7. Можно ли так упаковать в ящик $2 \times 2 \times 2$ три цилиндра высотой 2 и диаметром 1, чтобы ни один из них нельзя было сдвинуть с места, не смещая других?

8. Найдите последнюю цифру произведения всех нечётных трёхзначных чисел.

9. Сто разных фишек положены в ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно поменять местами. Можно ли с помощью нескольких таких операций переставить фишки в обратном порядке?

10. В круге проведено m хорд, которые пересекаются внутри круга в n точках (в каждой точке по 2 хорды). На сколько частей они делят круг?

11. Можно ли какой-то прямоугольник разрезать на три прямоугольника, подобных исходному, причём так, чтобы все три имели разные размеры? (Прямоугольники называются подобными, если у них одинаковая форма, то есть одинаковое отношение большей стороны к меньшей.)

12. Из одной заготовки можно сделать одну деталь, а из стружек от 6 заготовок можно изготовить целую заготовку. Сколько деталей можно получить из 600 заготовок?

13. Сколько существует различных шестигранных игральных костей с цифрами $1, \ldots, 6$ на гранях? (Две кости считаются одинаковыми, если их можно повернуть так, чтобы числа на соответствующих гранях совпали.)

14. Дано десять чисел; сумма любых трёх из них чётна. Докажите, что все числа чётны.

15. В неизвестном месте поля 10 на 10 для игры в морской бой расположен «линкор» — прямоугольник размером 4 на 1. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантировать, что будет попадание? Куда нужно стрелять? Почему нельзя обойтись меньшим числом выстрелов?

16. Работа была поделена поровну между работниками в бригаде. После первого дня посчитали, сколько человек выполнило не менее 30% своей доли — таких оказалось 70% всех работающих. Когда стали считать только тех, кто выполнил не менее 70% своей доли, таких оказалось 30% работавших. Можно ли быть уверенным, что выполнена хотя бы треть работы?

17. Докажите, что

$$\sqrt{10+\sqrt{10+\ldots+\sqrt{10+\sqrt{10}}}} \leq 3{,}8$$

(при любом количестве квадратных корней в левой части).

18. Какая средняя сумма цифр у четырёхзначного числа? (Четырёхзначные числа — от 1000 до 9999; у каждого из них вычислили сумму цифр, а потом взяли их среднее арифметическое. Напомним, что среднее арифметическое k чисел $a_1, \ldots, a_k$ определяется как их сумма, делённая на их количество, то есть как $(a_1 + \ldots + a_k)/k$.)

19. Можно ли так нарисовать внутри квадрата несколько непересекающихся круглых клякс, чтобы общая площадь, покрытая кляксами, была больше 99% от площади этого квадрата?

20. Докажите, что в любой бесконечной последовательности целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ найдётся пара чисел a_i и a_j, в которой $i < j$ и число a_i можно получить из a_j вычёркиванием некоторого числа цифр в десятичной записи (возможно, ни одной: $a_i = a_j$ тоже допускается).

КАРТОЧКА УЧАСТНИКА

заочного конкурса по математике (весна 2013)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

(заполняется при проверке)

ФАМИЛИЯ, ИМЯ ____________________

ИНДЕКС ____________ АДРЕС ____________

____

____

школа ______ класс ____ дом. телефон ____________

(заполняется участником, **ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ**)

Заполненная карточка участника должна быть отправлена **вместе** с решениями задач.